Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses

par Colette Anné et Bruno Colbois

Résumé. — L'objet de cet article est d'étudier le comportement du spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles d'une variété riemannienne orientable compacte, perturbée par l'adjonction d'une anse cylindrique dont le rayon tend vers 0.

Introduction

L'étude du spectre du Laplacien agissant sur les fonctions d'une variété riemannienne compacte, et particulièrement l'inégalité de Cheeger [C] montrent qu'à diamètre borné, une variété dont la première valeur propre non nulle est très petite tend à se "déconnecter" ; en gros on peut dire qu'elle ressemble à un haltère (figure 1.2). On sait qu'il n'en va pas de même pour les formes différentielles [CC] où, même à courbure et diamètre bornés, on peut avoir des valeurs propres arbitrairement petites. Par contre, peu de choses sont connues concernant le cas du spectre des p-formes différentielles dans la situation évoquée plus haut d'un haltère, c'est-à-dire lorsque qu'une partie de la variété s'écrase [D] (voir cependant les résultats de R. Forman [F] pour un écrasement global). C'est ce comportement que nous allons étudier dans cet article, avec l'idée de généraliser les méthodes développées par le premier auteur dans le cas des fonctions [A 1].

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, orientée de dimension $n \geq 3$. Soient $P, Q \in M$. On suppose que la métrique g est plate au voisinage de P et Q, disons, pour fixer les idées, dans des boules $B(P,1)$, $B(Q,1)$ de rayon 1 autour de P et Q, choisies telles que $B(P,1) \cap B(Q,1) = \emptyset$ et 1 inférieur au rayon d'injectivité de M en P et Q. On pose $M_\varepsilon J = M - (B(P,\varepsilon) \cup B(Q,\varepsilon))$ que l'on munit de la métrique g restreinte, $\varepsilon \ll 1$. On note S_ε^{n-1} la sphère de dimension $n-1$ et le rayon ε et $C_\varepsilon =]0, L[\times S_\varepsilon^{n-1}$. On obtient une variété $\widetilde{M}_\varepsilon$ en identifiant M_ε et C_ε le long de leur bord $\{0\} \times S_\varepsilon^{n-1} \sim \partial(B(P,\varepsilon))$ et $\{L\} \times S_\varepsilon^{n-1} \sim \partial(B(Q,\varepsilon))$ par une isométrie. On choisit l'identification de sorte que $\widetilde{M}_\varepsilon$ soit orientable. $\widetilde{M}_\varepsilon$ est alors une variété riemannienne orientable connexe compacte avec une métrique singulière aux points de recollement.

On peut en fait considérer une situation plus compliquée où on dispose de plusieurs variétés compactes $M_1, \ldots, M_N$ de même dimension $n \geq 3$ que l'on relie par des anses. On construit alors une *variété-graphe* c'est-à-dire la donnée d'un graphe connexe dont les sommets sont des variétés reliées par des arêtes qui sont des cylindres $C_{ij}(\varepsilon) =]0, L_{ij}[\times S_\varepsilon^{n-1}$ entre M_i et M_j. L'haltère correspond au graphe $\bullet\!\!-\!\!\bullet$

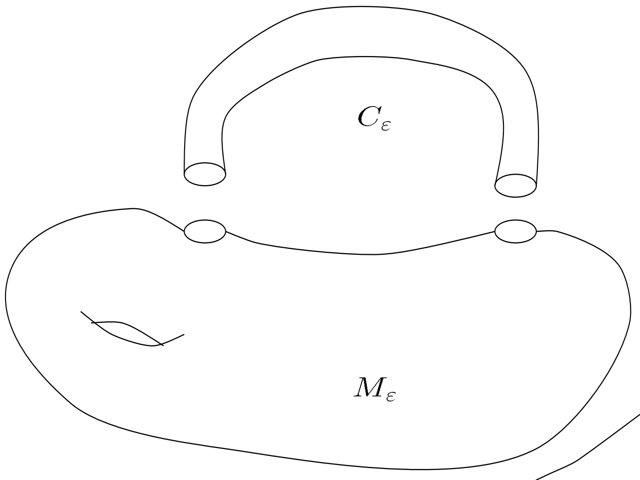


figure 1.1

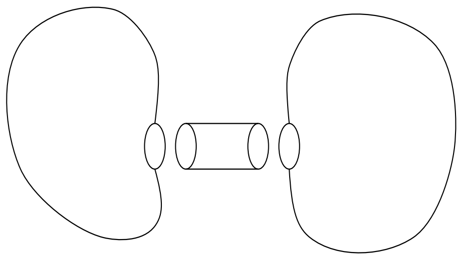


figure 1.2

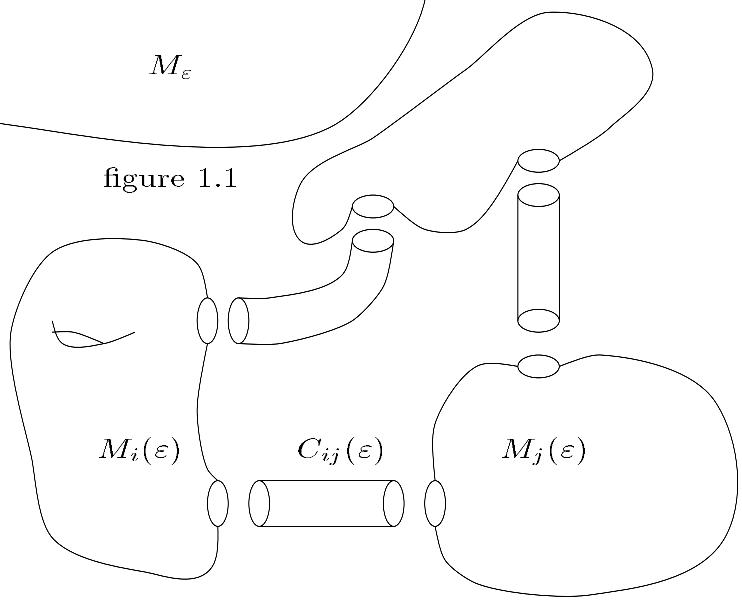


figure 1.3

On introduit sur $\widetilde{M}_\varepsilon$ le Laplacien Δ agissant sur les p-formes différentielles (on précisera cette définition au §1 ainsi que la singularité de la métrique créée par l'adjonction d'anse). On laisse ensuite tendre ε vers 0 et on étudie le comportement du spectre et des formes propres de Δ.

Théorème A. — *Si $\widetilde{M}_\varepsilon$ est obtenue par l'adjonction d'une anse à une variété connexe M (figure 1.1), notons pour $0 \leq p < n-1$ par $\lambda_0(\varepsilon) \leq \lambda_1(\varepsilon) \cdots$ le spectre du Laplacien agissant sur les p-formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$.*

- *Si $1 < p < n-1$ notons $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots$ le spectre du Laplacien des p-formes différentielles de M.*
- *Si $p = 0$ ou 1, notons $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots$ l'union du spectre des p-formes de M et des p-formes avec conditions tangentielles de l'intervalle $[0, L]$.*

Alors quel que soit l'entier k et quel que soit p, $0 \leq p < n-1$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\varepsilon) = \mu_k$ et il y a convergence des espaces spectraux. Les cas $p = n-1$ et $p = n$ s'obtiennent par la dualité de Hodge.

De plus les groupes de cohomologie vérifient

$$\dim H^p(\widetilde{M}_\varepsilon, \mathbf{R}) = \dim H^p(M, \mathbf{R}) + 1 \quad \textit{si } p = 1 \quad \textit{ou } p = n-1$$
$$\dim H^p(\widetilde{M}_\varepsilon, \mathbf{R}) = \dim H^p(M, \mathbf{R}) \quad \textit{si } p \neq 1 \quad \textit{et } p \neq n-1$$

(ce qui détermine la multiplicité de 0 dans les deux spectres).

Remarques. —

– La condition tangentielle au bord de l'intervalle $[0, L]$ signifie pour les fonctions ($p = 0$) la condition de Dirichlet : $f(0) = f(L) = 0$ et pour les 1-formes que l'on peut écrire avec $s \in [0, L], f(s)ds$ la condition de Neumann sur f : $f'(0) = f'(L) = 0$.

– Le cas $p = 0$ a déjà été étudié dans [A1].

– En degré 1, l'asymptotique des formes propres est donné par les formes propres de M et les formes en $f(s)\ ds$ avec conditions de Neumann pour f sur $[0, L]$, que l'on étend avec la différentielle du noyau de Green sur M. Les $(n-1)$-formes propres seront données par celles de M et les formes en $f(s)\,\mathrm{dvol}$ sur l'anse si dvol désigne la forme volume de la sphère S^{n-1}. On voit donc que l'opérateur limite doit être vu sur l'anse comme agissant sur les formes de $[0, L]$ à valeur dans l'espace des formes harmoniques de S^{n-1}.

THÉORÈME B. — *Si $\widetilde{M}_\varepsilon$ est obtenue par l'adjonction d'anses de longueur L_{ij} entre des variétés compactes $M_1 \cdots M_N$ (figure 1.3), notons pour $0 \leq p \leq n$ par $\lambda_0(\varepsilon) \leq \lambda_1(\varepsilon) \cdots$ le spectre du Laplacien agissant sur les p-formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$. Enfin, définissons $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots$ comme*

- *si $1 < p < n-1$ l'union du spectre des p-formes des variétés M_j ;*
- *si $p = 0$ ou 1 l'union du spectre des 1-formes des variétés M_j et des 1-formes avec conditions tangentielles de $[0, L_{ij}]$.*

Alors quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\varepsilon) = \mu_k$, et il y a convergence des espaces spectraux ; les cas $p = n-1$ ou $p = n$ s'obtiennent par dualité de Hodge. De plus

$$\dim H^0(\widetilde{M}_\varepsilon) = \dim H^n(\widetilde{M}_\varepsilon) = 1$$
$$\dim H^p(\widetilde{M}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M_j) \ \textit{si } 1 < p < n-1$$

et si $p = 1$ ou $(n-1)$

$$\dim H^p(\widetilde{M}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M_j) + a - (N-1)$$

si a est le nombre d'arêtes du graphe construit.

Remarques. — Dans le cas des fonctions, le spectre converge vers l'union des spectres de M_j et de $[0, L_{ij}]$ avec conditions de Dirichlet. Comme $\widetilde{M}_\varepsilon$ est connexe la valeur propre

0 est de multiplicité 1 et $\widetilde{M}_\varepsilon$ a $(N-1)$ petites valeurs propres qui tendent vers 0. Ces $(N-1)$ petites valeurs propres restent dans le spectre des 1-formes exactes. On voit donc que l'adjonction de a anses donne exactement a petites valeurs propres supplémentaires pour les 1-formes : l'adjonction d'une anse à une variété connexe ajoute une petite valeur propre qui est en fait 0, l'adjonction d'une anse entre deux variétés (fig. 1.2) crée une petite valeur propre non nulle.

La preuve du théorème A sera donnée en 2 étapes : on traite d'abord le cas $n \geq 4$. Le cas $n = 3$ est beaucoup plus délicat : lorsque l'anse C_ε s'effondre les formes harmoniques de la fibre jouent un rôle particulier, or ces formes n'existent qu'en degré 0 et $n-1$ et n'affectent donc que les degrés 0, 1 $n-1$ et n des formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$. Le cas $p = 0$ ou n étant déjà connu on peut, en dimension $n \geq 4$, encadrer le degré 1 par les cas simples 0 et 2, la multiplicité de 0 étant donnée par la topologie de $\widetilde{M}_\varepsilon$. Cet encadrement n'est pas possible pour $n = 3$ et l'on doit traiter directement le cas des 1-formes. Pour ce faire on s'appuie sur un résultat récent de J.K. Mac Gowan [McG] permettant de montrer qu'il n'y a pas de petites valeurs propres pour les 1-formes co-exactes (théorème 5.2), ce qui n'est en soi pas évident.

Lorsque $p \neq 1$ l'idée est de se ramener à [AC]. Là, on montrait que, lorsque $\varepsilon \to 0$, le p-spectre de M_ε converge vers celui de M. L'outil principal était le contrôle du prolongement harmonique des formes propres de M_ε en H_1-norme. Nous utiliserons de nouveau fréquemment cette technique rappelée dans la proposition 3.8.

