Asymptotique de spectre et perturbations singulières

COLETTE ANNÉ
anne@math.univ-nantes.fr
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, CNRS
Université de NANTES, BP 92208,
44322 Nantes-Cedex 03, France

mémoire pour la présentation à l' habilitation à diriger des recherches

soutenue le vendredi 23 mars 2007 à Nantes devant le jury :

Gérard Besson (CNRS, Université de Grenoble) Président,
Gilles Carron (Université de Nantes),
Ahmad El Soufi (Université de Tours),
Bernard Helffer (Université de Paris Sud),
Georgi Popov (Université de Nantes),
Didier Robert (Université de Nantes).

au vu des rapports de :

Ahmad El Soufi (Université de Tours),
Bernard Helffer (Université de Paris Sud),
Rafe Mazzeo (Université de Stanford).

En remerciant les personnes qui ont accepté d'être membre du jury ou rapporteur je voudrais remercier celles et ceux, amis, collaborateurs, collègues, qui ont su, parfois contre moi-même, me convaincre que j'avais ma place parmi les mathématiciens.

Résumé

L'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les fonctions d'une variété compacte a un spectre discret. On ne sait calculer ses valeurs propres que dans très peu de cas et l'on est donc amené à developper des méthodes asymptotiques qui permettent d'étudier une "continuité du spectre" sous diverses manipulations géométriques et qui peuvent aussi s'appliquer à d'autres opérateurs. Les travaux que je présente ici peuvent être séparés en deux groupes.

Dans le premier, centré sur la géométrie riemannienne des variétés compactes, on s'interessera à
- l'influence d'excision de petits voisinages tubulaires (avec diverses conditions au bord)
- l'influence d'ajout d'anses fines

pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété compacte, ou un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et pour l'opérateur de Hodge-Laplace agissant sur les formes différentielles d'une variété compacte M^n.

Un résultat emblématique concerne la convergence du spectre des p-formes sous l'influence d'ajout d'une anse fine ($\varepsilon \to 0$) isométrique à $(a,b) \times \varepsilon\mathbb{S}^{n-1}$. Nous avons montré avec Bruno Colbois que, pour $p \neq 0, 1, n-1, n$, le spectre converge vers celui des p-formes de la variété initiale, mais que pour $p = 1$ le spectre limite est union du spectre initial et de celui avec "conditions tangentielles" des 1-formes de l'intervalle (a,b). Ceci donne par dualité le résultat pour $p = n-1$. Le cas $p = 0$ (et donc par dualité $p = n$) résulte d'un travail antérieur : le spectre limite est union du spectre de M et du spectre de Dirichlet de l'intervalle. De plus la méthode donne un asymptotique des formes propres.

Les travaux du second groupe concernent les opérateurs pseudo-différentiels et le calcul semi-classique :
- comparaison des spectres de Dirichlet et Neumann pour l'opérateur d'élasticité.
- localisation semi-classique du spectre joint de plusieurs opérateurs pseudo-différentiels qui commutent.

Nous avons par exemple montré avec Anne-Marie Charbonnel une concentration des valeurs propres de k opérateurs qui commutent. En effet s'ils commutent les opérateurs ont des fonctions propres communes, leurs valeurs propres selon chaque opérateur forment un vecteur de $\mathbb{R}^k$, le spectre joint. Nous avons montré que ce spectre joint se concentre, quand le paramètre semi-classique h tend vers 0, sur un réseau de $\mathbb{R}^k$ centré en une valeur de l'énergie régulière pour l'hamiltonnien classique, et dont les directions sont déterminées par l'indice de Maslov et l'action, ceci avec la simple hypothèse que le flot classique est périodique "de période constante" sur la surface d'énergie. Ce travail m'a conduit à donner, dans une publication récente, une nouvelle définition du fibré de Maslov du cotangent d'une variété qui généralise celle d'Arnol'd.

Mes derniers résultats concernent la première thématique, mais pour des variétés non compactes ; ils sont contenus dans un travail en cours avec Gilles Carron et Olaf

Post. En effet la perturbation par ajout d'anses fines permet de construire des variétés périodiques pour lequel l'opérateur de Hodge-Laplace a un spectre *continu* présentant autant de lacunes que désiré (cette technique a déjà été utilisée avec succès par Olaf Post dans le cas des fonctions). Pour ce faire nous avons dû démontrer un théorème d'ajout d'anses sur des variétés à singularités coniques, où l'on peut utiliser les travaux de Jeff Cheeger, Richard Melrose, Rafe Mazzeo ou Matthias Lesche (entre autres). Voici la construction :

Soit M est une variété compacte de dimension $n+1$ et Σ une hypersurface compacte de M qui ne disconnecte pas la variété. Soit g une métrique sur M telle qu'il existe un collier $U =]-2, 2[\times\Sigma$ où g peut s'écrire $dt^2 + h$, pour une métrique h de Σ.

Pour $\varepsilon \leq 1$ on construit la métrique C^0 (mais C^∞ par morceaux) g_ε comme suit

- $g_\varepsilon = g$ sur $M \setminus U$,
- $\Big(]-1, 1[\times\Sigma,\, g_\varepsilon\Big)$ est isométrique à l'union $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon{}^- \cup \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{C}_\varepsilon{}^+$ où $\mathcal{C}_\varepsilon{}^\pm$ sont des cônes $]\varepsilon, 1[\times\Sigma$ munis de la métrique $dt^2 + t^2h$ et d'orientation opposées, et $\mathcal{A}_\varepsilon$ est l'anse $]0, L[\times\Sigma$ munie de la métrique $dt^2 + \varepsilon^2 h$ ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$),
- sur $(]-2, -1[\cup]1, 2[)\times\Sigma$, la distance C^{10} 7 entre g_ε la métrique g est petite.

La nouvelle variété riemannienne est notée M_ε. Par ailleurs on introduit la variété à singularités coniques $\bar{M}$ obtenue à partir de $M - \Sigma$ en rajoutant sur chaque bord un cône $\mathcal{C}_0^\pm$.

Nous donnons dans ce cadre, si le groupe de cohomologie $H^{n/2}(\Sigma) = 0$, la limite du spectre de l'opérateur de Hodge-Laplace agissant sur les p-formes de la variété M_ε en termes du spectre d'extensions du Laplacien sur la variété conique $\bar{M}$ et des spectres du problème de Dirichlet ou Neumann sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^q(\Sigma)$, $q = p$ ou $(p-1)$: lorsque le Laplacien de Σ n'a pas de petites valeurs propres ($ie.$ dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$) c'est l'extension de Friedrich qui intervient, dans le cas contraire ce sont d'*autres* extensions qui interviennent (ces extensions ont été bien décrites par Matthias Lesche par exemple).

Enfin si le groupe de cohomologie $H^{n/2}(\Sigma)$ n'est pas nul le problème limite couple les deux parties $\bar{M}$ et l'anse.

CURRICULUM VITAE

Je suis née le 16 Août 1957

1975 Bac scientifique (C)

1981 Agrégation de mathématiques

D.E.A. de mathématiques pures à l'Université de Grenoble,

1981-84 préparation d'une thèse de 3^{e} cycle à l'Université de Grenoble sous la direction du Professeur Yves Colin de Verdière : "Exemples de convergence de valeurs propres sur des surfaces ayant une anse très fine", soutenue le 16 Avril 1984,

1981-82 vacation en T.D. de DEUG Science,

1983-84 professeur dans un lycée de Lyon,

1.9.1984 entrée au CNRS comme attachée de recherche sous la direction du Professeur Yves Colin de Verdière (à l' Institut Fourier, Grenoble),

1.10.1990 Passage CR1,

1.11.1990 mise en disponibilité, pour aller travailler en Suisse : du 1.11.1990 au 31.12.1992 Assistante à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, du 1.1.1993 au 28.2.1993 reçue par le Forschung Institut de l'ETH Zürich.

19.9.1992 mariage avec Matthias Borer.

1.4.1993 reintégration au CNRS, à l'Institut Fourier.

22.9.1993 naissance de ma fille Martha

1.10.1994 stage de 1 an à l'URA 758 "Analyse et Topologie" de Nantes

1.10.1995 affectation à Nantes

Septembre 1996 responsable de la Bibliothèque

16.10.1997 naissance de ma fille Anna

Septembre 2002 rédactrice en chef de la Gazette des Mathématiciens

1.1.2004 Directrice du CRDM (Centre Régional de Documentation Mathématique)

Je suis actuellement membre du bureau du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, de la commission de spécialiste 25/26 de l'Université de Nantes et du conseil d'administration de la SMF.

Expériences d'enseignement

1985-86 vacation en Cours-T.D. du soir en licence, certificat de Théorie de la mesure, Intégration et Probabilités (université de Grenoble),

1986-87 vacation en Cours-T.D. du soir en licence, certificat de Topologie et Calcul différentiel (université de Grenoble),

1989-90 vacation en T.D. de licence, certificat de Probabilités (université de Grenoble),

1990-92 assistante pour un cours de 3e cycle sur les groupes de Lie, assistante pour un cours de géométrie pour ingénieurs (EPF Lausanne),

2001-02 participation à la préparation de l'agrégation (Université de Nantes)

2004 encadrement du stage de DEA de Sandrine Cormon : *Vers la seconde Cliffordisation* (Université de Rennes)

LISTE DES TRAVAUX

1. avec G. Carron & O. Post, *Gaps in the spectrum of Dirac type operators on non-compact manifolds,* prépublication (2007).
2. avec A-M. Charbonnel, *Perturbation of several commuting h-pseudodifferential operators,* prépublication (2006)
3. *A topological definition of the Maslov bundle*, Cubo journal,**8** n° 1 (2006), & *Une définition topologique du fibré de Maslov,* Août 2003, prépublications de Nantes n° 2003-09-01.
4. avec A-M. Charbonnel, *Bohr-Sommerfeld conditions for several commuting Hamiltonnians*, Cubo journal, **6** n° 2 (2004).
5. avec A-M. Charbonnel, *Localisation of the joint spectrum of several commuting h-pseudodifferential operators with a periodic flow on a given energy level,* Juillet 1999/Décembre 2000, prépublications de Nantes n° 2000-12-02.
6. *A shift between Dirichlet and Neumann spectrum for generalized linear elasticity.* Asymptotic Anal. 19, No.3-4, 297-316 (1999).
7. *Formes différentielles sur des variétés avec des anses fines.* Besse, Arthur L. (ed.), Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, Luminy, France, 12–18 juillet, 1992. Paris : Société Mathématique de France. Sémin. Congr. 1, 69-76 (1996).
8. avec B. Colbois *Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses.* Math. Ann. 303, No.3, 545-573 (1995).
9. *A note on the generalized Dumbbell problem.* Proc. Am. Math. Soc. 123, No.8, 2595-2599 (1995).
10. *Laplaciens en interaction.* Manuscr. Math. 83, No.1, 59-74 (1994).
11. avec B. Colbois *Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules.* J. Funct. Anal. 115, No.1, 190-211 (1993).
12. *Bornes sur la multiplicité.* (Mars 1992), Prépublications EPFL.
13. *Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité.* Commun. Partial Differ. Equations 15, No.11, 1617-1630 (1990).
14. *Principe de Dirichlet pour les formes différentielles.* Bull. Soc. Math. Fr. 117, No.4, 445-450 (1989).
15. *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses.* Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 20, 271-280 (1987).

