LAPLACIENS EN INTERACTION

*Colette ANNÉ**

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de l'asymptotique des fonctions propres du Laplacien dans la situation d'un écrasement d'anse : la variété M_ε est obtenue par recollement sur la variété riemannienne compacte X_1 de dimension n de l'anse $X_2(\varepsilon)$ constituée par le bord du tube de rayon ε autour de la variété riemannienne à bord X_2. On suppose le bord Y de X_2 isométrique à une sous-variété de X_1 de codimension d et $d \geq 2$; le recollement se fait alors sur le bord de la variété $X_1(\varepsilon)$ obtenue en excisant sur X_1 le ε-voisinage tubulaire de $Y \subset X_1$ (cette construction sera explicitée par la suite). On a déjà vu ([A1]) que le spectre du Laplacien sur M_ε converge, quand ε tend vers 0, vers l'union des spectres du Laplacien Δ_1 de X_1 et du Laplacien Δ_2 avec conditions de Dirichlet au bord de X_2.

Que deviennent les fonctions propres? Si il est naturel que pour une valeur propre λ_ε de M_ε telle que $\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon$ n'appartienne qu'à l'un des deux spectres limites, l'espace propre relatif à λ donne une bonne approximation de l'espace propre de λ_ε ; lorsque λ appartient aux deux spectres limites il peut y avoir une *interaction* (phénomène de résonnance entre les deux parties de M_ε). Dans ce cas, si f_λ est une fonction propre normée de λ sur X_1 et h_λ sur X_2, ni f_λ ni h_λ ne sont de bonnes approximations d'une fonction propre pour λ_ε mais il faut prendre une combinaison linéaire des deux, et donc une fonction propre grande en norme L^2 sur X_1 l'est aussi sur $X_2(\varepsilon)$. Plus précisément prenons les définitions suivantes :

DÉFINITION. — *Soit $\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon$ une valeur du spectre limite et f_{ε_m} une suite convergente de fonctions propres normées associées. On dira que la suite f_{ε_m}* se localise *si l'une des deux conditions suivantes est vérifée :*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{X_1(\varepsilon_m)} |f_{\varepsilon_m}|^2 = 0 \quad ou \quad \lim_{m\to\infty} \int_{X_2(\varepsilon_m)} |f_{\varepsilon_m}|^2 = 0.$$

Dans le cas contraire on dira que les deux Laplaciens Δ_1 et Δ_2 sont en interaction *pour la valeur propre λ. Si aucune des familles convergentes de fonctions propres ne se localise l'interaction sera dite* totale.

On montre ici que si la codimension d de Y dans X_1 vérifie $d \geq 4$ il n'y a jamais d'interaction ; par contre si d=2 ou d=3 il peut y en avoir une. Le résultat précis se trouve

* Pendant la rédaction de ce texte l'auteur était acueilli par l'EPF de Lausanne et l'ETH de Zürich

énoncé au théorème 3, parag. D. Regardons ici à titre d'exemple le cas où λ est valeur propre simple dans chaque spectre et d=2 ou 3. Notons f une fonction propre normée pour Δ_1 et h une fonction propre normée pour Δ_2; enfin n_2 est la normale unitaire sortante au bord de X_2. Il y a interaction si et seulement si la quantité

$$\alpha = \int_Y f \frac{\partial h}{\partial n_2}$$

est non nulle. Supposons donc α non nulle.

si $d = 2$: les deux valeurs propres $\lambda_\varepsilon^\pm$ de M_ε qui convergent vers λ s'écrivent :

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \lambda \pm 2\pi\alpha\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon \log \varepsilon)$$

et les fonctions propres correspondantes convergent vers

$$\sqrt{2\pi} f \pm h;$$

si $d = 3$: posons $c = \| \frac{\partial h}{\partial n_2} \|^2_{\mathcal{L}_2(Y)}$ les deux valeurs propres $\lambda_\varepsilon^\pm$ de M_ε qui convergent vers λ s'écrivent