La preuve du théorème B découle presque entièrement des méthodes développées pour le théorème A. Il est possible d'estimer précisément l'asymptotique des petites valeurs propres des fonctions en utilisant les idées de [CCdV] et [A 4] (voir aussi [JM]).

Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas $p = 1$. Il est en effet possible grâce au Lemme de Mac Gowan, à la détermination des petites valeurs propres des fonctions et à l'analyse locale développée pour les 1-formes co-fermées de déterminer a priori la multiplicité de 0 dans le spectre des 1-formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$, pour ε petit. On a ici un exemple, assez simple, où on peut retrouver la topologie par l'analyse, c'est notre théorème 6.8.

Remarque. — On pourrait se passer de l'hypothèse de platitude de la métrique, comme dans [AC], mais cette hypothèse simplifie les calculs (car on peut travailler dans les coordonnées polaires euclidiennes au voisinage de P et Q) et ne modifie pas qualitativement les résultats.

La structure de l'article est la suivante : au §1 on définit précisément le Laplacien sur $\widetilde{M}_\varepsilon$. Au §2 on démontre la partie facile du théorème, à savoir que le spectre de $\widetilde{M}_\varepsilon$ est majoré par le spectre limite. Au §3 on développe quelques lemmes techniques nécessaires à la preuve de la minoration du spectre de $\widetilde{M}_\varepsilon$ par $\{\mu_j\}$. Au §4 on démontre le théorème pour $1 < p < n-1$ et au §5 pour $p = 1$. Enfin, au §6 on démontre le théorème B.

1. Définition du Laplacien

La variété $\widetilde{M}_\varepsilon$ définie dans l'introduction est singulière du point de vue de la métrique. Il convient donc d'abord de définir le Laplacien agissant sur les p-formes différentielles d'une somme connexe de variétés riemanniennes.

Soient X_1 et X_2 deux variétés riemanniennes orientables à bord isométrique à Z. On définit $X = X_1 U_Z X_2$ en identifiant les deux bord par l'isométrie. On choisit sur X_1 et X_2 des orientations compatibles : si n_j est la normale extérieure de Z vu dans X_j, et X_j est orientée par ω_j alors on suppose :

$$(n_1 \lrcorner\, \omega_1)_{|Z} = -(n_2 \lrcorner\, \omega_2)_{|Z}$$

X est alors orientée, en prenant ω_1 sur X_1 et ω_2 sur X_2.

Le Laplacien de Hodge Δ d'une variété riemannienne est définie par la forme quadratique $q(\varphi) = \int |d\varphi|^2 + |d^*\varphi|^2 = \int |D\varphi|^2$ si $D = d + d^*$, alors $\Delta = D^2$. Il suffit donc de définir D de domaine l'espace de Sobolev H^1. Notons t_j la distance au bord de Z dans X_j.

Définition 1.1. — *$H^1(\Lambda^p X) = \Big\{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p X_1) \times H^1(\Lambda^p X_2)$ tel que si $\varphi_j = \alpha_j + dt_j \wedge \beta_j$ alors $\alpha_{1|Z} = \alpha_{2|Z}$ et $\beta_{1|Z} = -\beta_{2|Z}\Big\}$ l'égalité au bord étant entendue au sens L_2.*

La différentielle d est définie pour $\varphi \in H^1(\Lambda^p X)$: $d\varphi J = (d\varphi_1, d\varphi_2)$. Soit d^* son adjoint pour le produit scalaire de $L_2(\Lambda^p X) = L_2(\Lambda^p X_1) \times L_2(\Lambda^p X_2)$, noté $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$.

Proposition 1.2. — *L'opérateur $D = d + d^*$ de domaine $H^1(\Lambda^* X)$ est elliptique, autoadjoint et d'image fermée.*

Il est donc Fredholm et on peut appliquer la théorie de Hodge à X car $L_2(\Lambda^p X) =$ $\operatorname{Ker} \Delta \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Im} \Delta$.

Remarque 1.3. — Elliptique signifie ici que la norme de Sobolev $\|\ .\ \|_1$ de $H^1(\Lambda^p X)$ est équivalente à la norme d'opérateur $\|\varphi\|_q^2 = \|\varphi\|^2 + \|D\varphi\|^2$ qu'on appellera q-norme.

Démonstration

Ellipticité. On peut se restreindre aux formes à support dans un voisinage de Z car pour des formes nulles au voisinage de Z on est ramené à la coercitivité sur les variétés à bord X_1 et X_2. Les termes $\|D\varphi_j\|^2 - \|\nabla\varphi_j\|^2$ ont déjà été calculé dans [AC], §3.1. Pour se ramener à ces calculs nous allons momentanément fixer l'orientation sur Z. Paramétrons des voisinages tubulaires de Z dans X_j par les coordonnées normales $t_j \in]-1, 0] \times Z$ et décomposons $\varphi_j = \alpha_j + dt_j \wedge \beta_j$. Alors, X_j est orientée ici par ω_j avec : $\frac{\partial}{\partial t_1} \lrcorner\, \omega_1 = \frac{\partial}{\partial t_2} \lrcorner\, \omega_2$. Chaque valeur de t_j définit une métrique sur Z, notons $\star$ l'opérateur de Hodge associé, d_Z la différentielle et $d_Z^\star$ son adjoint pour cette métrique. Enfin, écrivons $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_j}} = \frac{\partial}{\partial t_j} + \Gamma_j$. Alors

$$\int_{X_j} \left(|D\varphi_j|^2 - |\nabla\varphi_j|^2\right) = \int_{X_j} \langle \mathcal{R}_j \varphi_j, \varphi_j\rangle + \int_Z -\langle \Gamma_j \varphi_j, \varphi_j\rangle + \star^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}(\star)\beta_j\right) \wedge \star\beta_j - d_Z^\star \alpha_j \wedge \star\beta_j - \alpha_j \wedge \star d_Z \beta_j$$

où $\mathcal{R}_j$ est le terme de courbure qui intervient dans la formule de Weizenböck. Lorsque l'on somme les intégrales sur X_1 et X_2 les deux derniers termes s'éliminent à cause des conditions de recollement. Il existe donc une constante $C > 0$ qui dépend des $\mathcal{R}_j$ et des courbures principales du bord (liées aux termes Γ_j) telle que

$$(I) \qquad |\int_X |\nabla\varphi|^2 - |D\varphi|^2| \leq C(\int_Z |\varphi|^2 + \int_X |\varphi|^2)$$

φ est à support compact, on a donc, comme dans [AC], prop. 3.2 $\int_Z |\varphi|^2 \leq \widetilde{C}\Big(\|\nabla\varphi\| \, \|\varphi\| + A\|\varphi\|^2\Big)$ et il existe $C' > 0$ tel que

$$(II) \qquad \int_Z |\varphi|^2 \leq \frac{1}{2}\int_X |\nabla\varphi|^2 + C'\int_X |\varphi|^2.$$

De (I) et (II) on tire la domination de $\|\varphi\|_1$ par $\|\varphi\|_q$. L'autre sens est clair.

L'image de D est fermée. Soient $\varphi_n \in H^1(\Lambda^* X) \cap (\operatorname{Ker} D)^\perp$. Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} D\varphi_n = \Theta$ existe. On va montrer que $\Theta \in \operatorname{Im} D$.

(1) La suite φ_n est bornée dans $L^2(\Lambda^* X)$. En effet, sinon il existerait (quitte à prendre une sous-suite) une suite $\Psi_n = \varphi_n / \|\varphi_n\|$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} D\Psi_n = 0$. Cette suite serait bornée dans $H^1(\Lambda^* X)$. On pourrait donc en extraire une sous-suite qui converge L_2 et H^1-faible. Soit Ψ cette limite. Alors

$$\|\Psi_n\| = 1 \Longrightarrow \|\Psi\| = 1$$
$$\Psi_n \in \operatorname{Ker} D^\perp \Longrightarrow \Psi \in \operatorname{Ker} D^\perp \; .$$

Enfin $D\Psi = \lim\limits_{n\to\infty} (H^1\text{-faible}) D\Psi_n = 0$. Ceci est absurde.

(2) La suite φ_n est donc bornée dans $H^1(\Lambda^* X)$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge L_2 et H^1-faible. Soit φ la limite. Alors $D\varphi = \Theta$. ∎

DÉFINITION 1.4. — *Le Laplacien de Hodge de X est le carré de l'opérateur D, ou de façon équivalente l'opérateur de polarisation de la forme quadratique $q(\varphi) = \int |D\varphi|^2$. Son domaine est donc, en degré p :*

$$H^2(\Lambda^p X) = \Big\{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(\Lambda^p X_1) \times H^2(\Lambda^p X_2) \text{ tel que } \varphi \in H^1(\Lambda^p X) \, , \; d\varphi \in H^1(\Lambda^{p+1} X) \text{ et } d^*\varphi \in H^1(\Lambda^{p-1} X)\Big\}$$

2. Majoration du spectre de $\widetilde{M}_\varepsilon$

On montre ici, pour $\widetilde{M}_\varepsilon$ obtenue comme dans la figure (1.1)

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \lambda_n(\varepsilon) \leq \mu_n \ .$$

Pour ce faire, on associe aux formes propres normées de M et de l'anse correspondant aux valeurs μ_n définies dans l'énoncé du théorème A des formes-test sur $\widetilde{M}_\varepsilon$, arbitrairement proches en q-norme lorsque $\varepsilon \to 0$, et on conclut à l'aide du Min-Max.

– Les formes propres de M sont transplantées à $\widetilde{M}_\varepsilon$ en les annulant au voisinage de P et de Q, comme dans [AC], §4.2, et en les prolongeant par 0 sur l'anse.

– Les fonctions propres limites de l'anse avec condition de Dirichlet sont prolongées par 0 à M_ε.

– Aux 1-formes propres limites $f(s)\ ds$ de l'anse sont associées les 1-formes-test φ_ε définies comme suit :

$$(2.1) \qquad \varphi_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^{(n-1)/2}(\operatorname{Vol} S^{n-1})^{1/2}} f(s)\ ds & \text{sur l'anse} \\ \dfrac{\varepsilon^{(n-1)/2}}{(\operatorname{Vol} S^{n-1})^{1/2}} f(0)\Big(\dfrac{dr}{r^{n-1}} - dr\Big) & \text{dans } B(P,1) \text{ (avec les coordonnées} \\ & \text{polaires usuelles)} \\ \dfrac{-\varepsilon^{(n-1)/2}}{(\operatorname{Vol} S^{n-1})^{1/2}} f(L)\Big(\dfrac{dr}{r^{n-1}} - dr\Big) & \text{dans } B(Q,1) \\ 0 & \text{dans } M_\varepsilon - (B(P,1) \cup B(Q,1)) \end{cases}$$

f est choisie telle que $\int_0^L f^2(s)\ ds = 1$; le terme en ε est un facteur de normalisation.

Il est facile de contrôler la proximité en q-norme dans les 2 premiers cas. Dans le 3ème cas, on a les estimations suivantes :

$$\int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} \Big|\frac{dr}{r^{n-1}}\Big|^2 = \operatorname{Vol} S^{n-1} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{n-1}}\ dr = O\Big(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\Big)$$

$$\int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} \Big|d\Big(\frac{dr}{r^{n-1}}\Big)\Big|^2 + \Big|d^*\Big(\frac{dr}{r^{n-1}}\Big)\Big|^2 = 0$$

$$\int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} \big|d(dr)\big|^2 + \big|d^*(dr)\big|^2 = \int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} \big|d(r^{n-1} dv_{S^{n-1}})\big|^2 = O(1) \ .$$

On a des estimées similaires sur $B(Q,1) - B(Q,\varepsilon)$. Comme $f(0)$ et $f(L)$ sont contrôlées par la q-norme de f, elle-même contrôlée par la valeur propre μ associée à f, on déduit

$$\int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} |\varphi_\varepsilon|^2 = O(\varepsilon)$$

$$\int_{B(P,1)-B(P,\varepsilon)} |d\varphi_\varepsilon|^2 + |d^*\varphi_\varepsilon|^2 = O(\varepsilon^{n-1}) \ .$$

et la même chose sur $B(Q,1)-B(Q,\varepsilon)$.