Participation au *Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie* : rédaction d'exposés

1. *Perturbation du Laplacien de Hodge par excision de petites boules.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 10, Année 1991-1992, 85-92 (1992).

2. *Majoration de multiplicité pour l'opérateur de Schrödinger.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 8, Année 1989-1990, 53-62 (1990).

3. *Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 7, Année 1988-1989, 123-133 (1989).

4. *Principe de Dirichlet pour les formes différentielles.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 6, Année 1987-1988, 61-64 (1988).

5. *Introduction aux travaux de Fukaya.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 5, Année 1986-1987, 25-31 (1987).

6. *Perturbation du spectre $X \setminus TUB^{\varepsilon}Y$. (Conditions de Neumann).* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble 4, Année 1985-1986, 17-23 (1986).

7. *Problème de la glace pilée.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble. Année 1984-1985, Exp. No.VII, 13 p. (1985).

8. avec Besson, Gérard *Sur le théorème de l'indice d'après Ezra Getzler.* Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry-Grenoble. Année 1984-1985, Exp. No.II, 32 p. (1985).

1 Introduction

L'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les fonctions d'une variété compacte a un spectre discret. On ne sait calculer ses valeurs propres que dans très peu de cas et l'on est donc amené à developper des méthodes asymptotiques qui permettent d'étudier une "continuité du spectre" sous diverses manipulations géométriques et qui peuvent aussi s'appliquer à d'autres opérateurs. Les travaux que je présente ici peuvent être séparés en deux groupes.

Dans le premier, centré sur la géométrie riemannienne des variétés compactes, on s'interessera à

- l'influence d'excision de petits voisinages tubulaires (avec diverses conditions au bord)
- l'influence d'ajout d'anses fines

pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété compacte, ou un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et pour l'opérateur de Hodge-Laplace agissant sur les formes différentielles d'une variété compacte M^n.

Un résultat emblématique concerne la convergence du spectre des p-formes sous l'influence d'ajout d'une anse fine ($\varepsilon \to 0$) isométrique à $(a, b) \times \varepsilon \mathbb{S}^{n-1}$. Nous avons montré avec Bruno Colbois que, pour $p \neq 0, 1, n-1, n$, le spectre converge vers celui des p-formes de la variété initiale, mais que pour $p = 1$ le spectre limite est union du spectre initial et de celui avec "conditions tangentielles" des 1-formes de l'intervalle (a, b). Ceci donne par dualité le résultat pour $p = n - 1$. Le cas $p = 0$ (et donc par dualité $p = n$) résulte d'un travail antérieur : le spectre limite est union du spectre de M et du spectre de Dirichlet de l'intervalle. De plus la méthode donne un asymptotique des formes propres.

Les travaux du second groupe concernent les opérateurs pseudo-différentiels et le calcul semi-classique :

- comparaison des spectres de Dirichlet et Neumann pour l'opérateur d'élasticité.
- localisation semi-classique du spectre joint de plusieurs opérateurs pseudo-différentiels qui commutent.

Nous avons par exemple montré avec Anne-Marie Charbonnel dans [4] une concentration des valeurs propres de k opérateurs qui commutent. En effet s'ils commutent les opérateurs ont des fonctions propres communes, leurs valeurs propres selon chaque opérateur forment un vecteur de $\mathbb{R}^k$, le spectre joint. Nous avons montré que ce spectre joint se concentre, quand le paramètre semi-classique h tend vers 0, sur un réseau de $\mathbb{R}^k$ centré en une valeur de l'énergie régulière pour l'hamiltonnien classique, et dont les directions sont déterminées par l'indice de Maslov et l'action, ceci avec la simple hypothèse que le flot classique est périodique "de période constante" sur la surface d'énergie.

2 Perturbations spectrales singulières sur les fonctions

La donnée d'une métrique g sur une variété riemannienne M^n, supposée connexe compacte, permet de définir l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ par polarisation de la forme quadratique

$$q(f) = \int_M \|df\|^2 \mathrm{dvol_g} \text{ pour } f \in C^\infty(M).$$

Cet opérateur admet un spectre discret, positif, de multiplicité finie et qui s'accumule en $+\infty$. Quel est le Laplacien naturel sur un espace constitué de la réunion d'une variété riemannienne compacte (M^n, g) et d'une variété (Y^m, g') de dimension plus petite $(m < n)$ et dont le bord peut être plongé isométriquement dans M $(\partial Y \subset M)$?

J'ai répondu à cette question en grossissant Y vers un ε-voisinage tubulaire et en étudiant la limite spectrale $\varepsilon \to 0$. Plus précisément, soient M et Y deux sous-variétés de $\mathbb{R}^{n+1}$, M est fermée de codimension 1 et Y de codimension $q > 1$, transverse à M et à bord inclu dans M. Quitte à prolonger Y à travers M on peut supposer que $TUB^\varepsilon(Y)$ coupe M. On réalise alors l'adjonction d'anse M_ε comme l'union de $M^1_\varepsilon = M - (M \cap TUB^\varepsilon(Y))$ et de M^2_ε, le bord de la partie connexe de $TUB^\varepsilon(Y)$ délimitée par $M \cap TUB^\varepsilon(Y)$.

Théorème 2.1 [1]. — *Dans la situation décrite ci-dessus, le spectre du Laplacien sur les fonctions de M_ε converge vers l'union du spectre du Laplacien sur M et du spectre du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Y.*

La démonstration est fondée sur l'étude des spectres marginaux de M^1_ε et de M^2_ε puis d'une mesure de l'interaction. On utilise donc les deux propositions suivantes.

Proposition 2.1.1 . — *Lorsque ε tend vers 0, le spectre du Laplacien avec conditions au bord de Dirichlet et celui avec conditions au bord de Neumann convergent tous les deux vers celui du Laplacien de (M, g).*

Le premier résultat a été démontré par Chavel et Feldman, voir [16] ; le deuxième est dans [1].

Proposition 2.1.2 [1]. — *Soit $\Pi : (X, g_X) \to (Y, g_Y)$ un fibré riemannien de variétés compactes, et de fibre connexe. Alors $\forall x \in X$ le tangent de X en x se décompose en $T_xX = H_x \overset{\perp}{\oplus} V_x$ où $V_x = \ker T_x\Pi$ est la verticale et son orthogonale H_x, l'horizontale, est isométrique à $T_{\Pi(x)}Y$. Lorsque ε tend vers 0, dans la variation canonique de la métrique de X définie en chaque point x par $g_\varepsilon = g_{|H_x} \oplus \varepsilon^2 g_{|V_x}$, le spectre du Laplacien converge vers celui de l'opérateur A de domaine $H^2(Y)$ défini par*

$$A(f) = \Delta f - < \frac{\nabla c}{c}, \nabla f >$$

où c est la fonction sur Y définie par $c(y) = \mathrm{Vol}(\Pi^{-1}(y))$.

On voit que cette technique donne une intuition de l'allure des fonctions propres qui semblent se concentrer sur l'une ou l'autre partie lorsque ε tend vers 0, selon qu'on a affaire à une valeur propre de l'un ou de l'autre spectre. Mais alors que se passe-t-il pour une valeur propre qui appartient aux deux spectres limites, y a-t-il un phénomène de résonance et dans ce cas peut-on utiliser l'adjonction d'anse pour augmenter la multiplicité ?

Ces questions ont donné lieu à plusieurs résultats. L'asymptotique des fonctions propres dépend d'un lemme qui s'exprime en termes de formes quadratiques de la façon suivante

Lemme 2.1.1 [2]. — *Soit $(q, \mathcal{D})$ une forme quadratique fermée non négative définie dans l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}, <\,,\,>)$. Définissons la norme associée $\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + q(f)$, et le projecteur spectral Π_I relatif à l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ dont le bord ne rencontre pas le spectre de q, qui designe aussi la forme bilinéaire associée.*

Alors il existe une constante $C > 0$, qui dépens de I, telle que si $f \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in I$ vérifient

$$\forall g \in \mathcal{D} \quad |q(f,g) - \lambda < f, g > | \leq \delta \|f\| \, \|g\|_1$$

alors pour tout a inférieur à la distance de α ou de β au spectre de q,

$$\|\Pi_I(f) - f\|_1 = \|\Pi_{I^c}(f)\|_1 \leq \frac{C\delta}{a}\|f\| \, .$$

Ce lemme admet une généralisation aux espaces de dimension finie pour les valeurs propres avec multiplicité. Reste alors à trouver de bonnes approximations des fonctions propres de M_ε à partir de celles de M et de Y. Pour cela définissons

$$\Phi_\varepsilon : H^1(M) \to H^1(M_\varepsilon)$$

qui à une fonction f sur M associe la fonction égale à f sur M_ε^1 et prolongée sur M_ε^2 par $\chi(t) f_{|\partial M_\varepsilon^2}$ pour une fonction de coupure χ fixée, la variable t étant la distance au bord de M_ε^2.

Du côté de Y les fonctions qui interviennent sont dans $H_0^1(Y)$. L'idée naïve qui consiste à les voir dans $H^1(M_\varepsilon)$ en les faisant constantes sur la fibre de M_ε^2 et prolongées par 0 sur M_ε^1 ne permet pas de mesurer l'interaction. Il faut donc faire quelque chose de plus compliqué et regarder :

$$\begin{array}{rcl} \Psi_\varepsilon : H_0^2(Y) & \to & H^1(M_\varepsilon) \\ h & \mapsto & (\varepsilon^{(d-1)/2} k(r) \dfrac{\partial h}{\partial n}_{|\partial Y}, h + \varepsilon^{(d-1)/2} k(\varepsilon) \mathcal{P}(\dfrac{\partial h}{\partial n}_{|\partial Y}). \end{array}$$

Théorème 2.2 [4]. — *Gardons les définitions précédentes.*

1. *Si λ est une valeur propre qui provient de M et pas de Y, de multiplicité m et d'espace propre E, alors M_ε possède m valeurs propres qui convergent vers λ. Elles admettent toutes le développement $\lambda + O(\varepsilon^{q-1})$ et l'espace propre total est à distance $O(\varepsilon^{(q-1)/2})$ de $\Phi_\varepsilon(E)$.*

2. *Si λ est une valeur propre qui provient de Y, et pas de M, de multiplicité l et d'espace propre F, alors M_ε possède l valeurs propres qui convergent vers λ. La distance de l'espace propre total à $\Psi_\varepsilon(F)$ est un $O(\varepsilon)$ si $q \geq 3$ et $O(\sqrt{\varepsilon})$ si $q = 2$. Si $h_1 \dots h_l$ est une base orthonormée de F qui diagonalise $< \partial h_i/\partial n, \partial h_j/\partial n >_{L^2(\partial Y)}$ n étant la normale au bord, l'asymptotique des valeurs propres est donné par*

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda - \frac{\varepsilon}{q-2} \int_{\partial Y} |\frac{\partial h_j}{\partial n}|^2 + O(\varepsilon^2)$$

si $q \geq 3$ et

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda - \varepsilon \log \varepsilon \int_{\partial Y} |\frac{\partial h_j}{\partial n}|^2 + O(\varepsilon)$$

si $q = 2$.

