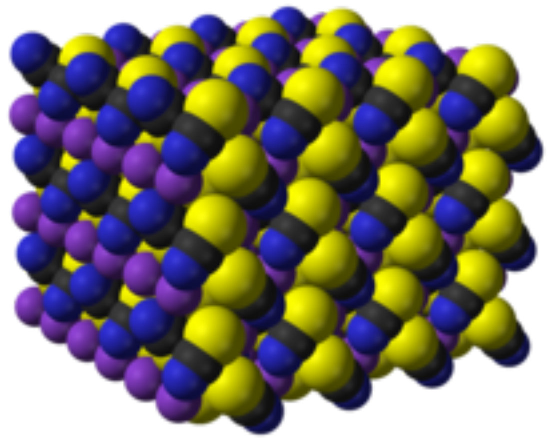
Cristaux et quasi-cristaux

Colette Anné
Laboratoire de mathématiques Jean Leray

cristal de sulfate de cuivre hydraté

La matière solide est considérée comme un empilement d'atomes



thiocyanate de potassium

Si cet empilement est ordonné on a un cristal.

Depuis la découverte des rayons X (1912), on peut distinguer les solides anisotropes comme ceux dont l'image de la diffraction par rayons X dépend de l'angle d'éclairage.

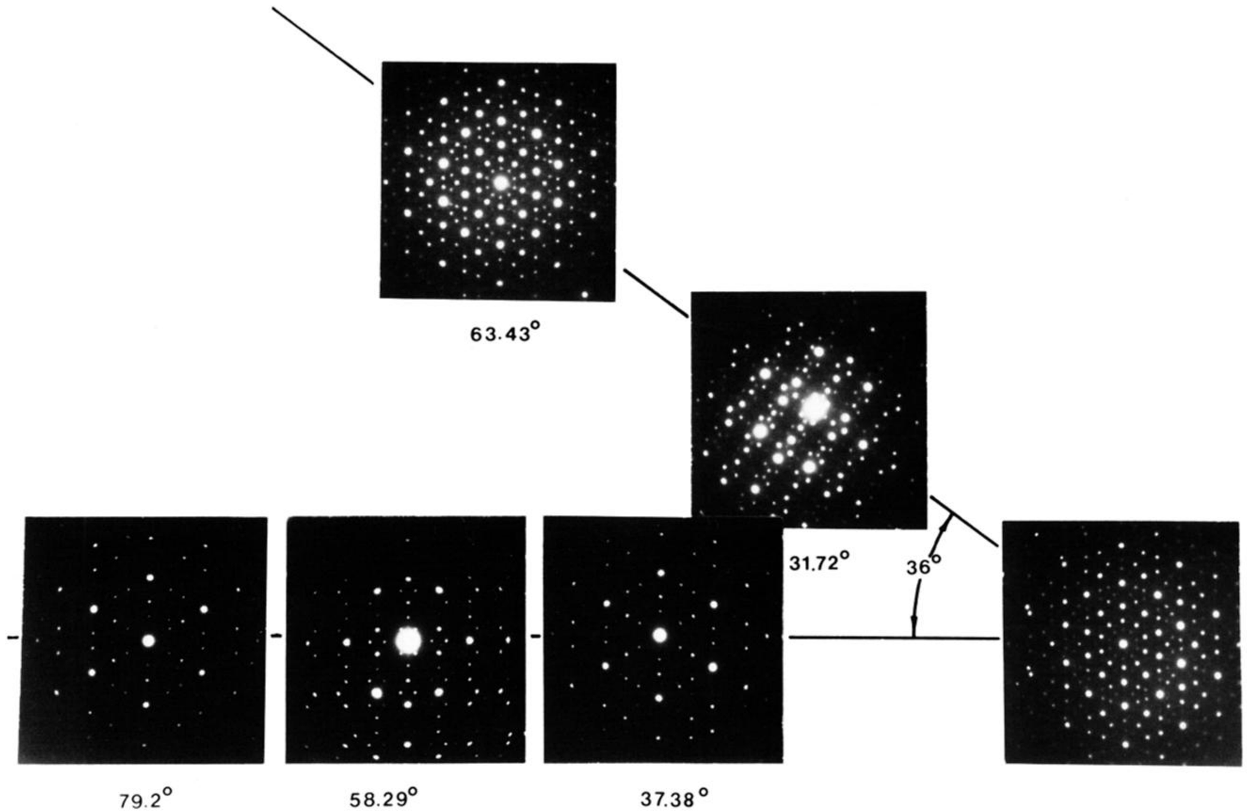


FIG. 2. Selected-area electron diffraction patterns taken from a single grain of the icosahedral phase. Rotations match those in Fig. 1.