La norme de φ_ε sur l'anse étant 1, on voit que lorsque $\varepsilon\to 0$, φ_ε est proche en q-norme de $\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\frac{1}{(\mathrm{Vol}\,S_{n-1})^{1/2}}f(s)\ ds$ qui est une forme propre de norme 1 sur l'anse. On peut donc construire des espaces-test et la formule du mini-max nous assure :

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\lambda_n(\varepsilon)\leq \mu_n\ .$$

3. Lemmes préparatoires pour la minoration du spectre

L'objectif est de montrer que $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_n(\varepsilon)\geq\mu_n$. Pour cela il faut arriver à transplanter les p-formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$, ce qui est plus difficile que pour la majoration car il faut arriver à fixer un espace indépendant de ε. La méthode que nous développerons est la suivante : si le degré p vérifie $1<p<n-1$ une p-forme propre de norme 1 converge vers 0 sur l'anse, cela est dû à la topologie de l'anse (une sphère S^{n-1} n'admet de forme harmonique qu'en degré 0 et $n-1$). La forme propre se localise donc dans $M_\varepsilon=M-\big(B(P,\varepsilon)\cup B(Q,\varepsilon)\big)$ et on peut se reporter à la situation de [AC] : il est possible d'étendre la forme à M en contrôlant la q-norme. Le cas $p=1$ se traite à part.

Rappelons que l'on étudie l'asymptotique quand ε tend vers 0 de la forme quadratique $q(\varphi)=\int|D\varphi|^2$ de domaine $H^1(\Lambda^p\widetilde{M}_\varepsilon)$. Cet espace est constitué de couples $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in H^1(\Lambda^pM_\varepsilon)\times H^1(\Lambda^pC_\varepsilon)$ qui vérifient la condition de recollement. Écrivons donc φ_1 en coordonnées polaires au voisinage des points P et Q : $\varphi_1=\alpha_1+dr\wedge\beta_1$, et $\varphi_2=\alpha_2+ds\wedge\beta_2$ dans les coordonnées $(s,\theta)\in[0,L]\times S^{n-1}_\varepsilon$ de l'anse. Dans ces coordonnées la condition de recollement s'écrit en P : $\alpha_2(0,\theta)=\alpha_1(\varepsilon,\theta)$ et $\beta_2(0,\theta)=-\beta_1(\varepsilon,\theta)$ et en Q : $\alpha_2(L,\theta)=\alpha_1(\varepsilon,\theta)$ et $\beta_2(L,\theta)=\beta_1(\varepsilon,\theta)$.

Le premier point consiste à fixer l'espace de Hilbert pour étudier une variation de formes quadratiques. Pour ce faire on paramètre l'anse C_ε par le cylindre $C_1=]0,L[\times S^{n-1}$.

(3.1). — L'application

$$\begin{aligned} h_\varepsilon: L^2(\Lambda^pC_\varepsilon)&\longrightarrow L^2(\Lambda^pC_1)\\ \alpha+ds\wedge\beta&\longmapsto \varepsilon^{\frac{n-1}{2}-p}\alpha+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}-p}ds\wedge\beta\end{aligned}$$

est une isométrie qui nous permet de transporter la forme quadratique en $(q_\varepsilon,\mathcal{D}(q_\varepsilon))$:

$$\begin{aligned} q_\varepsilon&=q(\varphi_1,h_\varepsilon^{-1}(\varphi_2))\\ \mathcal{D}(q_\varepsilon)&=\Big\{(\varphi_1,\varphi_2)\ ;\ (\varphi_1,h_\varepsilon^{-1}\varphi_2)\in H^1(\Lambda^p\widetilde{M}_\varepsilon)\Big\}\ .\end{aligned}$$

(3.2). — Les conditions de recollement s'expriment alors comme suit :

$$(\varphi_1,h_\varepsilon^{-1}\varphi_2)\in H^1(\Lambda^p\widetilde{M}_\varepsilon)\Longleftrightarrow(\varphi_1,\varphi_2)\in H^1(\Lambda^pM_\varepsilon)\times H^1(\Lambda^pC_1)$$

et en écrivant $\varphi_1=\alpha_1+dr\wedge\beta_1$ et $\varphi_2=\alpha_2+ds\wedge\beta_2$

au voisinage de P $\begin{cases} \alpha_2(0,\theta) = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}-p}\alpha_1(\varepsilon,\theta) \\ \beta_2(0,\theta) = -\varepsilon^{\frac{n+1}{2}-p}\beta_1(\varepsilon,\theta) \end{cases}$

au voisinage de Q $\begin{cases} \alpha_2(L,\theta) = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}-p}\alpha_1(\varepsilon,\theta) \\ \beta_2(L,\theta) = \varepsilon^{\frac{n+1}{2}-p}\beta_1(\varepsilon,\theta) \end{cases}.$

(3.3). — On compactifie l'anse en considérant son double $T_1 = S^1_{2L}\times S^{n-1}$ (en effet sur une variété compacte on a toujours l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_q$). On étend $\varphi_2 \in H^1(\Lambda^p C_1)$ par symétrisation :

$$\begin{array}{lll} \varphi_2^s(s,\theta) & = \alpha_2(s,\theta) + ds\wedge\beta_2(s,\theta) & \text{si } 0\le s\le L \\ \varphi_2^s(s,\theta) & = \alpha_2(2L-s,\theta) + ds\wedge\beta_2(2L-s,\theta) & \text{si } L\le s\le 2L\ . \end{array}$$

Alors $\varphi_2^s \in H^1(\Lambda^p T_1)$. Notons $H^1_{\mathrm{sym}}(\Lambda^p T_1)$ l'image de $H^1(\Lambda^p C_1)$ par cette symétrisation.

Proposition 3.4. — *Si $\varphi_2 \in H^1(\Lambda^p C_1)$ alors*

$$\|\varphi_2^s\|_1^2 = 2\int_{C_1}|\varphi_2|^2 + 2\int_{C_1}|d_0\alpha_2|^2 + |d_0\beta_2|^2 + |d_0^*\beta_2|^2 + |d_0^*\alpha_2|^2 + |\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2\ .$$

où d_0 est la différentielle de (S^{n-1},can) et d_0^* son adjoint.

Démonstration

$$\begin{aligned} \|d\varphi_2^s\|^2 + \|d^*\varphi_2^s\|^2 &= \int_{S^1_{2L}\times S^{n-1}} |d_0\alpha_2^s|^2 + |d_0^*\alpha_2^s - (\beta_2^s)'|^2 + |d_0^*\beta_2^s|^2 + |(\alpha_2^s)' - d_0\beta_2^s|^2 \\ &= 2\int_C |d_0\alpha_2^s|^2 + |d_0^*\alpha_2^s| + |(\alpha_2^s)'|^2 + |(\beta_2^s)'|^2 + |d_0^*\beta_2^s|^2 + |d_0\beta_2^s|^2 \\ &\qquad - 2\int_0^{2L}\langle d_0^*\alpha_2^s,(\beta_2^s)'\rangle + \langle(\alpha_2^s)', d_0\beta_2^s\rangle\ . \end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^{2L}\langle d_0\alpha_2^s,\beta_2\rangle' &= \int_0^L\langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle' + \int_L^{2L}\frac{d}{ds}\big[\langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle(2L-s)\big] \\ &= \langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle(L) - \langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle(0) + \langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle(0) - \langle d_0\alpha_2,\beta_2\rangle(L) \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

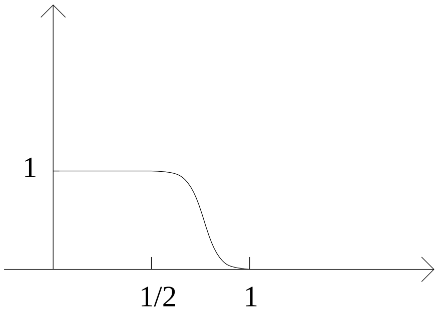
(3.5). — Afin de transporter les formes de $\widetilde{M}_\varepsilon$ introduisons :

$$\begin{array}{llll} \Phi_\varepsilon : & H^1(\Lambda^p\widetilde{M}_\varepsilon) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_\varepsilon = H^1(\Lambda^p M_\varepsilon)\oplus H^1_{\mathrm{sym}}(\Lambda^p T^1) \\ & (\varphi_1,\varphi_2) & \longmapsto & \big(\varphi_1,(h_\varepsilon(\varphi_2))^s\big) \\ \Psi_\varepsilon : & H^1(\Lambda^p\widetilde{M}_\varepsilon) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1 = H^1(\Lambda^p M)\oplus H^1_{\mathrm{sym}}(\Lambda^p T^1) \\ & (\varphi_1,\varphi_2) & \longmapsto & \big(P_\varepsilon\varphi_1,(h_\varepsilon(\varphi_2))^s\big) \end{array}$$

où $P_\varepsilon\varphi_1$ est le prolongé harmonique de φ_1. On sait que $P_\varepsilon\varphi_1$ existe et est unique [A 2].

On peut donc écrire $q_\varepsilon = q(\Phi_\varepsilon^{-1})$ et $\mathcal{D}(q_\varepsilon) = \big\{(\varphi_1,\varphi_2) \in \mathcal{H}^1_\varepsilon$; $(\varphi_1, \varphi_{2|C_1})$ vérifie les conditions de recollement (3.2)$\big\}$.

(3.6) Écriture locale de q_ε. —
Les coordonnées polaires n'existent que dans des voisinages de P et Q. Introduisons donc une fonction réelle χ, C^1 par morceaux dont le graphe soit de la forme :



Pour $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ notons

$$\begin{array}{llr} \chi\varphi & = \chi(d(P,\cdot))\varphi_1 & \text{au voisinage de } P \\ & = \chi(d(Q,\cdot))\varphi_1 & \text{au voisinage de } Q \\ & = \varphi_2 & \text{sur l'anse} \\ & = 0 & \text{ailleurs} \end{array}$$

Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de χ telles que $C_2\|\varphi\|_{q_\varepsilon} \le \|\chi\varphi\|_{q_\varepsilon} + \|(1-\chi)\varphi\|_{q_\varepsilon} \le C_1\|\varphi\|_{q_\varepsilon}$ et de même pour la norme H_1.

Le contrôle obtenu pour $\chi\varphi$ pourra donc se reporter à φ et réciproquement.

Notons donc $B = \big\{x \in M,\ d(P,x) \ge 1)$ et $(Q,x) \ge 1\big\}$. Dans B^c on pourra faire une séparation des variables en paramètrant l'anse par $(s,\theta) \in [0,L] \times S^{n-1}$ et $B(x,1)$ (pour $x = P, Q$) par les coordonnées polaires $(r,\theta) \in]0,1[\times S^{n-1}$. Notons d_0 la différentielle de S^{n-1} et d_0^* son adjoint pour la métrique canonique de S^{n-1}. Les dérivées suivant r ou s seront notées par $\ '$. Enfin $\langle\ ,\ \rangle$ note le produit scalaire des formes différentielles de S^{n-1} et $|\ \ |$ la norme associée. On a alors

Proposition 3.7. — *Soit $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathcal{D}(q_\varepsilon)$*, $\operatorname{Supp}\varphi \subset B^c$, *alors*

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \sum_{x=P,Q} \int_{B(x,1)-B(x,\varepsilon)} & r^{n-2p-1}\Big(|\alpha_1'|^2 + |d_0\beta_1|^2 + |d_0^*\beta_1|^2 \\ & + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|^2 + \frac{1}{r^2}|d_0^*\alpha_1|^2 - 4\langle\frac{d_0^*\alpha_1}{r},\beta_1\rangle\Big) \\ & + \frac{1}{r^{n-2p+1}}|(r^{n-2p+1}\beta_1)'|^2 \end{aligned}$$

où on a écrit $\varphi_1 = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1$ dans les coordonnées polaires au voisinage de P et de Q et où

$$q_\varepsilon(\varphi_2^s) = \int_{C_1} |\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\big(|d_0\alpha_2|^2 + |d_0^*\alpha_2|^2 + |d_0\beta_2|^2 + |d_0^*\beta_2|^2\big)$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
q_\varepsilon(\varphi) &= \int_{M_\varepsilon} |d\varphi_1|^2 + |d^*\varphi_1|^2 + \int_{C_\varepsilon} |d(h_{1/\varepsilon}\varphi_2)|^2 + |d^*(h_{1/\varepsilon}\varphi_2)|^2 \\
&= \sum_{x\in\{P,Q\}} \int_{B(x,1)-B(x,\varepsilon)} r^{n-2p-1}\Big(|\alpha_1'|^2 + |d_0\beta_1|^2 + |d_0^*\beta_1|^2 + \frac{1}{r^2}\big(|d_0\alpha_1|^2 + |d_0^*\alpha_1|^2\big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{r^{n-2p+1}}|r^{n-2p+1}\beta_1)'|^2 - 2r^{n-2p-1}\langle\alpha_1', d_0\beta_1\rangle - \frac{2}{r^2}\langle d_0^*\alpha_1, (r^{n-2p+1}\beta_1)'\rangle \\
&\quad + \int_{C_1} |\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\big(|d_0\alpha_2|^2 + |d_0^*\alpha_2|^2 + |d_0\beta_2|^2 + |d_0^*\beta_2|^2\big) \\
&\quad - \frac{2}{\varepsilon}\big(\langle d_0^*\alpha_2, \beta_2'\rangle + \langle\alpha_2', d_0\beta_2\rangle\big)
\end{aligned}
$$

En intégrant par parties les deux derniers termes de la première intégrale on obtient :

$$
-2\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^2}\langle d_0\alpha_1^*, (r^{n-2p+1}\beta_1)'\rangle = -4\int_\varepsilon^1 r^{n-2p-2}\langle d_0^*\alpha_1, \beta_1\rangle + 2\langle d_0^*\alpha_1(\varepsilon), \varepsilon^{n-2p-1}\beta_1(\varepsilon)\rangle
$$

l'intégrale des deux derniers termes de la deuxième intégrale vaut :

$$
\frac{2}{\varepsilon}\langle d_0^*\alpha_2(s), \beta_2(s)\rangle\Big|_0^L .
$$

On conclut alors grâce aux conditions de recollement. ∎

Terminons ce paragraphe par le rappel de deux résultats qui seront cruciaux dans la preuve du théorème. Le premier est une re-énonciation des résultats de la proposition 2.1 de [AC] sur le prolongement harmonique.