3. *Enfin si λ est une valeur propre commune, de multiplicité m et d'espace propre E sur M, de multiplicité l et d'espace propre F sur Y*
   - *si $q \geq 4$, il n'y a pas d'interaction entre les deux parties, les asymptotiques sont donnés par la juxtaposition des deux asymptotiques décrits ci-dessus ;*
   - *si $q = 2, 3$, il peut y avoir interaction dans le sens où l'asymptotique des fonctions propres est donné par une combinaison linéaire des asymptotiques précédents. En particulier si $m = l$ et si, $f_1 \dots f_m$ étant une base orthonormée de E, la matrice*

$$Z_{ij} = \int_{\partial Y} f_i \frac{\partial h_j}{\partial n}$$

     est inversible, aucune fonction propre asymptotique n'est localisée dans une des deux parties de M_ε.

Rappelons que q désigne la codimension de Y dans $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est donc aussi la codimension de ∂Y dans M.

A partir de là on peut se demander s'il est possible, par une méthode de perturbation, d'augmenter la multiplicité d'une valeur propre en ajoutant une anse fine. Rappelons que cette question n'est pertinente qu'en dimension 2 puisque Colin de Verdière a montré, dans [23], qu'en dimension plus grande que 3 on pouvait prescrire toute partie finie du spectre. Par contre en dimension 2 la multiplicité d'une valeur propre est bornée par une fonction affine du genre de la surface et du rang de la valeur propre, voir historiquement [21], [15], et [51] qui donne pour le moment la meilleur valeur : *la multiplicité de la k^e valeur propre du laplacien défini sur les fonctions (en comptant $\lambda_0 = 0$) d'une surface compacte est majorée par $2(k+2-\chi)-1$ si la caractéristique d'Euler χ de la surface est négative, cette majoration devenant respectivement $2k+1$ pour la sphère, $2k+3$ pour le plan projectif ou la boutelle de Klein et $2k+4$ pour le tore.* Dans [52] les auteurs donnent la borne $2k-1$ pour les surfaces de genre 0 et pour ($k \geq 2$). Enfin Bruno Sévennec dans [58] a donné la meilleure majoration, à ce jour, de la multiplicité de la première valeur : $5 - \chi$ pour toute surface vérifiant $\chi \leq -1$.

Mais Colin de Verdière, dans [22] a émis la conjecture : *la multiplicité de la première valeur propre du Laplacien sur une surface de genre γ est majorée par la partie entière de* $\frac{5+\sqrt{48\gamma+1}}{2}$ (ce nombre est égal au nombre chromatique de la surface diminué de 1), il a aussi montré que cette valeur de multiplicité pouvait être atteinte dans [23].

Théorème 2.3 [4]. — *Soit λ une valeur propre non nulle du Laplacien sur la surface (M,g), de multiplicité m* fortement stable. *Supposons que λ peut s'écrire $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $L > 0$ de telle sorte qu'il existe deux points $p, q \in M$ pour lesquels la forme linéaire $\mathcal{L}(f) = (-1)^n f(q) - f(p)$ soit* nulle *sur l'espace propre relatif à λ. Alors en ajoutant une anse fine aux points p et q, il existe une métrique sur M proche de g et une longueur d'anse proche de $\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}$ telle que M_ε a dans son spectre la valeur propre λ avec la multiplicité $(m+1)$.*

La technique utilisée ici est une méthode de transversalité inspirée de l'article [24] de Colin de Verdière qui définit en particulier la stabilité forte de la multiplicité d'une valeur propre. Rappelons que dans ce cas la fonction définie comme la restriction de la forme quadratique $\int \|df\|^2$ à l'espace propre de λ est une submersion lorsqu'on la regarde sur l'ensemble des métriques de M de classe C^k, $k \geq 1$.

Le théorème ci-dessus s'applique par exemple à la sphère canonique $\mathbb{S}^2$ avec des points p, q antipodaux. Cette technique donne des résultats nouveaux pour les grandes valeurs propres du tore mais pas pour la première qui est ici de multiplicité 4 alors que le tore équilatéral a une première valeur propre non nulle de multiplicité 6.

Ce théorème admet une version *à bord* où on ajoute un cylindre à une variété compacte pour obtenir une variété à bord et permet donc d'augmenter la multiplicité en passant au problème au bord de Dirichlet si on ajoute le cylindre fin en un point où toutes les fonctions propres sont nulles, voir [4]. On retrouve ainse une sphère à un trou avec λ_1 de multiplicité 3, on sait par ailleurs que c'est la multiplicité maximale, d'après [51].

Les mêmes techniques m'ont permis d'améliorer le résultat de Jimbo et Morita [45] relatif à la convergence des valeurs propres par ajout de fins tunnels entre des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$. On regarde le problème au bord de Neumann. J'ai pu en particulier dans [6] donner l'asymptotique des valeurs propres.

3 Perturbations spectrales singulières sur les formes différentielles

La donnée d'une métrique g sur une variété M permet de définir un produit scalaire sur les fibres du fibré des p-covecteurs antisymétriques $\Lambda^p(T^*M)$ et l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda^p(T^*M))$ des formes différentielles de degré p dont la norme est de carré intégrable sur la variété. Nous supposerons la variété M compacte connexe et orientable. Alors le laplacien de Hodge $\Delta = (d + d^*)^2$, où d^* est l'adjoint de la différentielle d, est essentiellement auto-adjoint, positif et à résolvante compacte ; il admet donc une base orthonormée de formes propres dont les valeurs propres sont positives, tendent vers $+\infty$ et sont de multiplicité fini ; notons, pour $0 \leq p \leq n$, λ_k^p ce spectre où chaque valeur est répétée autant que sa multilplicité. D'après la théorie de Hodge la multiplicité de 0 dans le spectre des p-formes est égal au p^{e} nombre de Betti $b_p = \dim H^p(M, \mathbb{R})$.

Si l'on peut, par l'analyse, prévoir la multiplicité de 0, alors on aura un contrôle de la topologie. Par ailleurs il n'existe pas à ce jour d'équivalent de la constante de Cheeger pour le spectre des formes différentielles. Rappelons que la constante de Cheeger donne un minorant géométrique de la première valeur propre non nulle des fonctions, plus précisément [19] $\lambda_1^p \geq \frac{h^2}{4}$ avec

$$h = \inf \left\{ \frac{\text{Aire}(S)}{\min(\text{Vol}(M_1), \text{Vol}(M_2))} ; S \text{ sous-var. codim. } 1 \,;\, M - S = M_1 \cup M_2 \right\}$$

Ainsi une petite valeur propre pour les fonctions signifie que la variété tend à se disconnecter. Les résultats que nous avons obtenus avec Bruno Colbois concernent l'ajout d'anses cylindriques. Comme je l'ai expliqué dans le cas des fonctions cette étude se fait en étudiant deux problèmes marginaux de convergence spectrale : l'excision de ε-voisinages tubulaires avec diverses conditions au bord, et l'écrasement de la fibre d'une variété fibrée, puis en étudiant leur interaction.

3.1 Problèmes à bord

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée à bord. Les deux conditions aux bord pour l'opérateur $d + d^*$ qui ont un sens topologique sont

Condition de Dirichlet : la partie tangentielle de la forme différentielle est nulle, ce qui donne pour le laplacien $\Delta = (d+d^*)^2$: $\phi_{\partial M} = 0$ et $(d^*\phi)_{\partial M} = 0$; l'espace des formes harmoniques correspondant est en bijection avec la cohomologie relative $H^*(M, \partial M)$

Condition de Neumann : la partie normale de la forme différentielle est nulle, ce qui donne pour le laplacien, en utilisant l'opérateur de Hodge $*$: $(*\phi)_{\partial M} = 0$ et $(*d\phi)_{\partial M} = 0$; l'espace des formes harmoniques correspondant est en bijection avec la cohomologie absolue $H^*(M)$.

Ces deux problèmes à bord vérifient les conditions d'ellipticité de Lopatinski, voir [35], ils sont par ailleurs en dualité par $*$ et définissent des opérateurs auto-adjoints. On pourrait concevoir une autre "condition de Dirichlet" pour le Laplacien, en l'occurence $\phi_{\partial M} = 0$ et $(*\phi)_{\partial M} = 0$, mais j'ai montré dans [7] que ce Laplacien n'avait pas de formes harmoniques. Par ailleurs une condition au bord qui ne porterait que sur les dérivées n'est pas elliptique, voir [3].

3.2 Excision d'un nombre fini de boules

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientée de dimension n et $a_1, \ldots, a_N$ des points distincts de M. Construisons $M_\varepsilon = M - \cup_{j=1}^N B(a_j, \varepsilon)$ et prenons p, $1 \leq p \leq n$. Nous noterons $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots$ le spectre du Laplacien de Hodge agissant sur les p-formes de M et $\mu_0(\varepsilon) \leq \mu_1(\varepsilon) \leq \ldots$ celui du Laplacien avec *conditions de Neumann* sur les p-formes de M_ε.

D'après le théorème de Mayer-Vietoris nous savons que, si $0 \leq p < n-1$ alors $\dim H^p(M_\varepsilon) = \dim H^p(M)$, $\dim H^{n-1}(M_\varepsilon) = \dim H^{n-1}(M) + N - 1$ et $\dim H^n(M_\varepsilon) = 0$ tandis que $\dim H^n(M) = 1$. Le résultat de convergence spectrale est le suivant

Théorème 3.1 [3]. — *Avec les notations précédentes, si* $p \neq n-1$, *alors, pour tout* $k \geq 0$, *on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_k(\varepsilon) = \lambda_k$. *Pour* $p = n-1$, *notons* $b_{n-1} = \dim H^{n-1}(M)$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \forall k,\ 0 \leq k < b_{n-1} + N - 1 \quad \mu_k(\varepsilon) & = & 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu_{b_{n-1}+N-1}(\varepsilon) & = & 0 \quad (\text{ et } \mu_{b_{n-1}+N-1}(\varepsilon) \neq 0) \\ \forall k,\ k > b_{n-1} + N - 1 \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu_k(\varepsilon) & = & \lambda_{k-N}. \end{array}$$

Il y a de plus convergence des espaces propres, sauf pour 0 dans le spectre des $(n-1)$-formes où les $b_{n-1} + N - 1$ formes harmoniques de M_ε sont approchées d'une part par les formes harmoniques de M et d'autre part par $*d(G_{a_1} - G_{a_j})$ pour $2 \leq j \leq N$ si G_{a_j} est le noyau de Green au point a_j. Ses dernières ont donc en ces points des singularités en $d(a_j, x)^{1-n}$. Quant à $\mu_{b_{n-1}+N-1}(\varepsilon)$, sa forme propre associée est $*d\phi_\varepsilon$ où ϕ_ε est la fonction propre normalisée de la première valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet, donc ϕ_ε tend vers une constante et la valeur propre $\mu_{b_{n-1}+N-1}(\varepsilon)$ disparait dans le spectre limite des $(n-1)$-formes.