Les chimistes se sont donc intéressés aux différentes façon de remplir l'espace de façon régulière avec des formes identiques (des pavages).

Ce problème a reçu une réponse mathématique : un pavage est un procédé pour remplir l'espace par des pavés tous identiques, ou on passe de l'un à l'autre par une isométrie.

Théorème. [Fedorov, 1891] *Il existe 17 types de pavage du plan, 230 types de pavage de l'espace euclidien de dimension 3.*

(4895 en dimension 4)
C'est un théorème d'algèbre.
Voici les 17 types en dimension 2 :

Figure 1.7.4.1.

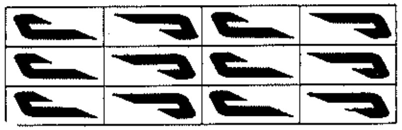


Figure 1.7.4.2.

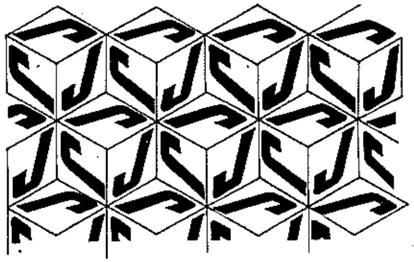


Figure 1.7.4.3.

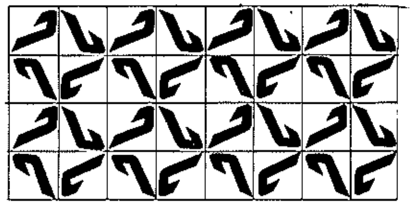


Figure 1.7.4.4.

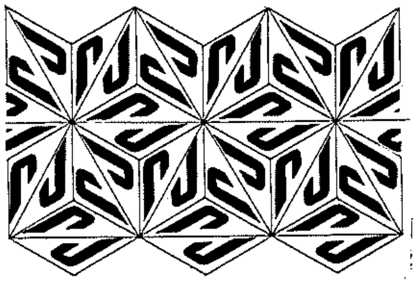


Figure 1.7.4.5.

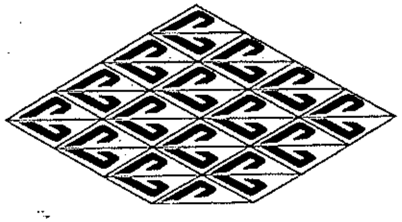


Figure 1.7.6.1.

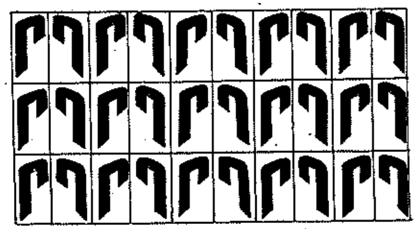


Figure 1.7.6.2.

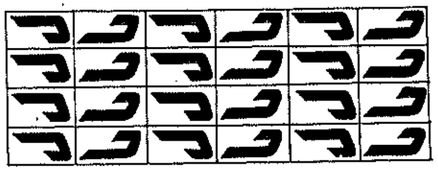


Figure 1.7.6.3.

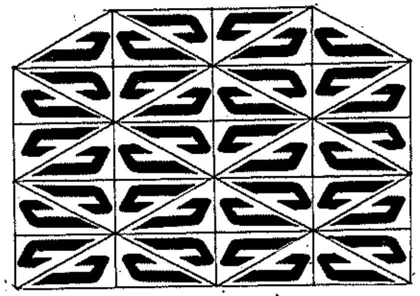


Figure 1.7.6.4.

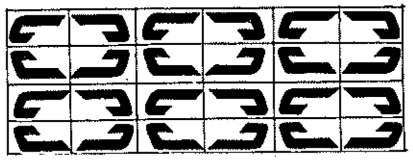


Figure 1.7.6.5.

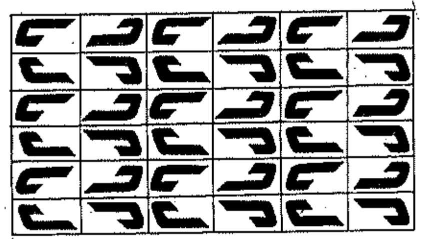


Figure 1.7.6.6.