PROPOSITION 3.8. — *Notons pour un ouvert régulier U de $\mathbf{R}^n$, $H^1_T(\Lambda^p U) = \left\{\alpha \in H^1(\Lambda^p U) \text{ et } \frac{\partial}{\partial r} \lrcorner\ \alpha = 0,\ \forall r > 0\right\}$ c'est-à-dire les formes purement tangentielles.*

Soit $P_\varepsilon : H^1_T(\Lambda^p(B_1 - B_\varepsilon)) \longrightarrow H^1_T(\Lambda^p B_1)$ l'application de prolongement harmonique. Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall\varepsilon < 1$, si $p \neq n-1$, $|||P_\varepsilon||| \leq C$ et si $p = n-1$ et $\alpha \in H^1_T(\Lambda^{n-1}(B_1 - B_\varepsilon))$ vérifie : $\forall r$, $\varepsilon < r < 2\varepsilon$, $\int_{S^{n-1}} \alpha = 0$ alors $\|P_\varepsilon\alpha\| \leq C\|\alpha\|$.

Par dualité de Hodge, on en tire un résultat analogue sur les formes purement normales (le degré à difficulté étant alors $p = 1$).

Remarques 3.9. — En reprenant la démonstration de [AC] (2.1) on voit que la démonstration bloque à "$q(\alpha_\varepsilon) \geq \mu^{(p)}_{n-1}\|\alpha_\varepsilon\|$" pour les formes en dvol(S^{n-1}) mais reste valable si on est orthogonale, ce qui permet d'affirmer le résultat ci-dessus pour $p = n-1$. Par ailleurs, le prolongement harmonique devra être appliqué à $\varphi = \alpha + dr \wedge \beta$. La difficulté sera alors d'avoir des contrôles du type $\|\alpha\|_q \leq \mathrm{C^{te}}\|\varphi\|_q$ pour utiliser la proposition 3.8.

La proposition suivante permettra de contrôler la convergence des espaces propres. Elle est démontrée dans [A 4].

Proposition 3.10. — *Soit (q, D) une forme quadratique fermée, positive définie dans l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ et soient $\|f\|_q^2 = \langle f, f\rangle + q(f)$ sa norme associée et $\mathrm{Sp}(q)$ son spectre. Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbf{R}$ dont les bords ne rencontrent pas $\mathrm{Sp}(q)$ et soit Π_I le projecteur spectral de q relatif à l'intervalle I. Alors il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de l'intervalle I et de la distance du bord de l'intervalle au spectre de q, telle que, pour tout $f \in D$ de norme 1 telle que :*

$$(*) \qquad \exists \lambda \in I \text{ et } \delta > 0 \text{ tels que }, \forall g \in D, \quad |q(f,g) - \lambda\langle f, g\rangle| \leq \delta \|g\|_q \ ,$$

alors f vérifie : $\|f - \Pi_I(f)\|_q \leq C\delta$.

Corollaire 3.11. — *Avec les mêmes hypothèses que la proposition 3.10, si q admet une seule valeur propre μ dans I, de multiplicité 1 et $f \in D$ de norme 1 vérifie $(*)$ alors il existe une fonction propre de norme 1, φ_μ pour μ avec*

$$\|f - \varphi_\mu\|_q = O(\delta) \ .$$

De plus $\|q(f) - \mu\| = O(\delta^2)$.

Corollaire 3.12. — *Toujours avec les mêmes hypothèses, si q admet m valeurs propres dans I et si $f_1, \ldots, f_m$ est une famille orthonormée de $\mathcal{H}$ dont chaque fonction vérifie $(*)$ pour un $\lambda_j \in I$, si l'on note E l'espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_m$ et E_I l'image de la projection Π_I, la distance des espaces vectoriels E et E_I vérifie*

$$d(E, E_I) = O(\delta) \ .$$

Les valeurs propres de la matrice symétrique $[q(f_i, f_j)]$ approximent les valeurs propres de q dans l'intervalle I à δ^2 près.

4. Preuve du théorème A lorsque $1 < p < n-1$

Il nous reste à montrer la minoration : $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\varepsilon) \geq \mu_k$. Pour ce faire nous suivrons cette démarche : si $\varphi_\varepsilon = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p \widetilde{M}_\varepsilon)$ est une p-forme propre pour $\lambda(\varepsilon)$, de norme 1, on lui associe $\Psi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = (P_\varepsilon \varphi_1, \varphi_2^s) \in \mathcal{D}(q_\varepsilon)$ selon la construction (3.5). Grâce à la forme locale de q_ε et du fait de la topologie de S^{n-1} on montre que φ_2^s converge vers 0.

Soit $\lambda(\varepsilon_k)$ une suite qui converge vers λ. Il faut alors montrer qu'une sous-suite de $P_{\varepsilon_k}(\varphi_1)$ converge sur M et donc que λ est dans le spectre limite. Pour cela on applique la proposition 3.8 à α_1 et $dr \wedge \beta_1$, si $\varphi_1 = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1$ au voisinage de l'anse. La principale difficulté technique est ici d'assurer que α_1 et $dr \wedge \beta_1$ sont bornés en H^1-norme. Ceci étant fait on applique la compacité de M pour trouver des solutions faibles suivant un argument classique (détaillé en (4.2) et surtout en [AC] (4.3)) [n.b. c'est pour "$q(\alpha) \ll q(\varphi)$" que le cas $n = 4$ et $n \geq 5$ se séparent].

(4.1) LE CAS $n \geq 5$, $1 < p < n-1$. —

On sait d'après [GM] que la première valeur propre des p-formes différentielles fermées de S^{n-1} est $p(n-p) \geq 6$ dans notre cas. Reprenons l'écriture locale de q_ε (proposition 3.7). Le terme difficile à contrôler est $\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1 \rangle$. Mais, d'après la théorie de Hodge $\alpha_1 = \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}$ avec $d_0\alpha_{1,1} = 0$ et $d_0^*\alpha_{1,2} = 0$ donc, pour tout $r > 0$

$$\big\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1 \big\rangle = \big\langle \frac{d_0^*\alpha_{1,1}}{r}, \beta_1 \big\rangle = \big\langle \eta \frac{\alpha_{1,1}}{r}, \frac{1}{\eta} d_0\beta_1 \big\rangle], \ \forall \eta > 0$$

donc

$$\begin{aligned} \big|\big\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1 \big\rangle\big| &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\eta^2}{r^2}\frac{|d_0^*\alpha_{1,1}|^2}{6} + \frac{1}{\eta^2}|d_0\beta_1|^2\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{\eta^2}{6r^2}|d_0^*\alpha_1|^2 + \frac{1}{\eta^2}|d_0\beta_1|^2\Big) \ . \end{aligned}$$

(d'après le minimax $6 \leq \frac{|d_0^*\alpha_{1,2}|^2}{|\alpha_{1,1}|^2}$). Ainsi

$$\frac{1}{r^2}|d_0^*\alpha_1|^2 + |d_0\beta_1|^2 - 4\big\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1 \big\rangle \geq (1 - \frac{2}{6}\eta^2)|d_0^*\alpha_1|^2 + \big(1 - \frac{2}{\eta^2}\big)|d_0\beta_1|^2 \ .$$

Prenons η tel que $2 < \eta^2 < 3$. Dès lors il existe une constante $\widetilde{C} > 0$ telle que :

$$q_\varepsilon(\varphi) \geq \frac{1}{2}q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \widetilde{C}\big(q(\alpha_1) + q(dr \wedge \beta_1)\big) \ .$$

Étendons φ_1 harmoniquement à M ; d'après la proposition 3.8 et comme dans [AC] §2, on a :

$$q_\varepsilon(\varphi) \geq \frac{1}{2}q_\varepsilon(\varphi_2^s) + Cq(P_\varepsilon\varphi_1) \ . \tag{4.1}$$

On peut alors utiliser, du côté de l'anse comme de la variété M des arguments de suite extraites.

PROPOSITION 4.2. — *Soit ε_k une suite telle que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ et pour laquelle il existe $\varphi(k)$ forme propre normée de Δ_{ε_k} pour la valeur propre $\lambda(k)$. Supposons que $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda(k)$ existe. Alors λ est dans le spectre de M et $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_2^s(k)\| = 0$, la forme propre se confine sur M.*

Démonstration. — Comme $1 < p < n-1$ ni α_2 ni β_2 ne sont de degré 0 ou $(n-1)$ et donc d'après l'écriture locale de q_ε et l'inégalité (4.1) :

$$\|\varphi_2^s(k)\|^2 \leq O(\varepsilon_k^2)q_{\varepsilon_k}(\varphi_2^s(k)) \leq O(\varepsilon_k^2)\lambda(k) \ .$$

Mais la suite $\lambda(k)$ est bornée, on a donc $\lim_{k\to\infty} \varphi_2^s(k) = 0$ Par ailleurs, comme $\frac{1}{\varepsilon^2} \geq 1$, la suite $\Psi_{\varepsilon_k}(\varphi(k))$ est bornée dans $\mathcal{H}^1$, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement H^1 et en norme L_2. Soit $\varphi \in \mathcal{H}^1$ la limite. Alors $\varphi = (\varphi_1, 0)$ et $\|\varphi_1\| = 1$.

En effet $\|\varphi(k)\| = 1$ et en notant toujours $\varphi(k)$ la suite extraite

$$\int_{B(P,\varepsilon_k)\cup B(Q,\varepsilon_k)} |P_{\varepsilon_k}\varphi_1(k)|^2 = 0$$

car

$$\sqrt{\int_{B(P,\varepsilon_k)} |P_{\varepsilon_k}\varphi_1(k)|^2} \leq \Big(\|P_{\varepsilon_k}(\varphi_1(k)) - \varphi_1\| + \sqrt{\int_{B(P,\varepsilon_k)} |\varphi_1|^2}\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

De plus $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ au sens faible et donc fortement aussi d'après le lemme de Weyl. ∎

En raisonnant de même par récurrence sur l'indice de la valeur propre, avec un nombre fini de formes propres orthonormées et $\lambda = \underline{\lim}\lambda_k(\varepsilon)$ on conclut, comme dans [AC], §4.3 :

$$\mu_k \leq \underline{\lim}\lambda_k(\varepsilon) \ .$$ ∎

De la convergence du spectre et des approximations calculées au chapitre 2 de la majoration on conclut à la convergence des espaces spectraux par application de la proposition 3.10 et de ses corollaires.