3.3 Ajout d'anses fines

Soient $M_1, \ldots, M_N$ des variétés compactes de même dimension $n \geq 3$ que l'on relie par a cylindres $C_{ij}(\varepsilon) =]0, L_{ij}[\times S_\varepsilon^{n-1}$ entre M_i et $M_j$de façon a obtenir une variété connexe. La construction de ce graphe dont les sommets sont des variétés peut se faire de façon abstraite en supposant qu'autour des points $p_i \in M_i$ la métrique est plate et en identifiant le bord $\{0\} \times S_\varepsilon^{n-1}$ du cylindre aux points de M_i à distance ε de p_i et de même de l'autre côté. La variété obtenue $\widetilde{M}_\varepsilon$ est lisse par morceau et on peut y définir un Laplacien de Hodge $(d + d^*)^2$ par polarisation de la forme quadratique $\int \|d\phi\|^2 + \|d^*\phi\|^2$ définie sur les formes dont les restrictions sur chaque morceau sont dans l'espace de Sobolev H^1 et dont partie normale et partie tangentielle coïncident sur les bords de recollement. Étudions la limite lorsque ε tend ver 0 du spectre de cet opérateur.

Théorème 3.2 [5]. — *Soient* $0 \leq p < n-1$ *et* $\lambda_0(\varepsilon) \leq \lambda_1(\varepsilon) \cdots$ *le spectre du Laplacien agissant sur les* p*-formes de* $\widetilde{M}_\varepsilon$. *Enfin, définissons* $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots$ *comme*

- *si* $1 < p < n-1$ *l'union du spectre des* p*-formes des variétés* M_j *;*
- *si* $p = 0$ *ou 1 l'union du spectre des p-formes des variétés* M_j *et des p-formes avec conditions tangentielles de* $[0, L_{ij}]$.

Alors quel que soit $k \in \mathbb{N}$*,* $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\varepsilon) = \mu_k$*, et il y a convergence des espaces spectraux ; les cas* $p = n-1$ *ou* $p = n$ *s'obtiennent par dualité de Hodge. De plus*

$$\begin{aligned}
\dim H^0(\widetilde{M_\varepsilon}) &= \dim H^n(\widetilde{M_\varepsilon}) = 1 \\
\dim H^p(\widetilde{M_\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M_j) \text{ si } 1 < p < n-1 \\
\dim H^p(\widetilde{M_\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M_j) + a - (N-1) \text{ si } p = 1 \text{ ou } (n-1).
\end{aligned}$$

La condition tangentielle au bord de l'intervalle $[0, L]$ signifie pour les fonctions $(p = 0)$ la condition de Dirichlet : $f(0) = f(L) = 0$ et pour les 1-formes que l'on peut écrire avec $s \in [0, L], f(s)ds$ la condition de Neumann sur f : $f'(0) = f'(L) = 0$.

En degré 1, l'asymptotique des formes propres est donné par les formes propres des M_j et les formes en $f(s)\ ds$ avec conditions de Neumann pour f sur $[0, L_{ij}]$, que l'on étend avec la différentielle du noyau de Green sur M_i ou M_j multipliée par une fonction de coupure. Les $(n-1)$-formes propres seront données par celles des M_j et les formes en $f(s)\,\mathrm{dvol}$ sur les anses si dvol désigne la forme volume de la sphère S^{n-1}. On voit donc que l'opérateur limite doit être vu sur chaque anse comme agissant sur les formes de $[0, L_{ij}]$ à valeur dans l'espace des formes harmoniques de S^{n-1}.

Dans le cas des fonctions, le spectre converge vers l'union des spectres de M_j et de $[0, L_{ij}]$ avec conditions de Dirichlet. Comme $\widetilde{M_\varepsilon}$ est connexe la valeur propre 0 est de multiplicité 1 et $\widetilde{M_\varepsilon}$ a $(N-1)$ petites valeurs propres qui tendent vers 0. Ces $(N-1)$ petites valeurs propres restent dans le spectre des 1-formes exactes. On voit donc que l'adjonction de a anses donne exactement a petites valeurs propres supplémentaires pour les 1-formes : l'adjonction d'une anse à une variété connexe ajoute une petite valeur propre qui est en fait 0, l'adjonction d'une anse entre deux variétés crée une petite valeur propre non nulle.

La démonstration de ce théorème n'est réellement délicate qu'en dimension 3 où le spectre des 1-formes ne peut être déduit par encadrement de spectres connus. Nous avons donc dû dans ce cas faire une étude directe. Pour ce faire nous avons utilisé un résultat de Mc Gowan [47] que nous avons appliqué par la suite pour la détermination de la multiplicité de 0. Rappelons donc ce résultat

Lemme 3.2.1 ([McG], lemme 2.3). — *Si* $(U_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement fini de* $\widetilde{M_\varepsilon}$ *par des ouverts,* $U_{ij} = U_i \cap U_j$*,* $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \dots$*, soient* $\mu(U_i)$ *la première valeur propre des* 2*-formes exactes de* U_i *avec condition normale au bord,* $\mu(U_{ij})$ *la première valeur propre des 1-formes exactes de* U_{ij} *avec condition normale au bord. Alors le nombre*

$$C = \frac{1}{\sum_i \left[\frac{1}{\mu(U_i)} + \sum_{j, U_{ij} \neq \emptyset} \left(\frac{C_\rho}{\mu(U_{ij})} + 1 \right) \left(\frac{1}{\mu(U_i)} + \frac{1}{\mu(U_j)} \right) \right]}$$

minore la q^e valeur propre des 2-formes exactes (ou des 1-formes co-exactes) de $\widetilde{M_\varepsilon}$, avec $q = 1 + \sum_i \dim H^1(U_{ij}, \mathbb{R}) + \sum_{i,j} \dim H^0(U_{ijk}, \mathbb{R})$ et C_ρ une constante qui dépend du choix d'une partition de l'unité associée au recouvrement U_i.

Regardons plus précisement le spectre des 1-formes. Le spectre des 1-formes exactes est donné par celui des fonctions non constantes, il y a donc $(N-1)$ petites valeurs propres. On sait grâce au lemme de Mc Gowan qu'il n'y a pas de petites valeurs propres pour les 1-formes co-exactes. Il reste donc à décrire les 1-formes harmoniques.

Chaque variété M_i fournit $b_i^1 = \dim H^1(M_i, \mathbb{R})$ quasi-modes de petites valeurs propres en tronquant la forme harmonique au voisinage de chaque anse issue de M_i ; d'autre part, chaque anse C_{ij} nous fournit un quasi-mode en prolongeant la forme ds par la différentielle du noyau de Green tronquée.

Théorème 3.3 [5]. — *Soit $\alpha > 0$ tel que 2α minore les valeurs propres des 1-formes co-exactes et les valeurs propres qui ne tendent pas vers 0 des 1-formes exactes.*

Notons $E_\alpha(\varepsilon)$ l'espace spectral des 1-formes propres de $\widetilde{M_\varepsilon}$ de valeur propre dans $[0, \alpha]$ et $E(\varepsilon)$ l'espace engendré par les quasi-modes décrits ci-dessus. Alors $\dim E = \dim E_\alpha = \sum_{i=1}^N b_i^1 + a$ et

$$\operatorname{dist}(E, E_\alpha) = O(\sqrt{\varepsilon}) \ .$$

En particulier $\dim H^1(\widetilde{M_\varepsilon}, \mathbb{R}) = \sum_{i=1}^N b_i^1 + a - (N-1)$.

4 Lacunes dans le spectre continu

Le calcul de la perturbation du spectre du laplacien par ajout d'anses peut s'appliquer à l'étude du spectre continu de variétés périodiques.

Olaf Post, dans [53], a construit des variétés périodiques dont le spectre continu présente un nombre arbitrairement grand de lacunes. Sa construction consiste à couper une variété compacte M le long d'une sous-variété Σ qui ne disconnecte pas et de recoller une infinité de ses copies en intercallant ou non entre deux copies une anse $[0, L] \times \Sigma$, on étudie ensuite l'évolution du spectre lorsque l'on modifie la métrique sur l'anse par $g_\varepsilon = dt^2 + \varepsilon^2 g_\Sigma$. Le résultat dépend alors de deux ingrédients : la théorie de Floquet et la perturbation par *anses fines*.

Qu'en est-il pour le spectre des formes différentielles ? Y a-t-il des obstructions topologiques à la réalisation de telles perturbations ? Nous avons décidé avec Gilles Carron (Nantes) et Olaf Post (Aachen) de tenter de répondre à cette question. Un premier problème est celui de la convergence du spectre des formes différentielles lorsque l'on perturbe la métrique de M sur le voisinage tubulaire de Σ par $g_\varepsilon = dt^2 + \varepsilon^2 g_\Sigma$ (on suppose que la métrique de départ sur M est de la forme $dt^2 + g_\Sigma$ au voisinage de Σ). Ce problème diffère du précédent sur deux points essentiels : (1) le problème limite est à singularité conique, (2) Σ n'est pas nécessairement une sphère.

Le premier résultat obtenu concerne la perturbation suivante : M est une variété compacte de dimension $n+1$ et Σ une hypersurface compacte de M qui ne disconnecte pas la variété. Soit g une métrique sur M telle qu'il existe un collier $U =]-2, 2[\times \Sigma$ où g peut s'écrire $dt^2 + h$, pour une métrique h de Σ.

Pour $\varepsilon \leq 1$ on construit la métrique C^0 (mais C^∞ par morceaux) g_ε comme suit

- $g_\varepsilon = g$ sur $M \setminus U$,
- $\Big(]-1, 1[\times \Sigma,\, g_\varepsilon\Big)$ est isométrique à l'union $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon{}^- \cup \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{C}_\varepsilon{}^+$ où $\mathcal{C}_\varepsilon{}^\pm$ sont des cônes $]\varepsilon, 1[\times \Sigma$ munis de la métrique $dt^2 + t^2 h$ et d'orientation opposées, et $\mathcal{A}_\varepsilon$ est l'anse $]0, L[\times \Sigma$ munie de la métrique $dt^2 + \varepsilon^2 h$ ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$),
- sur $(]-2, -1[\cup]1, 2[) \times \Sigma$, la distance C^{10} entre g_ε la métrique g est petite.

La nouvelle variété riemannienne est notée M_ε. Par ailleurs on introduit la variété à singularités côniques $\bar{M}$ obtenue à partir de $M - \Sigma$ en rajoutant sur chaque bord un cône $\mathcal{C}_0^\pm$. On peut appliquer à $\bar{M}$ les résultats de Cheeger ([20] par exemple) et Lesche [46] dans ce domaine. Ce dernier a en particulier décrit les extensions autoadjointes de l'opérateur de type Dirac $D = d + d^*$. Dans le cas où $H^{n/2}(\Sigma, \mathbb{R}) = 0$, elles s'expriment en fonction des espaces propres des valeurs propres comprises dans l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ du *symbole de Mellin* de D. Dans notre cas l'existence de telles valeurs propres n'est possible qu'en degré $p = (n+1)/2$ et elle est liée à l'existence de valeurs propres dans $]0, 1[$ pour l'opérateur de Hodge Δ_Σ de la sous-variété Σ. L'extension de Friedrich du laplacien de Hodge de $\bar{M}$ s'écrit alors $D_{max} \circ D_{min}$. C'est l'unique extension autoadjointe du laplacien de Hodge de $\bar{M}$ en degré $p \neq (n+1)/2$.