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \lambda + \varepsilon \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4\pi^2\alpha^2}}{2} + O(\varepsilon^{3/2})$$

et les fonctions propres correspondantes convergent vers

$$\pi\alpha f + \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4\pi^2\alpha^2}}{2} h.$$

Il s'agit donc de mesurer le couplage de deux problèmes supposés mieux connus. On peut rapprocher cela de l'effet tunnel de la mécanique quantique puisque l'effet tunnel mesure l'interaction de deux puits de potentiel symétriques. Nous nous sommes inspiré pour la résolution de notre problème de l'étude de l'effet tunnel présentée par Helffer et Sjöstrand dans leur travail sur les puits multiples en limite semi-classique (voir [HS1] et [H] pour les références suivantes). La différence principale réside dans le fait que nous travaillons ici uniquement avec les formes quadratiques et non pas avec les opérateurs qu'elles définissent, (on peut en fait trouver une telle approche dans [HS2]) notre construction de M_ε en faisant une variété C^∞ par morceaux seulement, et aussi que, au moins dans le cas d'une valeur propre simple de chaque côté, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante d'interaction.

Le problème principal consiste à trouver un asymptotique de la forme quadratique que définit le Laplacien sur un *espace vectoriel spectral*, c'est-à-dire la somme des espaces propres des valeurs propres appartenant à un petit intervalle autour de λ ; ce développement asymptotique doit être assez fin pour que la diagonalisation de la première estimée de cette forme quadratique donne une bonne approximation des véritables fonctions propres. Pour cela il faut transplanter les fonctions propres des problèmes limites sur M_ε de telle façon que les transplantés permettent de bons calculs ; il faut donc en particulier que les transplantés d'une fonction propre de X_1 et d'une fonction propre de X_2 se recouvrent, l'interaction étant mesurée sur ce recouvrement. Nous appellerons *quasi-modes* ces transplantés. Les quasi-modes que nous avons choisis sont, du côté de X_1, les fonctions propres de X_1 restreintes qu'il faut alors prolonger sur l'anse, et, du côté de l'anse, les fonctions propres de X_2 dont les dérivées normales doivent être prolongées sur un voisinage tubulaire fixé du bord de $X_1(\varepsilon)$. Le plan de ce qui suit est le suivant : nous avons besoin de théorèmes généraux sur l'approximation de formes quadratiques, qui sont rappelés dans les préliminaires, puis vient un chapitre de descriptions où sont fixées les notations. Dans le chapitre suivant nous donnons les estimées nécessaires pour appliquer les théorèmes généraux du début, enfin dans le chapitre conclusion nous donnons tous les résultats que l'on peut en tirer pour l'interaction de l'anse fine avec la variété compacte.

Notons enfin qu'un travail comparable a été mené dans [HM] pour estimer les résonances d'un résonateur borné ayant un tube fin qui le relie à l'extérieur. Par ailleurs dans [A2] nous avions mené cette étude de la perturbation par ajout d'une anse fine dans le cas où X_1 est une surface ; cela nous avait permis d'énoncer un théorème d'augmentation de la multiplicité par ajout d'anse. Un tel théorème pourrait aussi être énoncé dans ce cadre plus général si il y a intéraction, mais son intérêt est moindre car à l'inverse de la dimension 2, il n'y a pas de borne a priori sur la multiplicité, comme l'a montré Colin de Verdière dans [CdV].

Remerciements. — Je tiens à remercier le *referee* pour ses remarques et ses critiques.

A. Préliminaires

On peut définir (voir [H], *p.30*) dans un espace de Hilbert une notion de distance entre deux sous-espaces vectoriels fermés E et F de la façon suivante : notons Π_E la projection orthogonale sur E alors

$$d(E,F) = \inf\{\|\Pi_E \circ \Pi_F - \Pi_E\|, \|\Pi_F \circ \Pi_E - \Pi_F\|\}$$

Si cette distance est assez petite E et F ont même dimension et si elle est finie on peut construire une isométrie naturelle de E sur F (voir [CdV2]). Les résultats suivants se trouvent démontrés dans [A2].