(4.3) Le cas $n = 4$, $p = 2$. — Ici la première valeur propre pour les 2-formes fermées de la sphère S^3 est 4, on ne peut donc plus contrôler $q(\alpha_1)$ et $q(dr\wedge\beta_1)$ par $q_\varepsilon(\varphi)$, la contribution du terme $-4\big\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1\big\rangle$ devenant trop importante. Mais en prenant dans les mêmes calculs que précédemment $\eta^2 = 1$ on n'a que des intégrants positifs ou nuls. On déduit donc

$$q_\varepsilon(\varphi) \geq \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) \ . \tag{4.4}$$

Et en décomposant pour chaque valeur de r :

$$\alpha_1 = a_4 + A \quad \text{et} \quad \beta_1 = b_4 + B \tag{4.5}$$

où a_4 et b_4 sont dans l'espace propre de la valeur propre 4 et A et B sont orthogonales à cet espace, les calculs précédents montrent qu'il existe $C > 0$ tel que

$$q(A) \leq C q_\varepsilon(\varphi) \quad \text{et} \quad q(dr\wedge B) \leq C q_\varepsilon(\varphi) \ . \tag{4.6}$$

On peut donc étendre harmoniquement $A + dr\wedge B$ en contrôlant la norme H^1.

Prolongeons a_4 et b_4 sur $B(x,\varepsilon)$, $x \in \{P, Q\}$ de la façon suivante :

$$\widetilde{a}_4(r) = \big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^2 a_4(\varepsilon) \ ; \ \widetilde{b}_4(r) = \big(\frac{r}{\varepsilon}\big)^2 b_4(\varepsilon) \ . \tag{4.7}$$

Lemme 4.8. — *Il existe une constante C avec $\|\tilde{a}_4\|_q \leq C\|\varphi\|_q$; $\|dr\wedge\tilde{b}_4\|_q \leq C\|\varphi\|_q$.*

Démonstration. — Examinons par exemple le cas de $\tilde{a}_4$ lorsque $x = P$. Les autres cas se traitent de façon similaire.

$$\|\tilde{a}_4(r)\|_{L^2(B(x,\varepsilon))} = \int_0^\varepsilon \int_{S^3} \frac{r^4}{\varepsilon^4}\cdot\frac{a_4^2(\varepsilon)}{r}\cdot dr\,\mathrm{dvol}_{S^3} = O(|a_4(\varepsilon)|^2)$$

$$
\begin{aligned}
q(\tilde{a}_4(r)) &= \int_0^{\varepsilon} \int_{S^3} \frac{1}{r} \Big| \frac{2r}{\varepsilon^2} a_4(\varepsilon) \Big|^2 + \frac{1}{r^3} 4 \cdot \Big| \frac{r^2}{\varepsilon^2} \cdot a_4(\varepsilon) \Big|^2 \\
&= O\Big(\Big| \frac{a_4(\varepsilon)}{\varepsilon} \Big|^2 \Big)
\end{aligned}
$$

On voit qu'il suffit de contrôler la valeur de $a_4(\varepsilon)$. On a en fait

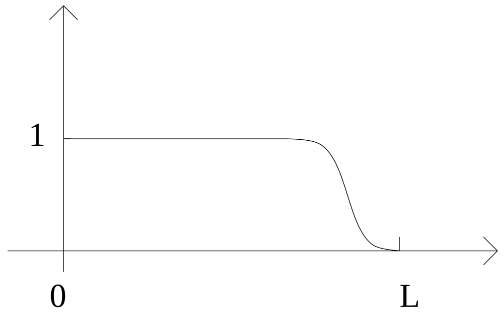
LEMME 4.9. — $|a_4(\varepsilon)|^2 \leq C\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi)$.

Démonstration. — On commence par décomposer les 2-formes $\varphi_2 = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2$ de l'anse comme on l'a fait sur $B(P,1)$, à savoir $\alpha_2 = a_{4,2} + A_2$, $\beta_2 = b_{4,2} + B_2$ où $a_{4,2}(s)$ et $b_{4,2}(s)$ sont dans l'espace propre de 4 et $A_2(s)$, $B_2(s)$ sont orthogonales à cet espace, ceci $\forall s \in [0, L]$.

Les conditions de recollements (3.2) impliquent

$$
|a_4(\varepsilon)| = \sqrt{\varepsilon} |a_{4,2}(0)| \ .
$$

On introduit la fonction η sur l'anse : η vaut 1 au voisinage de 0, nulle au voisinage de L et ne dépend que de s



On a alors

$$
\begin{aligned}
|a_{4,2}(0)|^2 &= 2 \int_0^L \langle (\eta a_{4,2}(s)', \eta a_4(s) \rangle \ ds \\
&\leq C(\eta) \big(2\|\alpha_2\|^2 + \|\alpha_2\| \ \|\alpha_2'\| \big) \ .
\end{aligned}
$$

Or, on sait déjà que $\|\alpha_2'\|^2 \leq q_\varepsilon(\varphi_2^s) \leq 2q_\varepsilon(\varphi)$ et $\|\alpha_2^s\|^2 \leq C \cdot \varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi_2^s) \leq C\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi)$ d'après l'écriture locale de $q_\varepsilon(\varphi)$ et (4.4) ce qui permet de conclure que $|a_4(\varepsilon)|^2 = \varepsilon |a_{4,2}(0)|^2 \leq C \cdot \varepsilon^2 \cdot q_\varepsilon(\varphi)$. ∎

On peut alors démontrer le théorème comme dans le cas $n \geq 5$; $1 < p < n-1$.

5. Preuve du théorème A dans le cas $p = 1$

Remarquons que ce cas n'est vraiment important que lorsque $n = 3$. Pour $n > 3$, le cas $p = 1$ peut se déduire des cas $p = 0$ et $p = 2$ par encadrement. La difficulté ici est la présence d'une forme harmonique de degré 0 sur la sphère, ce qui perturbe les 1-formes différentielles, et l'impossibilité a priori d'utiliser la proposition 3.8 sur le prolongement harmonique.

Le spectre des 1-formes différentielles exactes nous est connu, car il est donné par celui des fonctions. On se concentre donc sur le cas des 1-formes différentielles co-fermées. On montre d'abord le lemme technique.

LEMME 5.1. — *Il existe un choix de la fonction χ du paragraphe 3.6 telle que, pour $p=1$, $\forall \varphi \in H^1(\Lambda^1 \widetilde{M}_2)$ tel que $d^*\varphi = 0$, on ait :*

$$
\begin{aligned}
(5.1) \qquad q_\varepsilon(\chi\varphi) \geq \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \sum_{x\in P,Q} \int_{B(x,\frac{1}{2})-B(x,\varepsilon)} & r^{n-3}\Big(|\alpha_1'|^2 + |d_0\beta_1|^2 + |d_0^*\beta_1|^2 \\
& + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|^2 + \frac{1}{r^2}|d_0^*\alpha_2|^2 - 4\langle \frac{d_0^*\alpha_2}{r}, \beta_2\rangle \Big) \\
& + \frac{1}{r^{n-1}}|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 \ .
\end{aligned}
$$

Remarque. — Ce lemme technique permet de comparer la norme de $\chi\varphi$ (qui est à support compact) avec celle de φ sur $B(x, \frac{1}{2})$. Pour estimer la norme de φ, on utilisera que φ est co-fermée ce qui n'est plus vrai de $\chi\varphi$.

Démonstration. — Il faut choisir χ telle que la différence entre $q_\varepsilon(\chi\varphi)$ et le terme de droite de l'inégalité (5.1) soit toujours positive. Cette différence s'écrit

$$
\begin{aligned}
R = \int_{1/2}^{1} r^{n-3}\chi^2 \Big(& |d_0\beta_1|^2 + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|^2 + \frac{1}{r^2}|d_0^*\alpha_1|^2 - 4\langle \frac{d_0^*\alpha_1}{r}, \beta_1\rangle \\
& + |(\chi\alpha_1)'|^2 + \frac{1}{r^{n-1}}\big(\chi' r^{n-1}\beta_1 + \chi(r^{n-1}\beta_1)'\big)^2 \Big)
\end{aligned}
$$

φ étant co-fermée on a $\frac{1}{r^2}d_0^*\alpha_1 = \frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}\beta_1)'$. Cela entraîne en particulier que pour chaque valeur de r la fonction $(r^{n-1}\beta_1)'$ définie sur la sphère est perpendiculaire aux constantes. Le terme R est donc supérieur ou égal à celui que l'on obtiendrait en ne retenant de β_1 que sa partie perpendiculaire, en chaque valeur de r, aux fonctions constantes de la sphère ; cela revient à dire que l'on peut supposer pour montrer $R \geq 0$ que β_1 est perpendiculaire aux constantes de la sphère. Alors $|d_0\beta_1|^2 \geq 2|\beta_1|^2$ (car 2 est un minorant de la première valeur propre non nulle de S^{n-1}, $n \geq 3$) et donc en négligeant $|d_0\alpha_1|^2$ et

$|(\chi\alpha_1)'|^2$ et en remplaçant $d_0^*\alpha_1$ par $\frac{1}{r^{n-3}}(r^{n-1}\beta_1)'$ on a la minoration

$$\begin{aligned}
R \geq \sum_{P,Q} \int_{1/2}^1 & r^{n-3}\chi^2 2|\beta_1|^2 + \frac{1}{r^{n-1}}\chi^2|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 - 4\frac{\chi^2}{r}(r^{n-1}\beta_1)'\beta_1 \\
& + \frac{1}{r^{n-1}}\Big(\chi'^2(r^{n-1}\beta_1)^2 + \chi^2(r^{n-1}\beta_1)'\Big)^2 + 2\chi\chi'(r^{n-1}\beta_1)(r^{n-1}\beta_1)'\Big) \\
\geq \sum_{P,Q} \int_{1/2}^1 & \frac{1}{r^{n-1}}\Big(\big(\frac{2\chi^2}{r^2} + \chi'^2\big)(r^{n-1}\beta_1)^2 + 2\chi^2\big((r^{n-1}\beta_1)'\big)^2 \\
& + 2\chi(r^{n-1}\beta_1)'\big(-\frac{2\chi}{r} + \chi'\big)r^{n-1}\beta_1\Big) \\
\geq \sum_{P,Q} \int_{1/2}^1 & \frac{1}{r^{n-1}}\Big(\frac{2\chi^2}{r^2} + \chi'^2 - \frac{1}{2}\big(-\frac{2\chi}{r} + \chi'\big)^2\Big)(r^{n-1}\beta_1)^2 \\
\geq \sum_{P,Q} \int_{1/2}^1 & r^{n-1}\big(\frac{1}{2}\chi'^2 + \frac{2\chi\chi'}{r}\big)\beta_1^2\ .
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir χ avec $\frac{1}{2}\chi'^2 + \frac{2\chi\chi'}{r}$ positif. On prend

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } r \geq \frac{5}{8} \\ 5 - 8r & \text{si } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{8}\ . \end{cases}$$

∎

La suite a pour objectif de distinguer dans les 1-formes co-fermées celles qui sont co-exactes. L'anse crée une 1-forme harmonique qui doit être en ds le long de l'anse, pour s'assurer que cette forme existe et qu'il n'y en a pas d'autres on doit construire un quasi-mode à partir de ds et montrer qu'il n'y a en fait pas de petites valeurs propres pour les 1-formes co-exactes, et donc notre quasi-mode approchera nécessairement une 1-forme harmonique. Ce deuxième fait n'est pas évident et nous le démontrons en utilisant un résultat récent de J. Mac Gowan.

Ayant étudié le bas du spectre nous essaierons de conclure de la même façon que précédemment.

Théorème 5.2. — *Le spectre des 1-formes co-exactes de $\widetilde{M}_\varepsilon$ est minoré par une constante $C > 0$, indépendante de ε.*

Dans la preuve on utilise le

Lemme ([McG], lemme 2.3). — *Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de $\widetilde{M}_\varepsilon$ par des ouverts, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k, \ldots$, soient $\mu(U_i)$ la première valeur propre des 2-formes exactes de U_i avec condition normale au bord, $\mu(U_{ij})$ la première valeur propre des 1-formes exactes de U_{ij} avec condition normale au bord. Alors le nombre*

$$C = \frac{1}{\sum_i \Big[\frac{1}{\mu(U_i)} + \sum_{j, U_{ij}\neq\emptyset} \Big(\frac{C_\rho}{\mu(U_{ij})} + 1\Big)\Big(\frac{1}{\mu(U_i)} + \frac{1}{\mu(U_j)}\Big)\Big]}$$

minore la $N^{\text{ième}}$ valeur propre des 2-formes exactes (ou des 1-formes co-exactes) de $\widetilde{M}_\varepsilon$. $N = 1 + \sum_i \dim H^1(U_{ij}, \mathbf{R}) + \sum_{i,j} \dim H^0(U_{ijk}, \mathbf{R})$. C_ρ est une constante dépendant du choix d'une partition de l'unité associée au recouvrement U_i.