Théorème 4.1 [13]. — *Supposons, dans le cas où n est pair, que le groupe de cohomologie $H^{n/2}(\Sigma) = 0$. Le spectre de l'opérateur de Hodge-de Rham agissant sur les p-formes de la variété M_ε converge,*

si p < (n+1)/2, *vers l'union du spectre de $D_{max} \circ D_{min}$ des p-formes de $\bar{M}$, le spectre du problème de Neumann sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^{p-1}(\Sigma)$ et le spectre du problème de Dirichlet sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^p(\Sigma)$,*

si p > (n+1)/2, *vers l'union du spectre de $D_{max} \circ D_{min}$ des p-formes de $\bar{M}$, le spectre du problème de Neumann sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^p(\Sigma)$ et le spectre du problème de Dirichlet sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^{p-1}(\Sigma)$,*

si p = (n+1)/2, *vers l'union du spectre de $D_{min} \circ D_{max}$ sur les p-formes de $\bar{M}$, le spectre du problème de Neumann sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^p(\Sigma)$ et le spectre du problème de Neumann sur les fonctions de l'intervalle $[0, L]$ avec multiplicité $\dim H^{p-1}(\Sigma)$.*

Remarquons qu'en degré $p = (n+1)/2$ la présence de l'anse fait sortir une autre extension autoadjointe que celle de Friedrich, à l'inverse de ce qui se passerait en l'absence d'anse, comme le montrent les travaux de MacDonald [48], Mazzeo [50] et Rowlett [55].

Il est intéressant de repérer dans ce contexte la multiplicité de 0. C'est à dire la présence de formes harmoniques ou de *petites valeurs propres* λ_ε telles que $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon =$

0. Cheeger a montré que sous l'hypothèse déja prise que $H^{n/2}(\Sigma) = 0$ si n est pair, les formes harmoniques L_2 de la variété conique $\bar{M}$ sont données par la cohomologie d'intersection $IH^p(\bar{M})$ qui se calcule par le principe de Mayer-Vietoris en sachant que la cohomologie des cônes est nulle en degré inférieur à $n/2$ et égale à $H^p(\Sigma)$ en degré supérieur. Il en résulte que, en notant $U_0 = M - (]-1,1[\times\Sigma)$, l'on a $H^q(U_0) = IH^q(\bar{M})$, pour $q \leq n/2$ et $IH^q(\bar{M}) = H^q_c(U_0)$ pour $q \geq 1 + n/2$.

Revenons à M, elle admet un recouvrement par deux ouverts U_0 et le collier $U =]-2,2[\times\Sigma$ homotope à Σ. Le principe de Mayer-Vietoris donne donc la suite exacte longue

$$\dots H^q_c(U) = H^{q-1}(\Sigma) \xrightarrow{j} H^q(M_\varepsilon) \xrightarrow{r} H^q(U_0) = IH^q(\bar{M}) \to H^{q+1}_c(U) \dots$$

On en déduit donc la

Proposition 4.1.1 *Pour $p < (n+1)/2$*

$$\dim H^q(M_\varepsilon) \leq \dim IH^q(\bar{M}) + \dim H^{q-1}(\Sigma)$$

et il y a des petites valeurs propres dès que j n'est pas injective ou r n'est pas surjective. En particulier pour $p = 0$ les trois espaces $IH^0(\bar{M})$, $H^0(U_0)$ et $H^0(M_\varepsilon)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}$ et il n'y a pas de petites valeurs propres.

Pour $p > (n+1)/2$ on a le même type de résultat en utilisant la suite exacte longue

$$\dots H^q_c(U_0) = IH^q(\bar{M}) \xrightarrow{j} H^q(M_\varepsilon) \xrightarrow{r} H^q(U) = H^q(\Sigma) \to H^{q+1}_c(U_0) \dots$$

Enfin pour $p = (n+1)/2$ on doit concidérer le diagramme plus compliqué suivant

$$\begin{tikzcd}
\dots H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_c^{\frac{n+1}{2}}(U_0) \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & H^{\frac{n+1}{2}}(M_\varepsilon) \arrow[r, "r"] & H^{\frac{n+1}{2}}(\Sigma) \arrow[r] & H_c^{\frac{n+3}{2}}(U_0) \dots \arrow[d, equal] \\
\dots H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma_- \cup \Sigma_+) \arrow[r, "\bar{\delta}"] & H_c^{\frac{n+1}{2}}(U_0) \arrow[r, two heads] & IH^{\frac{n+1}{2}}(\bar{M}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H_c^{\frac{n+3}{2}}(U_0) \dots
\end{tikzcd}$$

Ici $\iota(\omega) = (\omega, \omega) \in H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma_- \cup \Sigma_+) = \left(H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma)\right)^2$. On en conclut donc

Proposition 4.1.2 *Pour $p = (n+1)/2$ on a*

$$\begin{aligned}
\dim H^{\frac{n+1}{2}}(M_\varepsilon) &\leq \dim H^{\frac{n+1}{2}}(\Sigma) + \dim H_c^{\frac{n+1}{2}}(U_0) - \dim \mathit{Im}(\delta) \\
&\leq \dim H^{\frac{n+1}{2}}(\Sigma) + \dim IH^{\frac{n+1}{2}}(\bar{M}) + \dim \mathit{Im}(\bar{\delta}) - \dim \mathit{Im}(\delta)
\end{aligned}$$

et aussi $\dim \mathit{Im}(\bar{\delta}) - \dim \mathit{Im}(\delta) \leq \dim H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma)$.

L'égalité $\dim H^{\frac{n+1}{2}}(M_\varepsilon) = \dim H^{\frac{n+1}{2}}(\Sigma) + \dim H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma) + \dim IH^{\frac{n+1}{2}}(\overline{M})$ qui signifie l'absence de petites valeurs propres, a lieu si et seulement si r est surjective et $\dim \mathit{Im}(\bar{\delta}) = \dim Im(\delta) + \dim H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma)$, cette dernière propriété signifie que $\ker \bar{\delta} \subset \iota(H^{\frac{n-1}{2}}(\Sigma))$.

5 Calcul pseudo-différentiel

Je regroupe dans ce chapitre la présentation de travaux qui utilisent de façon fondamentale le calcul pseudo-différentiel.

5.1 L'opérateur 'Dirichlet-to-Neumann'

L'opérateur Dirichlet-to-Neumann $DN(\alpha)$ a été introduit par Leonid Friedlander dans [34] pour montrer une formule de décalage spectral entre les deux problèmes (Δ, D) et (Δ, N), laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann sur une variété à bord. Notons respectivement $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}(\alpha)$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(\alpha)$ leur fonction de comptage. L'opérateur $DN(\alpha)$, pour α qui n'appartient pas au spectre de (Δ, D), associe à une fonction $\phi \in H^1(\partial M)$ la dérivée normale de Φ solution de :

$$(\Delta - \alpha)\Phi = 0, \quad \Phi_{\partial M} = \phi.$$

Leonid Friedlander démontre que la différence $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}(\alpha) - \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(\alpha)$ est égale au nombre de valeurs propres négatives de $DN(\alpha)$, Rafe Mazzeo en avait déduit dans [49] un décalage spectral sur des domaines d'espaces symétriques en montrant que $DN(\alpha)$ avait des valeurs propres négatives sur ces espaces.

Dans [8] j'ai démontré le même type de résultats pour l'opérateur d'élasticité linéaire qui est un bon exemple d'opérateur vectoriel. Soit (M, g) une variété riemannienne à bord de dimension $m \geq 2$ et notons ∇ la dérivée covariante de Levi-Civita.

Si X est un champ de vecteur fixé sur M,alors $Y \mapsto \nabla_Y X$ est une section du fibré $\mathrm{End}(TM)$. Notons SX sa partie symétrique :

$$SX = \nabla X + (\nabla X)^t \quad .$$

En identifiant $T^*M \otimes T^*M$ et $\mathrm{End}(TM)$ grâce à la métrique, on trouve $SX = \mathcal{L}_X(g)$, la dérivée de Lie de la métrique.

L'opérateur d'élasticité L de fonctions de Lamé λ, μ qui sont supposées lisses et positives, est l'opérateur obtenu par polarisation de la forme quadratique

$$\mathcal{A}(X, X) = \int_M \Big(\lambda \operatorname{div}(X)^2 + \frac{\mu}{2}\,(SX, SX)_g\Big)$$

définie sur des champs de vecteurs. La formule de polarisation, définit deux conditions au bord naturelles pour L, en écrivant

$$\mathcal{A}(X, Y) = \int_M \Big(LX, Y\Big)_g + \int_{\partial M} \Big(BX, Y\Big)_g$$

on obtient $LX = -\Big(\mathrm{d}(\lambda \operatorname{div}(X))\Big)^\sharp + \nabla^*(\mu\, SX)$ et l'opérateur de bord (en notant $\vec{n}_e$ la normale extérieure au bord)

$$BX = \lambda \operatorname{div}(X)\vec{n}_e + \mu\, SX(\vec{n}_e).$$

Nous appellerons condition de Dirichlet, problème noté $(L, 0)$, la condition $X = 0$ au bord et condition de Neumann, problème noté (L, B), la condition $BX = 0$

Théorème 5.1 [8]. — *Les deux problèmes $(L, 0)$ et (L, B) sont elliptiques au sens des conditions de Lopatinski, à résolvante compacte, et de spectre positif (non nul). L'opérateur Dirichlet-to-Neumann correspondant, $DN(\alpha)$ est un opérateur pseudo-différentiel de degré 1 qui n'a qu'un nombre fini de valeurs propres négatives, égal à la différence $N(L, B)(\alpha) - N(L, 0)(\alpha)$ des fonctions de comptage des deux problèmes (on compte le nombre de valeur propre de chaque opérateur dans l'intervalle $]-\infty, \alpha[$).*

Théorème 5.2 [8]. — *Si M est un domaine borné d'un espace symmétrique de type non compact, de dimension m et si λ, μ sont des fonctions de Lamé constantes dans les deux cas suivants*

(a) le rang de l'espace symétrique est au moins 2

(b) le rang est 1 et la dimension de la partie nilpotente est au plus $\frac{8\mu}{\lambda+2\mu}$

on a pour tout $\alpha \geq 0$:

$$N(\alpha, L, B) - N(\alpha, L, 0) \geq 1.$$

On montre ce dernier résultat en exhibant un champ de vecteur X qui satisfait $(L - \alpha)X = 0$ et $\int_{\partial M}(BX, X)_g = 0$. On utilise pour cela la géométrie particulière de M.