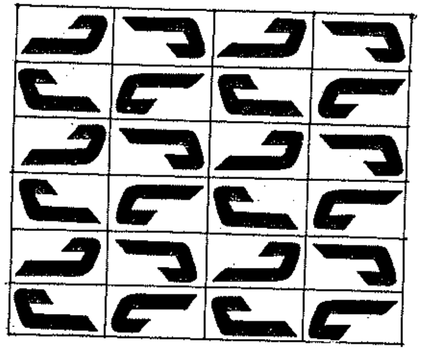


Figure 1.7.6.7.

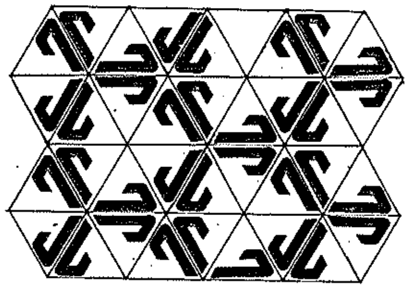


Figure 1.7.6.8.

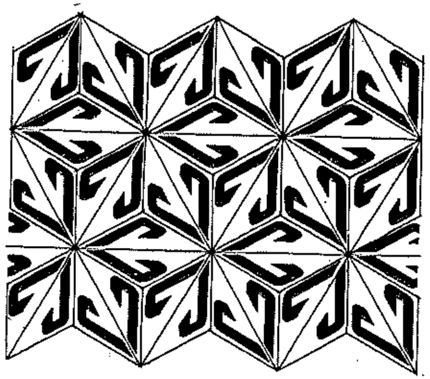


Figure 1.7.6.9.

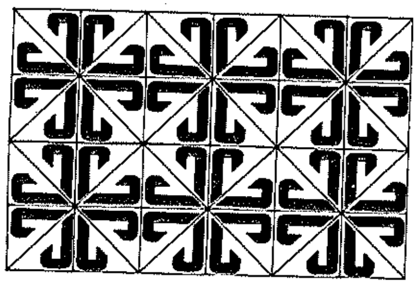


Figure 1.7.6.10.

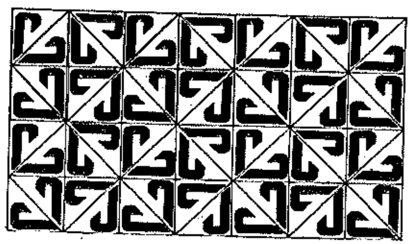


Figure 1.7.6.11.

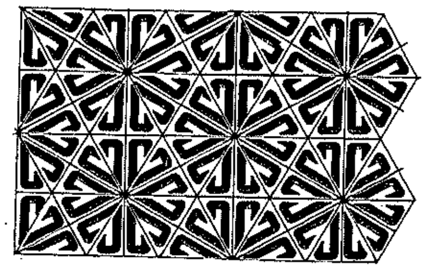


Figure 1.7.6.12.

(j'ai repris ces images du livre *Géométrie* de Marcel Berger).

Depuis lors les chimistes considéraient qui les cristaux ne pouvaient avoir que les symétries décrites par ce théorème, en particulier toute symétrie d'ordre 5 était exclue. Pourtant en 1984

VOLUME 53, NUMBER 20 PHYSICAL REVIEW LETTERS 12 NOVEMBER 1984

Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry

D. Shechtman and I. Blech
Department of Materials Engineering, Israel Institute of Technology–Technion, 3200 Haifa, Israel

and

D. Gratias
Centre d'Etudes de Chimie Métallurgique, Centre National de la Recherche Scientifique, F-94400 Vitry, France

and

J. W. Cahn
Center for Materials Science, National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maryland 20760
(Received 9 October 1984)

We have observed a metallic solid (Al–14-at.%-Mn) with long-range orientational order, but with icosahedral point group symmetry, which is inconsistent with lattice translations. Its diffraction spots are as sharp as those of crystals but cannot be indexed to any Bravais lattice. The solid is metastable and forms from the melt by a first-order transition.