Démonstration. — On choisit le recouvrement suivant de $\widetilde{M}_\varepsilon$:

$$U_1 = M_\varepsilon J = M - \big(B(P,\varepsilon) \cup B(Q,\varepsilon)\big)$$
$$U_2 = C_\varepsilon J \cup \big(B(P,1) - B(P,\varepsilon)\big) \cup \big(B(Q,1) - B(Q,\varepsilon)\big) \ .$$

On constate que $U_{12} = B(P,\varepsilon,1) \cup B(Q,\varepsilon,1)$ en notant $B(x,\varepsilon,1) = B(x,1) - B(x,\varepsilon)$. Donc $\dim H^1(U_{12}) = 0$, $U_{ijk} = \emptyset$ et $N = 1$, dans le Lemme de McGowan.

Afin d'estimer la première valeur propre des 1-formes co-exactes de $\widetilde{M}_\varepsilon$, on s'est donc ramené au cas des 2-formes exactes de U_1 et U_2 et des 1-formes exactes de U_{12}.

D'après [AC], $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(U_1)$ est égale à la première valeur propre des 2-formes exactes de M est donc minorée par une constante strictement positive, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(U_{12})$ est la première valeur propre des 1-formes exactes de $B(x,1)$ avec condition normale nulle et est également minoré par une constante strictement positive. Il reste donc à se concentrer sur le cas de $\mu(U_2)$.

Au lieu d'examiner les 2-formes exactes de U_2 avec condition normale nulle, on regarde les 1-formes co-exactes de U_2 avec conditions tangentielles nulles.

Comme ingrédient pour l'estimation de $\mu(U_2)$ on va utiliser explicitement le fait que l'on travaille avec des 1-formes φ co-exactes, à savoir l'équation $d^*\varphi = 0$ et le fait que φ est orthogonale aux 1-formes harmoniques de U_2 (avec condition tangentielle nulle). L'avantage ici est que l'on connaît précisément ces 1-formes harmoniques. Comme U_2 est homotope à S^{n-1}, $n \geq 3$, il n'y en a qu'une :

$$\omega_0 = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{(n-1)/2}} \operatorname{Vol} S^{n-1} \ ds & \text{sur l'anse} \\ \pm \dfrac{\varepsilon^{(n-1)/2}}{\operatorname{Vol} S^{n-1}} \cdot \dfrac{dr}{r^{n-1}} & \text{sur } B(x,\varepsilon,1) \ (+ \text{ si } x = P \text{ et - si } x = Q) \ . \end{cases}$$

Soit $\varphi(k) \in H^1_{\tan}(\Lambda^1 U_2)$ avec

$$\Delta_{\varepsilon_k} \varphi(k) = \mu(k)\varphi(k), \quad \lim_{k \to \infty} \mu(k) = \mu \ ,$$

$$\|\varphi(k)\| = 1 \text{ et } \varphi(k) \ \text{ co-exacte} \ .$$

Il s'agit de montrer que $\mu > 0$, ce qui impliquera que $\mu(U_2)$ est borné inférieurement par une constante positive lorsque $\varepsilon \to 0$. On écrit $\varphi(k) = (\varphi_1(k), \varphi_2(k))$ alors en décomposant en partie tangentielle et partie normale on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(k) = C_1(k)(r,\theta) \dfrac{dr}{r^{n-1}} + \psi_1(k) \\ \varphi_2(k) = C_2(k)(s,\theta) \dfrac{ds}{\varepsilon^{(n-1)/2}} + \psi_2(k) \quad (\theta \in S^{n-1}) \end{cases} \tag{5.3}$$

$$(5.4) \qquad \varphi(k) \;\text{ co-fermée } \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} C_1(k)(r,\theta) = r^{n-3} d_0^* \psi_1(k)(r,\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial s} C_2(k)(r,\theta) = \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} d_0^* \psi_2(k)(r,\theta) \end{cases}$$

On en déduit que pour chaque valeur de r, $\langle \frac{\partial}{\partial r} C_1(k), 1\rangle = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}(\langle C_1(k), 1\rangle) = 0 \Longrightarrow$ $\langle C_1(k), 1\rangle$ est constante en r. De même $\langle C_2(k), 1\rangle$ est constante en s et il reste à déterminer cette constante. Du fait que $\langle\langle \varphi(k), \omega_0\rangle\rangle = 0$, cette constante doit être nulle. Ainsi $C_1(k)$ et $C_2(k)$ sont d'intégrale nulle sur S^{n-1}. On obtient donc, d'après le minimax :

$$(5.5) \qquad |d_0 C_1(k)|^2 \geq \Lambda_1(S^{n-1}) \; |C_1(k)|^2, \quad \forall r$$

$$|d_0 C_2(k)|^2 \geq \Lambda_1(S^{n-1}) \; |C_2(k)|^2, \quad \forall s$$

si $\Lambda_1(S^{n-1})$ est la première valeur propre non nulle des fonctions de S^{n-1}.

Lorsque $n > 4$, $\Lambda_1(S^{n-1}) \geq 4$ et on peut faire les même majorations que dans le cas $1 < p < n-1$ (en fait on est parvenu à éliminer la 0-forme harmonique de la sphère qui perturbait le raisonnement).

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_2(k) = 0$ et μ est dans le spectre des 1-formes avec conditions tangentielles sur $B(P,1) \cup B(Q,1)$.

Lorsque $n \leq 4$ il faut utiliser plus fortement l'hypothèse que $\varphi(k)$ est co-fermée, et on doit revenir à la formule du lemme 5.1.

Écrivons $\varphi_1(k) = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1$, $\varphi_2(k) = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2$, $d^*\varphi(k) = 0 \Longrightarrow d_0^*\alpha_1 = \frac{1}{r^{n-3}}(r^{n-1}\beta_1)'$.

Introduisons cela dans la formule 5.1. On obtient :

$$\begin{aligned}
q_{\varepsilon_k}(\chi J\varphi(k)) &\geq \frac{1}{2} q_{\varepsilon_k}\left(\varphi_2^s(k)\right) + \sum_{x=P,Q} \int_{B(x,\frac{1}{2})-B(x,\varepsilon_k)} r^{n-3}\Big(|\alpha_1'|^2 + |d_0\beta_1|^2 + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|^2 \\
&\qquad + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{r^{n-3}}(r^{n-1}\beta_1)'\Big)^2 - 4\langle \frac{1}{r^{n-2}}(r^{n-1}\beta_1)', \beta_1\rangle\Big) + \frac{1}{r^{n-1}}|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 \\
(5.6) \qquad &\geq \frac{1}{2} q_{\varepsilon_k}\left(\varphi_2^s(k)\right) + \sum_{x=P,Q} \int_{B(x,\frac{1}{2})-B(x,\varepsilon_k)} r^{n-3}\left(|\alpha_1'|^2 + |d_0\beta_1|^2\right) + r^{n-5}|d_0\alpha_1|^2 \\
&\qquad + \frac{2}{r^{n-1}}|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 - \frac{4}{r}\langle (r^{n-1}\beta_1)', r^{n-2}\beta_1\rangle \\
&\geq \frac{1}{2} q_{\varepsilon_k}\left(\varphi_2^s(k)\right) + \sum_{x=P,Q} \int_{B(x,\frac{1}{2})-B(x,\varepsilon_k)} r^{n-3}|\alpha_1'|^2 + r^{n-5}|d_0\alpha_1|^2 + r^{n-3}|d_0\beta_1|^2 \\
&\qquad + \frac{2}{r^{n-1}}|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 - \frac{4}{r^{n-1}}\langle (r^{n-1}\beta_1)', \beta_1\rangle \\
&\geq \frac{1}{2} q_{\varepsilon_k}\left(\varphi_2^s(k)\right) + \sum_{x=P,Q} \int_{B(x,\frac{1}{2})-B(x,\varepsilon_k)} r^{n-3}|\alpha_1'|^2 + r^{n-5}|d_0\alpha_1|^2 + r^{n-3}|d_0\beta_1|^2 \\
&\qquad + \frac{2}{r^{n-1}}(1-\eta^2)|(r^{n-1}\beta_1)'|^2 - \frac{2}{\eta^2} r^{n-3}|\beta_1|^2, \qquad \forall \eta, \;\; 0 < \eta \leq 1 \;.
\end{aligned}$$

Lorsque $n=4$, $\Lambda_1(S^3)=3$. On peut donc choisir $\eta<1$ pour obtenir une majoration uniforme de $q(\alpha_1)$, $q(dr\wedge\beta_1)$ et $q_{\varepsilon_k}(\varphi_2^s(k))$ par $q_{\varepsilon_k}(\varphi(k))$. De plus, $\|\varphi_2^s\|^2\le\varepsilon_k^2 q_{\varepsilon_k}(\varphi(k))$, on conclut donc comme précédemment.

Lorsque $n=3$ le terme $|d_0\beta_1|^2$ ne suffit pas à compenser $\frac{2}{\eta^2}|\beta_1|^2$, car $\Lambda_1(S^2)=2$. En posant $\eta=1$ dans (5.6) on obtient tout de même $q_{\varepsilon_k}(\varphi_2^s(k))\le 2q_{\varepsilon_k}(\varphi(k))$. Par ailleurs, en scindant α_1 et β_1 suivant l'espace propre de valeur propre 2 et son supplémentaire orthogonal :

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_{1,2}+\alpha_{1,\perp}\\ \beta_1=\beta_{1,2}+\beta_{1,\perp}\end{cases}\tag{5.7}$$

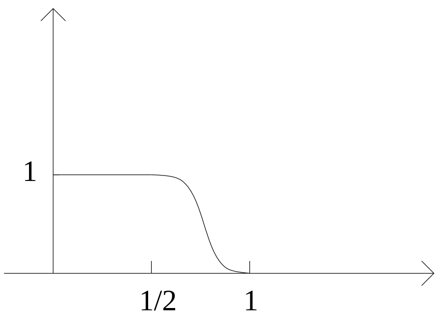
et en choisissant $\eta<1$ on obtient un contrôle de $q(\alpha_{1,\perp})$ et $q(dr\wedge\beta_{1,\perp})$ par $q_{\varepsilon_k}(\varphi(k))$. Pour ce qui est des termes $\alpha_{1,2}$ et $\beta_{1,2}$, on pratique comme pour le cas $n=4$, $p=2$. C'est-à-dire que l'on prolonge directement à M par :

$$\begin{cases}\tilde\alpha_{1,2}=\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^2\alpha_{1,2}(\varepsilon)\\ \tilde\beta_{1,2}=\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^2\beta_{1,2}(\varepsilon)\ .\end{cases}\tag{5.8}$$

On contrôle la norme de l'extension comme dans le cas $n=4$, $p=2$. On peut alors appliquer le raisonnement habituel de suites extraites. Donc μ est dans le spectre des 1-formes avec conditions tangentielles de $B(P,1)\cup B(Q,1)$. Ce spectre ne contient pas 0 et donc $\mu>0$. Ceci achève la démonstration du théorème 5.2. ∎

Pour terminer la preuve du théorème A dans le cas $p=1$ on pratique comme suit : la 1-forme ω_0 harmonique sur U_2 est proche d'une véritable forme harmonique ω_H. Si maintenant on considère φ co-exacte, elle est perpendiculaire à ω_H, on montre qu'alors on peut faire un prolongement harmonique pour φ et raisonner comme dans les autres cas par suite extraite pour étudier la limite du spectre.