5.2 Spectre joint et périodicité du flot

Soient k opérateurs pseudodifférentiels h-admissibles $Q_1(h), ..., Q_k(h)$ qui commutent. La notion d'opérateur pseudodifférentiel h-admissible a été introduite par Helffer et Robert (voir [37], [38] et [54]). Elle signifie que les $Q_j(h)$ sont les quantifiés de Weyl de symboles qui admettent un développement en h de termes dans la bonne classe. Pour définir cette classe il faut d'abord une fonction poids : $p \in C(T^*\mathbb{R}^n)$ qui vérifie pour des constantes $C > 0$ et $m > 0$

$$\forall (x, \xi), (x', \xi') \in T^*\mathbb{R}^n \ p(x, \xi) \ \leq \ C \ p(x', \xi') \ (1 + |x - x'|^2 + |\xi - \xi'|^2)^m \quad .$$

On peut alors définir la *classe de symboles* S_p comme l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ vérifiant

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \ \leq \ C_{\alpha,\beta} \ p(x, \xi) \quad \forall (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n.$$

Par la *quantification de Weyl* on peut associer à un tel symbole a un opérateur h-pseudodifferentiel $\mathcal{A}(h) = Op_h^w(a)$ agissant sur les fonctions $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de l'espace de Schwartz des fonctions lisses à décroissance rapide à l'infini par la formule :

$$\mathcal{A}(h)\psi(x) \ = \ (2\pi h)^{-n} \int \int e^{ih^{-1}\langle x-y, \xi\rangle} \, a(\frac{x+y}{2}, \xi) \, \psi(y) \, dy \, d\xi \ .$$

Un opérateur h-admissible correspond alors à un symbole qui a la dépendance suivante en h : il existe une suite $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in S_p$ telle que

$$a(h,x,\xi) \;\sim\; \sum_{i\geq 0} h^i a_i(x,\xi)$$

où ici $\sim$ signifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$ les symboles

$$r_{N+1} = h^{-(N+1)} \;\big(\; a(h,x,\xi) \;-\; \sum_{i=0}^{N} h^i a_i(x,\xi) \;\big)$$

définissent une famille $\mathcal{R}_{N+1}(h) = Op_h^w(r_{N+1}),\ h \in]0,h_0]$ *bornée* (en h) d'opérateurs bornés dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

On a donc $Q_j(h) \in \mathcal{L}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big)$ et $Q_j(h) = Op_h^w(q_j)$ et les q_j s'écrivent

$$q_j(h,x,\xi) \;\sim\; \sum_{i\geq 0} h^i q_{ij}(x,\xi).$$

avec $\{q_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}} \in S_p$.

On suppose de plus que chaque $Q_j(h)$ admet une *extension autoadjointe* à $L^2(\mathbb{R}^n)$. C'est le cas si le symbole principal q_{0j} est lui-même une fonction poids et si pour tout i : $q_{ij} \in S_{q_{0j}}$, et plus généralement si q_{0j} est minoré [54].

Par le calcul fonctionnel, nous pouvons nous ramener à ce cas si le poids est $p = \|q_0\|^2 + 1$, et si l'opérateur $\sum_{j=1}^k {Q_j}^2(h)$ est h-admissible : soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x$ pour $x \in [0,c]$, (avec $0 < c < 1$) f est croissante et f tend vers 1 à l'infini. Alors $g(x) = f(x)/x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, égale à 1 sur l'intervalle $[0,c]$. Alors les opérateurs pseudodifferentiels définis vectoriellement par

$$P(h) = g(\|Q(h) - E_0\|)(Q(h) - E_0)$$

sont h-admissibles (les opérateurs $g(\|Q(h) - E_0\|)$ sont bornés) leurs symboles sont bornés, donc chaque symbole principal est un poids minoré. De plus les $P_j(h)$ commutent si les $Q_j(h)$ avaient cette propriété ; enfin sur le domaine $\{(x,\xi), \|q(h)(x,\xi) - E_0\| \leq c\}$ on a $p(h) = q(h) - E_0$, donc $p(h)$ est propre si $q(h)$ l'est.

L'hypothèse de commutativité des opérateurs entraîne pour les symboles principaux la relation $\{q_{0i}, q_{0j}\} = 0$, et les flots symplectiques associés Φ_j^t aussi commutent.

Rappelons la définition de Φ_j^t : l'espace cotangent $T^*\mathbb{R}^n$ ω a une structure symplectique canonique $\omega = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ et les champs hamiltonniens H_j des symboles q_{0j} sont définis par :

$$dq_{0j} \;= -H_j \;\lrcorner\; \omega$$

les Φ_j^t sont alors des transformations symplectiques solutions de :

$$\Phi_j^0 = Id \;;\; \frac{\partial}{\partial t}\Phi_j^t = H_j \circ \Phi_j^t.$$

Le but de nos travaux avec Anne-Marie Charbonnel était d'étudier les propriétés spectrales conjointes des opérateurs Q_j dans un voisinage de la valeur d'énergie $E_0 \in \mathbb{R}^k$ lorsque l'on fait l'hypothèse suivante qui assure que le spectre joint (notion définie par Anne-Marie Charbonnel dans [17], voir aussi [64]) est discret :

(H_1) *E_0 est une valeur régulière de q_0 et q_0 est propre dans un voisinage de E_0 : il existe un voisinage compact K_1 de E_0 dans $\mathbb{R}^k$ tel que $q_0^{-1}(K_1)$ est compact.*

Par l'hypothèse de commutation, le flot joint définit une action ρ_E de $\mathbb{R}^k$ sur le niveau d'énergie $\Sigma_E = {q_0}^{-1}(E)$ pour E voisin de E_0 :

$$\begin{array}{rrcl} \rho_E : & \mathbb{R}^k \times \Sigma_E & \to & \Sigma_E \\ & ((t_1, \dots, t_k), \nu) & \mapsto & \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_k^{t_k}(\nu). \end{array}$$

Nous avons pu localiser le spectre joint en supposant que cette action était périodique de période constante sur *un* niveau d'énergie $\Sigma_0 = \Sigma_{E_0}$. Précisons cette hypothèse :

(H_2) *Tout les points de $\Sigma_0 = q_0^{-1}(E_0)$ sont périodiques sous l'action de $\rho_0 = \rho_{E_0}$ avec le même réseau des périodes.*

Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de ce réseau ; c'est une base de $\mathbb{R}^k$ vérifiant pour tout $\nu \in \Sigma_0$ et tout $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$:

$$\rho_0\ \big(2\pi \sum_{j=1,\dots,k} z_j e_j\ ,\ \nu\big)\ =\ \nu.$$

Voici le résultat que nous avons obtenu :

Théorème 5.3 [12]. — *Soient $Q_j(h) = Op_h^w(q_j)$, $1 \le j \le k$ k opérateurs pseudodifferentiels h-admissibles auto-adjoints et qui commutent entre eux. Supposons qu'ils vérifient les conditions suivantes :*
(H_1) le symbole principal joint q_0 est propre dans un voisinage de la valeur régulière E_0,
(H_2) son flot classique est périodique de périodes constantes sur le niveau d'énergie $\Sigma_0 = q_0^{-1}(E_0)$,
(H_3) le symbole sous principal q_1 est nulle,
(H_4) la surface Σ_0 est connexe.

Alors la partie du spectre joint des opérateurs $\Lambda^{Q(h)}$ contenue dans un k-cube $\prod_{j=1}^{k}]E_{0j} - hc_j\ ,\ E_{0j} + hc_j[$ centré en E_0 est discret et localisé modulo $O(h^2)$ sur un réseau de la forme

$$E_0\ +\ \mathbf{a}^{-1}\Big((-\frac{1}{4}\mu_1 h - \frac{\alpha_1}{2\pi} + \mathbb{Z}h) \oplus \dots \oplus (-\frac{1}{4}\mu_k h - \frac{\alpha_k}{2\pi} + \mathbb{Z}h)\Big),$$

où μ_j est l'indice de Maslov des cycles de base du tore agissant sur Σ_0, α_j sont les actions de ces cycles et $\mathbf{a} \in Gl(k)$.

Ce résultat est une amélioration de celui de [17] où l'hypothèse de périodicité à périodes constantes du flot était faite sur tout un voisinage de l'énergie. Plus précisément il était supposé l'existence d'une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ telle que le symbole principal des opérateurs $f\big(Q(h)\big)$ ait un flot périodique à périodes constantes sur tout un voisinage de l'énergie.

Dans notre cas, si $(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$, soit $\mathbf{a} \in End(\mathbb{R}^k)$ définie par $e_j = \mathbf{a}(\varepsilon_j)$; le flot hamiltonien du symbole $p_0 = \mathbf{a}(q_0)$ est périodique à périodes constantes sur le niveau d'énergie $F = \mathbf{a}(E_0)$, et donc les opérateurs $P(h) = \mathbf{a}\big(Q(h)\big)$ satisfont l'équivalent ponctuel de l'hypothèse de [17].

L' hypothèse (H_3) peut être affaiblie en

(H_3') *L'intégrale du symbole sous principal q_1 sur les cycles de base du flot hamiltonien est independante du point pris sur Σ_0.*

voir le théorème 2, section 2.6. de [12].

Enfin si l'hypothèse (H_4) n'est pas vérifiée, chaque composante connexe donne une partie du spectre discret.

La démonstration se fait de la façon suivante. On travaille avec les opérateurs $P(h) = \mathbf{a}\big(Q(h)\big)$ pour lesquels chaque composante p_{0j} du symbole principal a son flot hamiltonien 2π-periodique sur la surface d'énergie. On remarque que l'indice de Maslov μ_j des trajectoires 2π-periodiques du flot est constant sur Σ_0 comme invariant d'homotopie, et d'après l'hypothèse de connexité ; il en est de même des actions α_j. Notons μ, respectivement α le k-vecteur defini par l'indice de Maslov, respectivement l'action,sur les cycles de base.

Afin de localiser les valeurs porpres de $P(h)$ contenues dans le k-cube $\Pi_{j=1}^k]F_j - ch, F_j + ch[$ modulo $O(h^2)$ on regarde $\zeta(\frac{P(h)-F}{h})\ \theta(P(h))$, pour des fonctions $\hat{\zeta}$ et θ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ avec $\theta(\lambda) = 1$ pour λ dans un petit voisinage de F, que l'on compare à $\zeta(\frac{P(h)-F}{h}) \exp -\frac{i}{h} < T, P(h) >\ \theta(P(h))$ pour $T \in 2\pi\mathbb{Z}^k$, le réseau des périodes.

Ces opérateurs sont approchés par des opérateurs intégraux de Fourier. On voit alors qu'ils ont même variété Lagrangienne et que leurs symboles principaux diffèrent d'un scalaire qui contient les indices de Maslov et les actions des trajectoires fermées. On en conclut que la norme L^2 de la différence de $\zeta(\frac{P(h)-F}{h})\ \theta(P)$, et de l'opérateur $\zeta(\frac{P(h)-F}{h}) \exp -\frac{i}{h}(< T, P(h) > +\alpha + \frac{\pi}{2}\mu h)\ \theta(P)$, est en $O(h)$.

Cette méthode qui consiste, pour obtenir des renseignements spectraux, à interpréter l'opérateur d'évolution $e^{-ih^{-1}<t,P(h)>}$ en termes d'opérateurs intégraux de Fourier a été initiée par Duistermaat-Guillemin [33] et Colin de Verdière [26] pour les variétés compactes, et par Helffer et Robert [39] dans le cas semi-classique. Ces derniers ont en particulier démontré, pour un opérateur, un résultat de localisation qu'ensuite Anne-Marie Charbonnel a élargi au cas de plusieurs opérateurs qui commutent. Par la suite Sandrine Dozias [31] a affaibli l'hypothèse de [39] pour un seul opérateur.