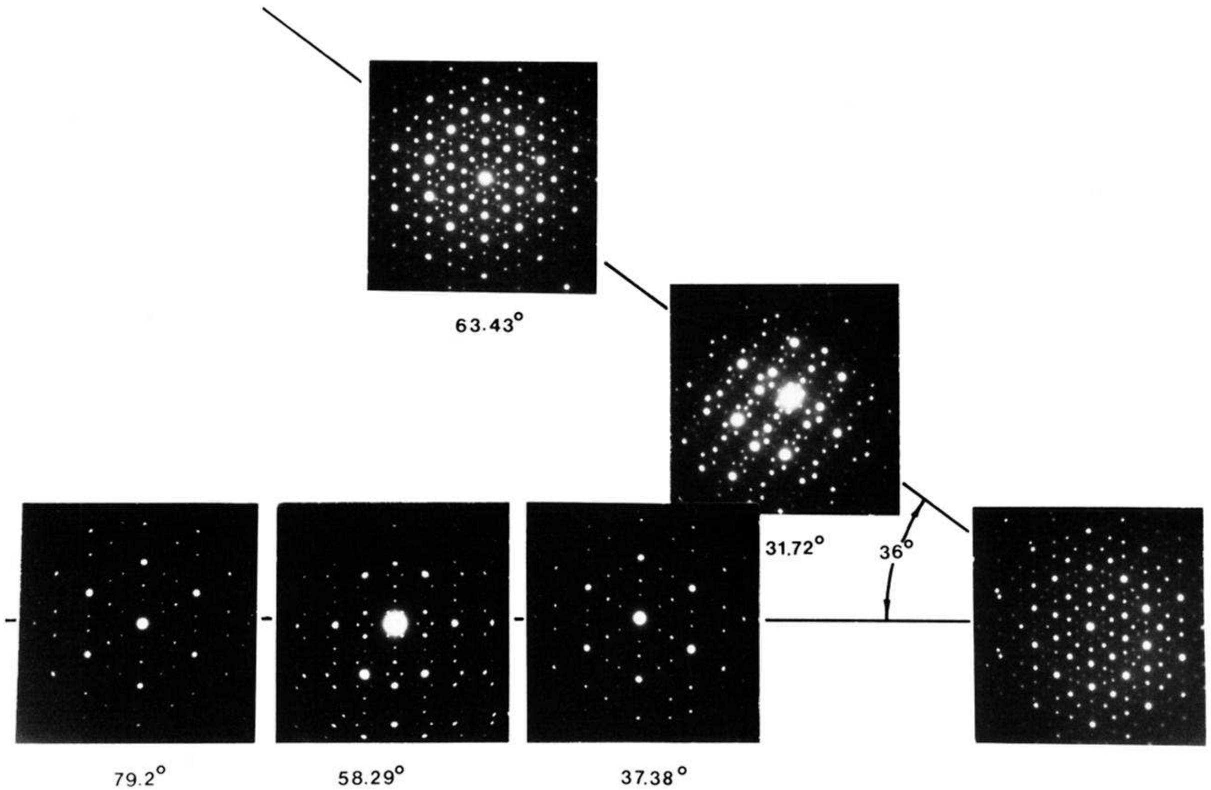
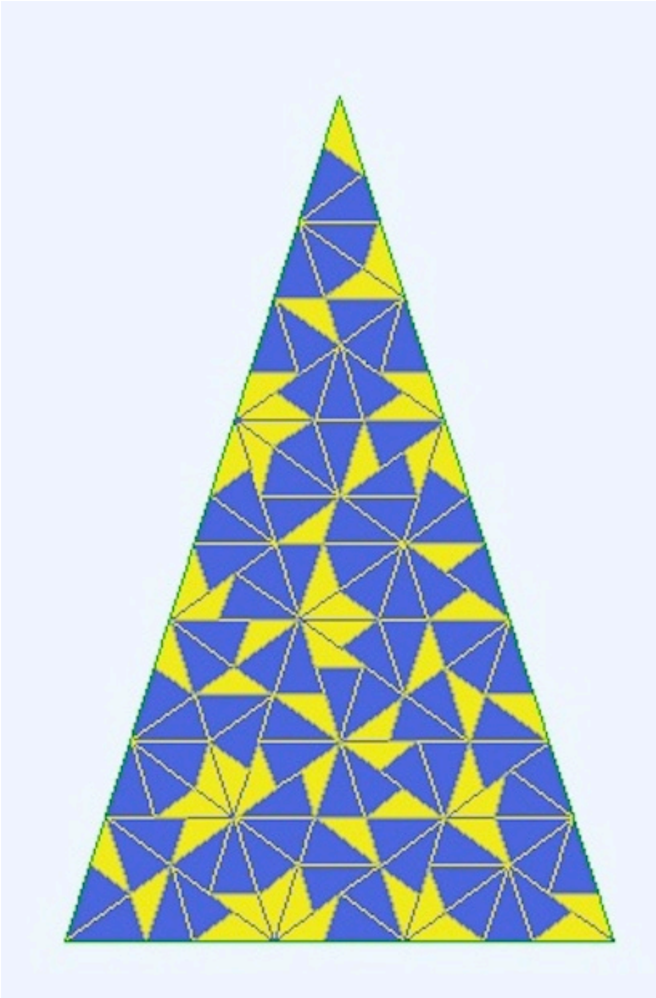
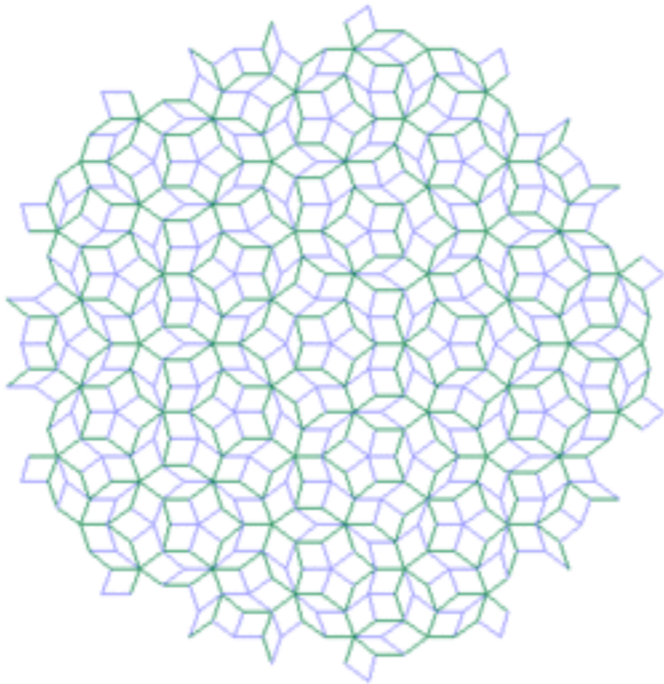