Proposition 5.9. — *Il existe $\omega_H\in H^1(\Lambda^1\widetilde{M}_\varepsilon)$, $\Delta\omega_H=0$ et $\|\omega_H-\eta.\omega_0\|_q=O\big(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\big)$, où η est une fonction de graphe*



qui permet de voir ω_0 dans $H^1(\Lambda^1\widetilde{M}_\varepsilon)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.10 compte tenu de l'absence de petites valeurs propres et des estimées :

$$\|\eta\cdot\omega\| = 1 + O(\varepsilon) \text{ et } q(\eta\cdot\omega_0) = O(\varepsilon^{n-1})\ . \qquad \blacksquare$$

Soit maintenant φ une 1-forme co-exacte de $\widetilde{M}_\varepsilon$, normée. Pour montrer que l'on peut contrôler $q(\alpha_1)$ et $q(dr\wedge\beta_1)$ à l'aide de $q_\varepsilon(\varphi)$ on va scinder β_1 et β_2 en parties constantes sur la sphère et orthogonale aux constantes. En utilisant que φ est perpendiculaire à ω_H qui est bien approchée par la proposition 5.9 on montre que la partie proportionnelle aux constantes est négligeable. Écrivons

$$\text{(5.10)}\qquad \begin{cases} \beta_1 dr = C_1(r)\frac{dr}{r^{n-1}} + \bar\beta_1(r,\theta)dr \\ \beta_2 ds = C_2(s)\frac{ds}{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}} + \bar\beta_2(s,\theta)ds \end{cases}$$

et pour tout r ou s, $\bar\beta_1$ et $\bar\beta_2$ sont d'intégrale nulle sur S^{n-1}.

Remarque 5.11. — C_1 n'intervient pas dans le terme $\left(\frac{d_0^*\alpha_1}{r},\beta_1\right)$. On a donc d'après le lemme (5.1) et en prolongeant comme dans (5.8) pour les termes de valeur propre 2 sur S^{n-1} (ce cas n'intervient que pour $n=3$) une majoration de $q_{\varepsilon_k}(\varphi_2^s)$ et de $\|P_\varepsilon(\alpha_1+\bar\beta_1 dr)\|_q$ par $q_\varepsilon(\varphi)+\|\varphi\|^2$ et de plus $\|\alpha_2+\bar\beta_2\ ds\|^2\le\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi)$.

Étudions maintenant C_1 et C_2. On peut arriver à étendre de façon contrôlée $C_1(r)\frac{dr}{r^{n-1}}$.

Proposition 5.12. — *C_1 et C_2 sont constantes et $C_1=C_2=O(\varepsilon^{n-1})$.*

Démonstration. — φ est co-exacte donc $d_0^*\alpha_1 = \frac{1}{r^{n-3}}(r^{n-1}\beta_1)'$ et $\varepsilon d_0^*\alpha_2 = \beta_2'$. En faisant le produit scalaire avec 1 on en déduit $C_2'=0$ et $C_1'=0$ donc $C_1=C_2$ constant. De plus φ est perpendiculaire à ω_H donc

$$\left|\langle\!\langle \varphi, \omega_0{}_{\big|B(P,\frac12)\cup B(Q,\frac12)}\rangle\!\rangle\right| \le \sqrt{\int_{r\ge\frac12}|\eta J\omega_0|^2} + \|\eta\omega_0-\omega_H\|\ .$$

C'est-à-dire en exprimant le premier terme

$$C_1 \cdot \Big(2 \int_{r>\varepsilon} r^{n-1} \langle \frac{dr}{r^{n-1}}, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \frac{dr}{r^{n-1}} \rangle dr + \int_0^L \langle \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon^{n-1}}}, ds \rangle \Big) = O\Big(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\Big)$$
$$\Longrightarrow C_1 = O(\varepsilon^{n-1}) \ . \qquad \blacksquare$$

La première conséquence est que $\|C_2 \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon^{n-1}}}\| = O(\sqrt{\varepsilon^{n-1}})$ donc avec la remarque 5.11, $\|\varphi_2^s\|^2 \leq O(\varepsilon^2) q_\varepsilon(\varphi)$. Enfin si on prolonge $C_1 \frac{dr}{r^{n-1}}$ par $\frac{C_1}{\varepsilon^{n-1}} dr$ on obtient un prolongement de φ_1 uniformément borné par $q_\varepsilon(\varphi)$.

Grâce à ce prolongement, on peut raisonner comme précédemment avec des suites extraites, pour les formes co-exactes. On obtient que toute limite de valeur propre de formes co-exactes sur $\widetilde{M}_\varepsilon$ est dans le spectre des formes co-fermées de M. En fait cette limite ne peut être 0 car les 1-formes harmoniques de M nous donnent de bons quasi-modes des formes harmoniques de $\widetilde{M}_\varepsilon$ autres que ω_H, d'après le chapitre 2 de la majoration. Une forme co-exacte est orthogonale aux formes harmoniques et donc toute limite L_2 de formes co-exactes sera perpendiculaire aux formes harmoniques de M.

Remarque 5.13. — On suppose ici connue la topologie de $\widetilde{M}_\varepsilon$, et donc $\dim H^1(\widetilde{M}_\varepsilon) = \dim H^1(M) + 1$. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'on peut en fait montrer cette égalité en montrant que les quasi-modes construits par les 1-formes harmoniques de M et la forme en ds sur l'anse approche totalement l'espace des formes harmoniques de $\widetilde{M}_\varepsilon$.

6. Démonstration du théorème B

On construit une variété $\widetilde{M}_\varepsilon$ en réunissant plusieurs variétés compactes $(M_i)_{1\leq i\leq N}$ par des anses cylindriques de rayon ε, comme on l'a fait dans l'introduction, puis on étudie la convergence du spectre de Laplacien de Hodge quand $\varepsilon \to 0$. On obtient en particulier une estimation précise des petites valeurs propres et un calcul de $\dim H^1(\widetilde{M}_\varepsilon)$.

Soient $S = \{1, \ldots, N\}$ et M_i, $i \in S$ des variétés riemanniennes connexes compactes orientables de dimension $n \geq 3$. Soit $A \subset S \times S$ un ensemble symétrique ($(i,j) \in A \Longleftrightarrow (j,i) \in A$). On construit une variété compacte orientable $\widetilde{M}_\varepsilon$ en ajoutant une anse $C_{ij} = [0, L_{ij}] \times S_\varepsilon^{n-1}$ entre M_i et M_j si $(i,j) \in A$, en enlevant à M_i et M_j des boules de rayon ε centrées en $P_{ij} \in M_i$ et $Q_{ij} \in M_j$, ($P_{ji} = Q_{ij}$ si $i \neq j$). On suppose que *$\widetilde{M}_\varepsilon$ est connexe*. Alors $\widetilde{M}_\varepsilon$ admet $(N-1)$ petites valeurs propres non nulles pour les fonctions donc $\widetilde{M}_\varepsilon$ aura des petites valeurs propres en degré 0, 1, $(n-1)$ et n. De plus, en degré 1 et $(n-1)$, peuvent apparaître de nouvelles formes harmoniques. En degré $1 < p < n-1$, $\dim H^p(\widetilde{M}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M_j)$ et il n'y a pas de petites valeurs propres.

On va chercher d'une part à estimer le comportement asymptotique des petites valeurs propres en degré 0 et d'autre part à décrire l'espace des 1-formes harmoniques. Nous sommes ici dans une situation simple où il est possible de décrire la topologie par des méthodes purement d'analyse (théorème 6.8).

6.1. Le cas des fonctions.

Le spectre limite des fonctions comporte N fois la valeur propre 0 et $\widetilde{M}_\varepsilon$ est connexe. On a donc $(N-1)$ valeurs propres non nulles de $\widetilde{M}_\varepsilon$ qui tendent vers 0. On peut grâce à la proposition 3.10 et à ses corollaires décrire l'asymptotique de ces petites valeurs propres ainsi que leurs espaces propres.

On commence par construire des fonctions-test, ou quasi-modes, destinées à approcher les fonctions propres. Soient

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Vol} M_i}} \begin{cases} 1 & \text{sur } M_i(\varepsilon) \\ 0 & \text{sur } M_j(\varepsilon),\ j \neq i \\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{L_{ij}-s}{L_{ij}} & \text{sur } C_{ij},\quad (i,j) \in A \end{cases} \tag{6.2}$$

où $M_i(\varepsilon) = M_i - \bigcup\limits_{j,(i,j)\in A} B(P_{ij},\varepsilon)$.

Les conditions de recollement (3.2) sont satisfaites. Donc $f_i \in \mathcal{D}(q_\varepsilon$ et

PROPOSITION 6.3. — $\forall g \in \mathcal{D}(q_\varepsilon,\ g = (g_1, g_2)$

$$q_\varepsilon(f_i, g) \leq O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\|g\|_{q_\varepsilon}\ .$$

Démonstration

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(f_i,g) &= \sum_{j,(i,j)\in A} \int_0^{L_{ij}} \int_{S^{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \Big(-\frac{1}{L_{ij}}\Big) \frac{\partial g_2}{\partial s} d\theta\ ds \\ &= \sum_{j,(i,j)\in A} -\frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{L_{ij}} \int_{S^{n-1}} \big(g_2(L_{ij},\theta) - g_2(0,\theta)\big) d\theta\ . \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \Big| \int_{S^{n-1}} g_2(0,\theta) d\theta \Big| &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \Big| \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \varepsilon^{n-1} g_1(\varepsilon,\theta)\ d\theta \Big| \\ &\leq O\Big(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\Big) \sqrt{\int_{S_\varepsilon^{n-1}} \big(g_1(\varepsilon,\theta)\big)^2\ d\theta} \end{aligned}$$

Par ailleurs, si g_1 est à support dans $B(P_{ij},1)$

$$g_1(\varepsilon,\theta) = -\int_\varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial r} g_1(r,\theta)\ dr$$

et

$$g_1^2(\varepsilon,\theta) \leq \int_\varepsilon^1 \Big|\frac{\partial}{\partial r} g_1(r,\theta)\Big|^2 r^{n-1}\ dr \int_\varepsilon^1 J \frac{dr}{r^{n-1}}\ .$$

De façon générale, en multipliant g_1 par une fonction de la forme (3.6) et en intégrant sur S^{n-1} on a :

$$\int_{S_\varepsilon^{n-1}} g_1^2(\varepsilon,\theta)\ d\theta \leq O(\varepsilon^{2-n}) \|g_1\|_1^2$$

donc finalement

$$(6.4) \qquad \Big| \int_{S^{n-1}} g_2(0,\theta)d\theta \Big| \leq O(\sqrt{\varepsilon})\ \|g_1\|_1\ .$$

∎

On a par ailleurs les estimées évidentes :

Proposition 6.5. —
$$\|f_i\|^2 = 1 + O(\varepsilon^{n-1}) \quad q_\varepsilon(f_i) = \varepsilon^{n-1} \sum_{j,(i,j)\in A} \frac{\operatorname{Vol} S^{n-1}}{L_{ij} \operatorname{Vol} M_i}$$

et si $i \neq j$, $\langle\langle f_i, f_j \rangle\rangle = O(\varepsilon^{n-1})$ *et*

$$q_\varepsilon(f_i, f_j) = \frac{-\varepsilon^{n-1}}{\sqrt{\operatorname{Vol} M_i \operatorname{Vol} M_j}} \operatorname{Vol} S^{n-1} \frac{1}{L_{ij}}\ .$$

On peut alors appliquer la proposition 3.10 et ses corollaires. Cela nous donne le théorème suivant sur l'asymptotique des petites valeurs propres de $\widetilde{M}_\varepsilon$ et de leur espace propre :

Théorème 6.6. — *Soient* $\gamma_0 = 0 < \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_{N-1}$ *les valeurs propres de la matrice* $B = [b_{ij}]$ *:*

$$\text{si} \quad i \neq j, \quad b_{ij} = \frac{-1}{\sqrt{\operatorname{Vol} M_i \operatorname{Vol} M_j}} \frac{1}{L_{ij}}$$
$$b_{ii} = \frac{-1}{\operatorname{Vol} M_i} \sum_{j,(i,j)\in A} \frac{1}{L_{ij}}$$

et soient $(a_{i1}, \ldots, a_{iN})$ *les vecteurs propres (normés dans* $\mathbf{R}^N$*) correspondants. Alors* $\lambda_i(\varepsilon) = \varepsilon^{N-1}\gamma_i \operatorname{Vol} S^{n-1} + O(\varepsilon^n)$ *et si les* γ_i *sont de multiplicité 1 les fonctions propres correspondantes sont données par*

$$\varphi_i(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} f_j + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\ .$$

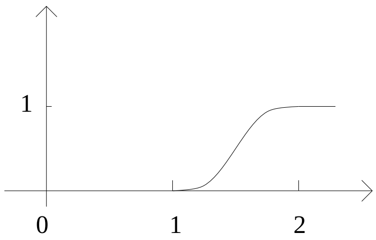
Si les γ_i *ont de la multiplicité alors on fait des paquets des* $\lambda_i(\varepsilon)$ *qui ont le même asymptotique. Les* $\varphi_i(\varepsilon)$ *correspondants donnent alors une approximation de l'espace propre global correspondant à ce paquet.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 3.12. Remarquons que pour cela il faut orthonormaliser les f_i. Soit donc G la matrice ; $G_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$ et $A = G^{-1/2}$ alors, d'après la proposition 6.5, $A = I + O(\varepsilon^{n-1})$. Par ailleurs $\psi_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} f_j$ est orthonormée. Alors d'après les estimées 6.5 $q(\psi_i, \psi_j) = q(f_i, f_j) + O(\varepsilon^{2(n-1)})$, d'où le résultat. ∎

6.7. Le cas des 1-formes

Le spectre des 1-formes exactes est donné par celui des fonctions non constantes, il y a donc $(N-1)$ petites valeurs propres dont l'asymptotique est donné par le théorème 6.6. On sait d'après le théorème 5.2 qu'il n'y a pas de petites valeurs propres pour les 1-formes co-exactes. Il reste donc à décrire les 1-formes harmoniques.