L'idée de regarder plusieurs opérateurs qui commutent est naturelle en physique où on cherche, pour réduire le problème, des invariants. L'exemple le plus simple est l'opérateur de Schrödinger en présence de symétries. Prenons

$$A_1(h) \; = \; -h^2\Delta \; + \; V(x) \; ,$$

et supposons le potentiel lisse à valeurs réelles et symétrie sphérique. Alors $A_1(h)$ commute avec le moment cinétique

$$A_2(h) \; = \; -ih \; (x_2\partial_{x_3} \; - \; x_3\partial_{x_2}).$$

Les états bornés de $A_1(h)$ sont des fonctions propres communes à $A_1(h)$ et $A_2(h)$, et si on considère un troisième opérateur

$$A_3(h) \; = \; -h^2 \; \{(x_2\partial_{x_3} \; - \; x_3\partial_{x_2})^2 \; + \; (x_3\partial_{x_1} \; - \; x_1\partial_{x_3})^2 \; + \; (x_1\partial_{x_2} \; - \; x_2\partial_{x_1})^2 \; \}$$

qui commutent avec les deux autres, le spectre joint consiste en des 3-uplets de valeurs propres

$$\lambda(h) \; = \; (\lambda_1(h), \lambda_2(h), \lambda_3(h)) \in \mathbb{R}^3$$

de multiplicité 1, on dit alors que les états bornés sont complètement séparés.

Cet exemple est *intégrable* (le nombre d'opérateurs égale la dimension) et par le théorème de Liouville, le flot hamiltonien est périodique. Dans [18] Anne-Marie Charbonnel a explicité le flot pour l'oscillateur harmonique. Mais avec un potentiel comme $V(x,y) = (1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$ avec $x \in \mathbb{R}^k$ et $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ on obtient des systèmes avec moins de symétries et qui ne sont plus intégrables. On trouve d'autres exemples de systèmes intégrables, inspirés du cas classique, sur des variétés dans les travaux de J.A. Toth [59] et [60].

Pour les systèmes intégrables sont aussi définies des *formes normales*, l'existence de tores invariants permet d'identifier le symbole joint q_0 à une application moment. Pour les valeurs régulières de cette application moment, Colin de Verdière a montré dans [27] que au niveau semi-global la famille des opérateurs étaient conjuguées à $(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$, ce qui peut être vu comme une version quantique du théorème de Darboux.. San Vũ Ngoc, en particulier dans [61] et [62], étudie certains types de singularités et donne les formes normales correspondantes ce qui permet de déterminer l'unicité microlocale des solutions. Aussi Nicolas Roy étudie, dans [56] et [57], les perturbations de l'Hamiltonnien quantique *intégrables*, dans l'esprit d'un théorème KAM.

Dans le cadre du problème précédent de k opérateurs, une question équivalente est la perturbation du symbole pour obtenir une forme *canonique*. Cette démarche avait été appliquée par Sandrine Dozias dans [31] pour l'étude d'un opérateur. Je voudrais signaler dans cette même veine un résultat qui se trouve dans [11]. L'idée était de construire à partir d'un système dont le flot classique est périodique sur une surface d'énergie, une perturbation dont le flot serait périodique sur un voisinage de la surface d'énergie.

Soit donc $p_0 = (p_{01}, \dots, p_{0k})$ une application symbole telle que les flots hamiltoniens Ψ_j soient 2π-periodiques sur la surface d'énergie $\Sigma_0 = p_0^{-1}(E_0)$, alors il existe une autre application $p = (p_1, \dots, p_k)$ qui coïncide avec p_0 sur Σ_0 à l'ordre 2 et dont le flot hamiltonien est 'périodique de période constante sur une bande.'

La démonstration utilise le *lemme de Weinstein* [63]. En effet par hypothèse le flot hamiltonnien définit une action libre du tore $\mathbb{T}^k$ sur Σ_0. Soit donc $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ une 1-forme de connexion du fibré principal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^k & \to & \Sigma_0 \\ & & \downarrow \\ & & \Sigma_0/\mathbb{T}^k \end{array}$$

Cette 1-forme peut être définie sur $T\mathbb{R}^{2n}{}_{|\Sigma_0}$ en la prolongeant par 0 sur l'orthogonal de $T\Sigma_0$, et il existe des champs de vecteur $X_1, \ldots, X_k$ sur Σ_0 qui vérifient $\omega(X_i, X_j) = 0$ et $\alpha_j = X_j \lrcorner\, \omega$, (quitte à modifier α sur l'orthogonal de $T\Sigma_0$). Soit maintenant Exp l'application 'exponentielle normale' :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[^k & \xrightarrow{\mathrm{Exp}} & \mathbb{R}^{2n} \\ (\nu, u) & \longmapsto & \exp_\nu(\sum_{j=1}^k u_j X_j(\nu)) \end{array}$$

où $\exp$ est l'application exponentielle liée à la structure riemanniennne de $\mathbb{R}^{2n}$. Et soient $\Pi : \Sigma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[^k \to \Sigma_0$ la projection sur le premier facteur et $i : \Sigma_0 \to \mathbb{R}^{2n}$ l'injection canonique. La proposition 2.2 de [10] dit que la forme

$$\omega_1 = \Pi^*(i^*\omega) + \sum_{j=1}^k u_j d(\Pi^*\alpha_j) + \sum_{j=1}^k du_j \wedge (\Pi^*\alpha_j)$$

définit, pour ε assez petit, une forme symplectique sur $\Sigma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[^k$ qui coïncide avec $\mathrm{Exp}^*\omega$ sur Σ_0.

D'après le lemme de Weinstein il existe donc un difféomorphisme Ψ de $\Sigma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[^k$ tel que

$$\Psi^*\omega_1 = \mathrm{Exp}^*(\omega) \quad \text{et} \quad \forall \nu \in \Sigma_0 \quad \Psi(\nu) = \nu,\ \mathrm{d}_\nu \Psi = \mathrm{Id}.$$

On a donc pu redresser la structure symplectique. Soit maintenant $\tilde{p}$ l'application définie sur $\Sigma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[^k$ par

$$\tilde{p}(\nu, u) = u + E_0$$

alors $p = \tilde{p} \circ \Psi \circ \mathrm{Exp}^{-1}$ convient.

Mais la quantification pose ici un problème. Si ceci est possible au niveau classique, les hamiltonniens quantiques construits à partir des perturbations n'ont aucune raison de commuter ! Il reste donc à faire une théorie semi-classique d'opérateurs qui commutent presque.

5.3 Le fibré de Maslov

Ces derniers résultats utilisent de façon cruciale les propriétés de L'indice de Maslov d'une sous-variété Lagrangienne d'un cotengeant T^*X : le symbole principal d'un opérateur intégral de Fourier est une section du fibré de Maslov de la Lagrangienne, fibré plat construit grâce à l'indice de Maslov. Dans [14] Vladimir Arnol'd a donné une définition très géométrique de l'indice de Maslov pour les lagrangiennes de $T^*\mathbb{R}^n$. La théorie des Opérateurs Intégraux de Fourier existe sur les variétés, j'ai donc essayé de donner une définition de l'indice de Maslov dans ce cadre, inspirée de celle d'Arnol'd. Ce travail est présenté dans [9] où je montre que la définition qu'utilise Hörmander dans [40] coïncide avec celle définie ci-dessous. Rappelons d'abord la définition d'Arnol'd.

L'espace $T^*\mathbb{R}^n$ est muni de sa forme symplectique standard

$$\omega = \sum_{j=1}^{j=n} d\xi_j \wedge dx_j.$$

Notons $\mathbb{L}(n)$ la variété Grassmannienne des sous-espaces Lagrangiens de $T^*\mathbb{R}^n$; on fait l'identification $\mathbb{L}(n) = U(n)/O(n)$. L'application Det^2 est bien définie sur $\mathbb{L}(n)$. Il est montré dans [14] que tout chemin $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{L}(n)$ tel que $Det^2 \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ engendre $\Pi_1(\mathbb{S}^1)$ donne un générateur de $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. En conséquence $\Pi_1(\mathbb{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$ et le cocycle μ_0 défini par

$$\forall \gamma \in \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \quad \mu_0(\gamma) = \text{Degré } (Det^2 \circ \gamma)$$

engendre le groupe $H^1(\mathbb{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$. On peut définir un *fibré de Maslov* $\mathbb{M}(n)$ sur $\mathbb{L}(n)$ par la représentation $\exp(i\frac{\pi}{2}\mu_0) = i^{\mu_0}$ de $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. Ce fibré est un fibré de torsion car $\mathbb{M}(n)^{\otimes 4}$ est trivial.

Maintenant le fibré de Maslov de la sous-variété Lagrangienne $\mathcal{L}$ de $T^*\mathbb{R}^n$ est le tiré en arrière de $\mathbb{M}(n)$ par l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : \mathcal{L} & \to & \mathbb{L}(n) \\ \nu & \mapsto & T_\nu \mathcal{L}. \end{array}$$

Arnol'd montre précisément que $\mu = {\varphi_n}^* \mu_0$ est l'indice de Maslov de $\mathcal{L}$. On peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \mu : \Pi_1(\mathcal{L}) & \to & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \mapsto & < \mu_0, \varphi_n \circ \gamma > = \text{Degré } (Det^2 \circ \varphi_n \circ \gamma). \end{array} \tag{5.3.1}$$

Il faut faire attention au groupe structural de ce fibré. Comme $U(1)-$fibré il est toujours trivial. Mais nous le considérons comme $\mathbb{Z}_4 = \{1, i, -1, -i\}$-fibré. En fait nous voyons, en utilisant l'expression du cocycle de Maslov σ_{jk} donné par [40] (3.2.15) que le fibré de Maslov a des classes de Chern triviales mais σ_{jk} ne peut pas en général s'écrire comme le co-bord d'une co-chaîne *constante*.