FIG. 2. Selected-area electron diffraction patterns taken from a single grain of the icosahedral phase. Rotations match those in Fig. 1.

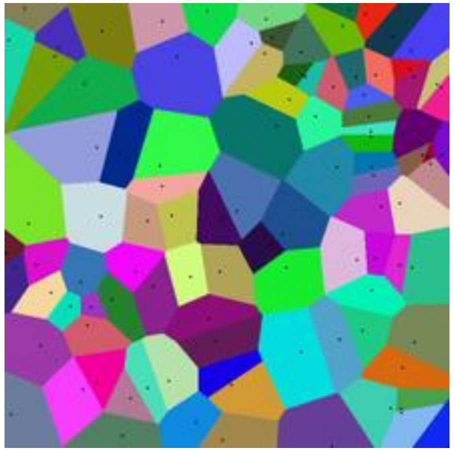
Les mathématiciens avaient pourtant déjà étudié des pavages irréguliers, le plus connu est celui de Penrose (1976)



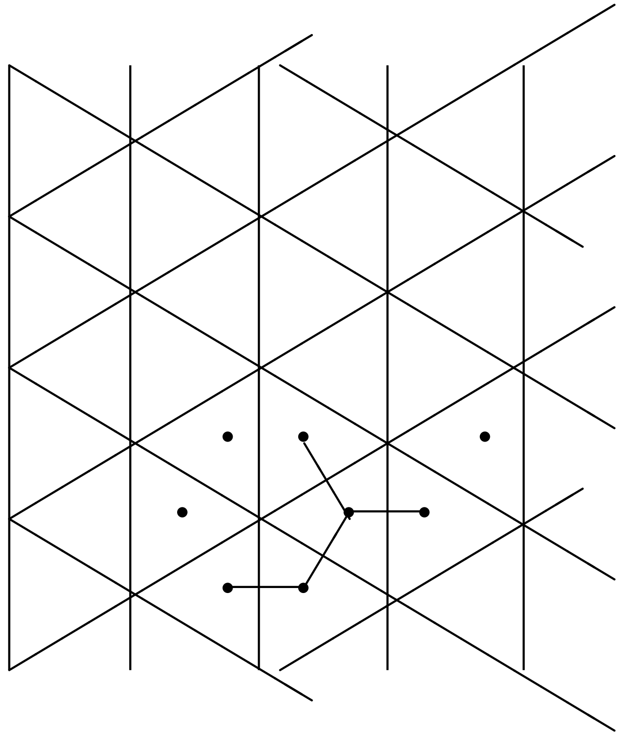


Mais aussi dès 1970 Yves Meyer avait proposé une théorie des *quasicristaux*.
Ce sont des ensemble de points **S**.