Chaque variété M_i fournit $b_i^1 = \dim H^1(M_i, \mathbf{R})$ quasi-modes de petites valeurs propres en coupant la forme harmonique au voisinage de chaque anse issue de M_i, comme au paragraphe 2. Plus précisément si ω_{ij} est une telle 1-forme harmonique normée ($1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq b_i^1$) et si χ est une fonction de graphe



soit $\chi_\varepsilon(r) = \chi(\frac{r}{\varepsilon})$ et $\omega_{ij}(\varepsilon) = \chi_\varepsilon J \omega_{ij}$ alors

$$\|\omega_{ij}(\varepsilon)\| = 1 + O(\varepsilon^{n-1}), \quad q_\varepsilon(\omega_{ij}(\varepsilon)) = O(\varepsilon^{n-2}) \ .$$

D'autre part, chaque anse C_{ij} nous fournit un quasi-mode de la même façon que dans (2.1),

$$\varphi_{ij}(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}\, S^{n-1}}} ds_{ij} & \text{sur } C_{ij} \\ \pm\eta(r) \dfrac{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\mathrm{Vol}\, S^{n-1}}} \dfrac{dr}{r^{n-1}} & \text{sur } B(x,1) \ (+ \text{ en } x = P_{ij}, \text{ - en } x = Q_{ij}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec η comme en (3.6).

On prétend que l'on a ainsi décrit une approximation de tout l'espace des petites valeurs propres.

Théorème 6.8. — *Soit a le nombre d'anses et $\alpha > 0$ tel que 2α minore les valeurs propres des 1-formes co-exactes et les valeurs propres qui ne tendent pas vers 0 des 1-formes exactes.*

Notons $E_\alpha(\varepsilon)$ l'espace spectral des 1-formes propres de $\widetilde{M}_\varepsilon$ de valeur propre dans $[0,\alpha]$ et $E(\varepsilon)$ l'espace engendré par les quasi-modes décrits : les $\omega_{ij}(\varepsilon)$ et les $\varphi_{ij}(\varepsilon)$. Alors $\dim E = \dim E_\alpha = \sum_{i=1}^{N} b_i^1 + a$ et

$$\mathrm{dist}(E, E_\alpha) = O(\sqrt{\varepsilon}) \ .$$

En particulier $\dim H^1(\widetilde{M}_\varepsilon, \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N} b_i^1 + a - (N-1)$.

Démonstration. — Il est clair que $\dim E = \sum_{i=1}^{N} b_i^1 + a$. Par ailleurs les estimées ci-dessus et la proposition 6.5 nous assure que $\|(1-\pi)_{|E}\| = O(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}})$ si π est la projection orthogonale sur l'espace spectral E_α.

Donc $\pi(E)$ est un sous-espace vectoriel de E_α de même dimension que E. Il suffit donc de montrer que $\pi(E) = E_\alpha$ ou que $\pi(E)^\perp \cap E_\alpha = \{0\}$.

Supposons donc qu'il existe $\varphi \in \pi(E)^\perp \cap E_\alpha$ avec $\|\varphi\| = 1$. Donc $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon^1$ et d'après la décomposition de Hodge $\varphi = df + \psi$ avec $d^*\psi = 0$.

$\varphi J \in E_\alpha \Longrightarrow d^*\varphi$ est combinaison linéaire des fonctions propres de valeurs propres inférieures à $\alpha \Longrightarrow df \in E_\alpha$ alors $\psi J \in E_\alpha$.

Donc f est combinaison linéaire de $\varphi_i(\varepsilon)$ décrits précédemment, de plus on peut supposer $\langle\langle f, 1\rangle\rangle = 0$.

Notons ici ψ_i la base orthonormalisée des $\pi(f_i)$ (projection de f_i sur l'espace spectral des valeurs propres inférieures à α)

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \psi_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i + O\Big(\varepsilon^{\frac{n}{2}} (\Sigma\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_\varepsilon^1 \ . \tag{6.9}$$

$$\langle\langle f, 1\rangle\rangle = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i = O\Big(\varepsilon^{\frac{n}{2}} (\Sigma\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad \text{si} \quad v_i = \sqrt{\operatorname{Vol} M_i}$$

donc

$$\|f\|^2 = (\Sigma\alpha_i^2)\big(1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\big)$$

et

$$df = \Sigma\alpha_i \, df_i + O\Big(\varepsilon^{\frac{n}{2}} \sqrt{\Sigma\alpha_i^2}\Big) \Longrightarrow$$

$$\|df\|^2 = \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\in A}} \Big(\frac{\alpha_i}{v_i} - \frac{\alpha_j}{v_j}\Big)^2 \frac{\varepsilon^{n-1} \operatorname{Vol} S^{n-1}}{L_{ij}} + O\Big(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}} \Sigma\alpha_i^2\Big) \ .$$

La forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^N$ par :

$$\sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\in A}} \Big(\frac{x_i}{v_i} - \frac{x_j}{v_j}\Big)^2 \frac{1}{L_{ij}} + \Big(\sum_{i=1}^{N} x_i v_i\Big)^2 \quad \text{est définie positive}$$

(car on a supposé connexe le graphe construit par A). Elle est donc équivalente à Σx_i^2 et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|df\|^2 \geq C\varepsilon^{n-1} \Big(\sum_{1}^{N} \alpha_i^2 - (\Sigma\alpha_i v_i)^2\Big) - O(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}} \Sigma\alpha_i^2)$$

et donc d'après (6.9) :

$$\|df\|^2 \geq C' \varepsilon^{n-1} \Big(\sum_{1}^{N} \alpha_i^2\Big) \ . \tag{6.10}$$

Il est par ailleurs clair que $\|df\|^2 = O\Big(\varepsilon^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i^2\Big)$.

D'autre part, ψ peut être décomposée au niveau de chaque anse comme en (5.3) et puisque ψ est co-fermée on peut écrire au voisinage de A_{ij} et dans les coordonnées polaires :

$$
\begin{aligned}
\psi J &= (\psi_1, \psi_2) \\
\psi_1 &= \alpha_1 + \frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{r^{n-1}} C_{ij}\ dr + B_1\ dr \\
\psi_2 &= \alpha_2 + C_{ij}\ ds_{ij} + B_2\ ds_{ij}
\end{aligned}
$$

B_1 et B_2 étant d'intégrale nulle sur S^{n-1}.

De $\varphi \in \pi(E)^\perp$, $\|(1-\pi)_{|E}\| = O(\sqrt{\varepsilon})$ et $\|\varphi\| = 1$ on tire : $\forall \omega \in E$, $|\langle\langle \varphi, \omega \rangle\rangle| \leq O(\sqrt{\varepsilon})\|\omega\|$. En choisissant $\omega = \varphi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}\, S^{n-1}}} ds_{ij} + O(\sqrt{\varepsilon})$ on obtient

$$(6.11) \qquad \forall (i,j) \in A \quad \left| \Big(\frac{\alpha_i}{v_i} - \frac{\alpha_j}{v_j} \Big) \frac{\varepsilon^{n-1}}{L_{ij}} - C_{ij} \right| = O(\sqrt{\varepsilon}) \ .$$

Par ailleurs $\langle\langle df, \varphi \rangle\rangle = 0$ entraîne

$$(6.12) \qquad \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i<j}} C_{ij} \Big(\frac{\alpha_i}{v_i} - \frac{\alpha_j}{v_j} \Big) \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} = O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}) \ .$$

De (6.11) et (6.12) on conclut donc

$$(6.13) \qquad \Sigma L_{ij} C_{ij}^2 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \ .$$

En reportant cela dans (6.11) on obtient, puisque le graphe est connexe : $\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_i}{v_i} = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_1}{v_1} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ et donc d'après l'écriture de $\|df\|^2$ dans (6.9) :

$$(6.14) \qquad \|df\|^2 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \ .$$

Grâce à ces estimées on peut refaire un raisonnement de suite extraite. S'il existe $\varepsilon_k \to 0$ avec $\varphi_k \in E_\alpha(\varepsilon_k) \cap \pi(E(\varepsilon))^\perp$, $\|\varphi_k\| = 1$. Écrivons $\varphi_k = df_k + \psi_k$. D'après (6.14) et (6.13) $\|df_k\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|\psi_{k|A_{ij}}\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, on peut prolonger ψ_k comme précédemment dans (5.3) en contrôlant la H_1-norme. On obtient alors, quitte à extraire une sous-suite, une forme ψ, $\|\psi\| = 1$, ψ est perpendiculaire aux 1-formes harmoniques des M_i et ψ est co-fermée. Donc ψ est co-exacte. Par ailleurs ψ est limite H_1-faible de ψ_k (ou d'une suite extraite) donc $\forall \varphi J \in C_0^\infty\big(\Lambda^1(M_j - \{P_{ij}, Q_{ij}\})\big)$ espace H^1 dense on a : $q(\varphi, \psi) \leq \alpha \sqrt{q(\varphi)}$ et donc $q(\psi) \leq \alpha$. Ce résultat est absurde, vu la définition de α. Donc :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ ; \ \varepsilon < \varepsilon_0 \Longrightarrow \dim E_\alpha(\varepsilon) = \dim \pi(E(\varepsilon)) \ . \qquad \blacksquare$$

Références

[A1] C. ANNÉ, Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité , *Commun. in Partial Differential Equations* **15** (11) (1987), 1617–1630.

[A2] C. ANNÉ, Principe de Dirichlet pour les formes différentielles, *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), 45–450.

[A3] C. ANNÉ, Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité, *Commun. in Partial Diff. Equations* **15** (11) (1990), 1617–1630.

[A4] C. ANNÉ, A note on the generalized Dumbbell problem, *À paraître aux Proceedings of the AMS* (1995).

[AC] C. ANNÉ & B. COLBOIS, Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules, *Journal of Functional Analysis* **115** (1993), 190–211.

[C] J. CHEEGER, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian—, *Problems in Analysis, A symposium in honour of Bochner, Princeton University Press N.J.* (1970), 195–199.

[CC] B. COLBOIS & G. COURTOIS, A note on the first non-zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms, *Manuscripta math.* **68** (1990), 143–160.

[CCdV] B. COLBOIS & Y. COLIN DE VERDIÈRE, Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface à courbure constante, *Comment. Math. Helvetici* **63** (1988), 194–208.

[F] R. FORMAN, Spectral sequences and adiabatic limits, *Prepublication* (1992).

[GM] S. GALLOT & D. MEYER, Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, *J. Math. pures et appl.* **54** (1975), 259–284.

[JM] S. JIMBO & Y. MORITA, Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singular perturbed domain with several thin channels—, *Commun. in Partial Differential Equations* **17** (3 & 4) (1992), 523–552.

[McG] J.K. MAC GOWAN, The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds, *Math. Ann.* **279** (1993), 725–745.

– ◊ –

Colette ANNÉ
Département de Mathématiques
Unité associée au CNRS (URA 758)
Université de Nantes
2 rue de la Houssinière
F-44072 Nantes cedex 03
(France)

Bruno COLBOIS
Département de Mathématiques
Universite de Savoie
Bat^t Le Chablais
F-73376 Le Bourget du Lac cedex
(France)