Plaçons nous maintenant sur une variété lisse X. On peut construire au-dessus de la sous-variété Lagrangienne $\mathcal{L}$ de T^*X (et en fait au-dessus de T^*X) le fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(n) & \xrightarrow{i} & \mathbb{L}(\mathcal{L}) \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & \mathcal{L} \end{array}$$

des sous-espaces Lagrangiens de $T_\nu(T^*X), \nu \in \mathcal{L}$. Ce fibré a deux sections évidentes :

$$\lambda(\nu) = T_\nu(\mathcal{L}),\ \lambda_0(\nu) = \mathsf{vert}(T_\nu(T^*X))$$

le tangent à $\mathcal{L}$ et le tangent à la verticale $T^*_{\pi_0(\nu)}X$. Mais un fibré donne une suite exacte de groupes d'homotopie, ici :

$$...\Pi_2(\mathcal{L}) \to \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \stackrel{i_*}{\to} \Pi_1(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \stackrel{\pi_*}{\to} \Pi_1(\mathcal{L}) \to \Pi_0(\mathbb{L}(n)) = 0.$$

Notre fibré ayant une section (et même deux) les flèches $\Pi_k(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \stackrel{\pi_*}{\to} \Pi_k(\mathcal{L})$ sont surjectives et donc les flèches $\Pi_{k+1}(\mathcal{L}) \to \Pi_k(\mathbb{L}(n))$ sont nulles ; la suite exacte se scinde et on a en particulier la suite exacte courte

$$0 \to \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \stackrel{i_*}{\to} \Pi_1(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \stackrel{\pi_*}{\to} \Pi_1(\mathcal{L}) \to 0.$$

Prenons un point base $\nu_0 \in \mathcal{L}$ et fixons un chemin σ qui relie $\lambda(\nu_0)$ à $\lambda_0(\nu_0)$ en restant dans la fibre $\mathbb{L}(\mathcal{L})_{\nu_0}$. Pour $\gamma \in \Pi_1(\mathcal{L})$ on note ${\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma)$ le produit amalgamé de σ, $\lambda_{0*}\gamma$ puis σ^{-1}. (On prend ici les conventions d'écriture de [44])

Alors $\forall\gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}),\ \pi_*\Big(\lambda_*\gamma * ({\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1}))\Big) = 0$ et donc $\lambda_*\gamma * ({\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1}))$ vit dans $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. Prenons donc la

Définition 5.3.1 . — *L'indice de Maslov de $\mathcal{L}$ est l'application μ :*

$$\forall\gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}),\ \mu(\gamma) = \mu_0\Big(\lambda_*\gamma * {\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1})\Big).$$

Proposition 5.3.1 . — *Cette définition ne dépend pas du chemin σ choisi pour relier $\lambda(\nu_0)$ à $\lambda_0(\nu_0)$; de plus μ est un morphisme de groupe et donc $\mu \in H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z})$.*

Remarquons tout de suite que si $X = \mathbb{R}^n$ le fibré $\mathbb{L}(\mathcal{L})$ se trivialise de sorte que la section λ_0 est constante et cette définition coïncide avec celle de [14]. Cette proposition nous permet de prendre la définition suivante :

Définition 5.3.2 . — *Le fibré de Maslov $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est défini, comme précédemment, par la représentation $\exp(i\frac{\pi}{2}\mu) = i^\mu$ de $\Pi_1(\mathcal{L})$ dans $\mathbb{C}$.*

Les sections de ce fibré s'identifient donc à des fonctions f à valeurs complexes sur le revêtement universel de $\mathcal{L}$ satisfaisant la relation d'équivariance :

$$\forall\gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}), \quad f(x.\gamma) = i^{-\mu(\gamma)}f(x),$$

comme dans [12] formule (2.19).

Théorème 5.4 . — *Les sections du fibré de Maslov d'une Lagrangienne (homogène) donné par la définition 5.3.2 vérifient les propriétés de recollement de Hörmander, c'est à dire que notre définition coïncide avec celle de Hörmander.*

Références

[1] C. ANNÉ. — Spectre du Laplacien et écrasement d'anses, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser.* **20** (1987), 271-280.

[2] C. ANNÉ. — Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité. *Commun. Partial Differ. Equations* **15** n° 11 (1990), 1617-1630.

[3] C. ANNÉ & B. COLBOIS. — Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules, *J. Funct. Anal.* **115** n° 1 (1993), 190-211.

[4] C. ANNÉ. — Laplaciens en interaction, *Manuscr. Math.* **83** n° 1 (1994), 59-74.

[5] C. ANNÉ & B. COLBOIS. — Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses, *Math. Ann.* **303** n° 3, (1995) 545-573.

[6] C. ANNÉ. — A note on the generalized Dumbbell problem, *Proc. Am. Math. Soc.* **123** n° 8 (1995), 2595-2599.

[7] C. ANNÉ. — Principe de Dirichlet pour les formes différentielles, *Bull. Soc. Math. Fr.* **117** n° 4 (1989), 445-450.

[8] C. ANNÉ. — A shift between Dirichlet and Neumann spectrum for generalized linear elasticity, *Asymptotic Anal.* **19** n° 3-4 (1999), 297-316.

[9] C. ANNÉ. — A topological definition of the Maslov bundle, *Cubo journal* **8** n° 1 (2006), p 1-15, & Une définition topologique du fibré de Maslov, Août 2003, *prépublications de Nantes* n° 2003-09-01.

[10] C. ANNÉ & A-M. CHARBONNEL. — Localisation of the joint spectrum of several commuting h-pseudodifferential operators with a periodic flow on a given energy level, *prépublication* (1999).

[11] C. ANNÉ & A-M. CHARBONNEL. — Perturbation of several commuting h-pseudodifferential operators *prépublication* (2006).

[12] C. ANNÉ & A-M. CHARBONNEL. — Bohr-Sommerfeld conditions for several commuting Hamiltonnians, *Cubo journal* **6** n° 2 (2004),15-34.

[13] C. ANNÉ, G. CARRON & O. POST. — Gaps in the spectrum of Dirac type operators on non-compact manifolds, *prépublication* (2007).

[14] V.I. ARNOL'D. — Characteristic Class entering in Quantization Conditions, *Funct. Anal. and its Appl.* **1** (1967), 1-14.

[15] G. BESSON. — Sur la multiplicité de la premiere valeur propre des surfaces riemanniennes, *Ann. Inst. Fourier* **30** n° 1 (1980), 109-128.

[16] I. CHAVEL & E. A. FELDMAN. — Spectra of domains in compact manifolds, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 198–222.

[17] A.-M. CHARBONNEL. — Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, *Asymptotic analysis* (1988), 227-261.

[18] A.-M. CHARBONNEL. — Localisation et développement asymptotique des éléments du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifferentiels qui commutent, *Int. Eq. and Op. Theory* **9** (1986), 502-536.

[19] J. CHEEGER. — A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, *in* Problems in Analysis, a symposium in honour of S. Bochner, *Princeton Uni. Press* (1970), 195-199.

[20] J. CHEEGER. — On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. *in* Geometry of the Laplace operator, Honolulu/Hawai 1979, *Proc. Symp. Pure Math., Vol.* **36** (1980) 91-146.

[21] S. Y. CHENG. — Eigenfunctions and nodal sets, *Comment. Math. Helv.* **51** (1976), 43-55.

[22] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien, *Comment. Math. Helv.* **61** (1986), 254-270.

[23] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV.* Sér.**20** (1987), 599-615.

[24] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold, *Comment. Math. Helv.* **63**n° 2 (1988), 184-193.

[25] B. COLBOIS, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante, *Comment. Math. Helv.* **63**n° 2(1988), 194-208.

[26] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques, *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), 508-522.

[27] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. I *Duke Math. J.* **46** (1979), 169-182.

[28] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. II *Math. Z.* **171** (1980), 51-73.

[29] Y. COLIN DE VERDIÈRE & S. VŨ NGỌC. — Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **36** n° 1 (2003), 1–55.

[30] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND. — Spectral asymptotics in the semi-classical limit, *London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge* **268** (1999).

[31] S. DOZIAS. — Opérateurs h-pseudo-différentiels à flot périodique et asymptotique semi-classique. [Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, 1994] , *et* Clustering for the spectrum of h-pseudodifferential operators with periodic flow on an energy surface, *J. Funct. Anal.* **145** (1997), 296-311.

[32] J. DUISTERMAAT. — Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), 207-281.

[33] J. DUISTERMAAT,V. GUILLEMIN. — The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, *Invent. Math.* **29** (1975), 39-79.

[34] L. FRIEDLANDER. — Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues, *Arch. Rational Mech. Anal.* **116**n° 2 (1991), 153–160.

[35] P. B. GILKEY. — Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem, *Studies in Advanced Mathematics. CRC Press* (1995).

[36] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG. — Geometric Asymptotics *Math. Surveys and Monograph n° 14, AMS* (1990).

[37] B. Helffer, D.Robert. — Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques, *Ann. Inst. Fourier* **XXXI** (1981), 169-223.

[38] B. Helffer, D.Robert. — Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, *J. Funct. Anal.* **53** (1983), 246-268.

[39] B. Helffer, D.Robert. — Puits de potentiel généralisés et asymptotiques semi-classiques, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section Phys. Th.* **41** (1984), 294-331.

[40] L. Hörmander. — Fourier Integral operators, *Acta Math.* **127** (1971), 79-183.

[41] L. Hörmander. — The Weyl calculus of pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 359-443.

[42] L. Hörmander. — The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, *Springer, Berlin - Heidelberg - New York*, 1985.

[43] L. Hörmander. — The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV, *Springer, Berlin - Heidelberg - New York*, 1985.

[44] D. Husemoller. — Fibre Bundles, *Springer, Berlin - Heidelberg - New York*, 1975.

[45] S. Jimbo & Y. Morita. — Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singular perturbed domain with several thin channels, *Commun. in Partial Differential Equations* **17** n° 3 & 4 (1992), 523–552.

[46] M. Lesch. — Operators of Fuchs type, conical singularitites, and asymptotic methods. *Teubner-Texte zur Mathematik* **136**, Stuttgart (1997).

[47] J.K. Mac Gowan. — The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds, *Math. Ann.* **279** (1993), 725–745.

[48] P. McDonald. — The Laplacian for spaces with cone-like singularities, *Thesis, MIT* (1990).

[49] R. Mazzeo. — Remarks on a paper of Friedlander concerning inequalities between Neumann and Dirichlet eigenvalues, *Inter. Maths. Research Notices* **4** (1991), 41–48.

[50] R. Mazzeo. — Resolution blowups, spectral convergence and quasi-asymptotically conical spaces, *Actes Colloque EDP Evian-les-Bains*, (2006).

[51] N. S. Nadirashvili. — Multiple eigenvalues of the Laplace operator, *Math. USSR, Sb.* **61** n° 1 (1988), 225–238.

[52] M. Hoffmann-Ostenhof,T. Hoffmann-Ostenhof, N. S. Nadirashvili. On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces, *Ann. Global Anal. Geom.* **17**n° 1 (1999), 43–48.

[53] O. Post. — Periodic manifolds with spectral gaps, *J. Differ. Equations* **187** (2003), 23–45.

[54] D. Robert. — Autour de l'approximation semi-classique. *Birkhaüser* (1987).

[55] J. Rowlett,. — Spectral geometry and asymptotically conic convergence, *Thesis, Stanford* (2006).

[56] N. Roy. — Regular deformations of completely integrable systems, *J. Symplectic Geom.* **3** (2005), n° 1, 1–16.

[57] N. Roy. — The geometry of nondegeneracy conditions in completely integrable systems, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **14** (2005), n° 4, 705–719.

[58] B. Sévennec. — Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces, *Math. Ann.* **324**n° 1 (2002), 195–211.

[59] J. A. Toth. — Various quantum mechanical aspects of quadratic forms. *J. Funct. Analysis* **130** (1995), 1-42.

[60] J. A. Toth. — On the quantum expected values of integrable metric forms. *J. Diff. Geometry* **52** (1999), 327-374.

[61] S. Vũ Ngọc. — Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus typ, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** n° 2 (2000), 143–217.

[62] S. Vũ Ngọc. — Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment, *Asymptot. Anal.* **24** n° 3-4 (2000), 319–342.

[63] A. Weinstein. — Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds.*Advances in Mathematics* **6** (1971), 329-346.

[64] D. Zoma. — Spectre conjoint pour des opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, *Thèse de troisième cycle, Nantes, Séminaire 1983-84.*