Comment on passe d'un ensemble de points à un pavage ? grâce au procédé de Voronoï : à chaque élément p de **S** on associe la cellule de Voronoï constituée de tous les points de l'espace qui sont plus proches de p que de tout autre point de **S**. Il y a aussi un procédé dual, de Delaunay : on trace une arête de p à q si leurs cellules de Voronoï sont adjacentes.



cellules de Voronoï



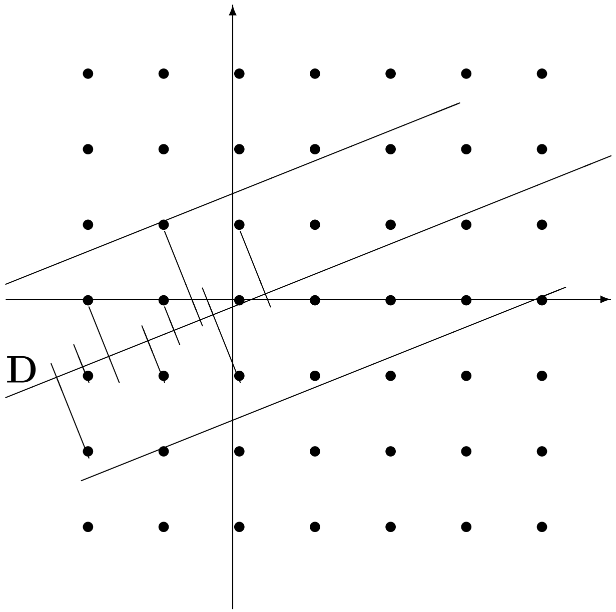
construction d'un diagramme de Delaunay

Un *quasicristal* est alors un ensemble de points **S** qui vérifie trois propriétés

1. il est *uniformément discret* (il existe r>0 tel que toute boule de rayon r contient au plus un élément de **S**),
2. il est relativement dense (il existe R>0 tel que toute boule de rayon R contient au moins un élément de **S**),
3. il existe une partie finie **F** de **S** telle que **S-S ⊂ S+F.**

Par exemple un *réseau* (tous les points de coordonnées entières dans une base fixée) est un quasicristal.

Est-ce que cette propriété est conservée par projection ? Regardons en dimension deux le réseau standard **S**={(n,m); n, m $\in\mathbb{Z}$} que l'on projette orthogonalement sur une droite **D**. Soit p la projection orthogonale sur une droite D :



- si la pente de D est rationelle, p(**S**) est périodique (cristal),
- si la pente de D est irrationnelle, p(**S**) est dense (la propriété 1 n'est pas vérifiée).

L'idée est donc de ne projeter que les points de **S** à distance plus petite que *a* de D.
On obtient alors un quasicristal.
Ce procédé est général et permet de définir des *modèles*, l'exemple de Penrose est obtenu de cette façon, par projection d'un réseau de dimension 5.

Ces idées de Meyer ont donné lieu à de nombreux travaux

- un théorème de Lagarias (2000) caractérise les ensembles de points dont les pavages de Voronoï ou de Delaunay utilisent un nombre fini de formes de briques. C'est le cas des quasicristaux
- certains modèles sont *répétitifs* (pour notre exemple la condition est que les deux droites à distance *a* de D ne rencontrent pas le réseau **S**)
- l'image par diffraction d'un quasicristal est un quasicristal.

Ils ont une application en théorie du signal (pour l'échantillonnage : un ensemble de point qui rende compte d'une fonction dont on connait la transformée de Fourier et son support)

Ils apparaissent aussi dans l'art islamique.

Tout bon livre sur les pavages réguliers du plan vous parlera de l'Alhambra (Grenade)

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm

on y trouve les 17 pavages. Mais plus étonnant, à Boukhara une madrassa :