Théorème 0. — *Soit $(q, \mathcal{D})$ une forme quadratique fermée positive définie dans l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}, < .,. >)$ et soient $\|f\|_1^2 =< f, f > +q(f)$ sa norme associée et* Sp(q) *son spectre. Si I est un intervalle ouvert borné de* $\mathbf{R}$ *dont les bords ne rencontrent pas* Sp(q) *et si Π_I est le projecteur spectral de q relatif à l'intervalle I ; alors il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de l'intervalle I et de la distance du bord de l'intervalle au spectre de q, telle que quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{D}$ qui vérifie $< f, f >= 1$ et la propriété :*

$$(*) \qquad \exists \lambda \in I \text{ et } \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } \forall g \in \mathcal{D} \quad |q(f,g) - \lambda < f, g > | \le \delta \|g\|_1$$

alors f vérifie

$$\|f - \Pi_I(f)\|_1 \le C\delta.$$

Par la suite la propriété $(*)$ sera notée, si Δ est l'opérateur associé à q par l'extension de Friedrich : $\|(\Delta - \lambda)f\|_{-1} \le \delta$. Nous utiliserons les deux conséquences suivantes de ce théorème :

PROPOSITION A. — *Dans les mêmes hypothèses que celles du théorème 0, si q admet une seule valeur propre μ dans l'intervalle I, de multiplicité 1, et si $f \in \mathcal{D}$ vérifie $< f, f >= 1$ et $\|(\Delta - \lambda)f\|_{-1} \leq \delta$, alors il existe une fonction propre normée ϕ_μ de q de valeur propre μ qui vérifie*

$$\|f - \phi_\mu\|_1 = O(\delta)$$

de plus μ peut être approximée par :

$$|q(f) - \mu| = O(\delta^2).$$

PROPOSITION B. — *Toujours dans les mêmes hypothèses, si q admet m valeurs propres dans I et si $f_1, \cdots, f_m$ est une famille orthonormée de $\mathcal{H}$ dont chaque fonction vérifie $(*)$ pour un $\lambda_j \in I$ et pour le même δ :*

$$\forall g \in \mathcal{D} \quad |q(f_j, g) - \lambda_j < f_j, g > | \leq \delta \|g\|_1.$$

Alors en notant E l'espace vectoriel engendré par $f_1, \cdots, f_m$ et E_I l'espace spectral, image de Π_I, la distance des espaces vectoriels E et E_I vérifie :

$$\mathrm{d}(E, E_I) = O(\delta)$$

et les valeurs propres de la matrice symétrique $[q(f_i, f_j)]$ approchent les valeurs propres de q dans l'intervalle Ià δ^2 près.

Remarques. — Il faut dans la proposition B que les f_j soient orthonormées pour que la diagonalisation de la forme quadratique corresponde à celle de l'opérateur. Enfin cette proposition permet de donner des résultats plus fins par la diagonalisation de la matrice $[q(f_i, f_j)]$: notons μ_j ses valeurs propres différentes et E_j leurs espaces propres correspondants, alors si η est un minorant de $|\mu_i - \mu_j|, i \neq j$, l'espace spectral se décompose en sous-espaces spectraux : $E_I = \sum F_j$ avec $d(E_j, F_j) = O(\frac{\delta^2}{\eta})$ et sur F_j les valeurs propres de q s'écrivent $\mu_j + O(\delta^2)$.

B. Description

(X_1, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n. X_2 est une sous-variété de $\mathbf{R^{n+1}}$ de dimension q, de bord Y. La variété compacte Y est isométrique à une sous-variété de X_1 de codimension d, et donc $n - d = q - 1$ et d est aussi la codimension de X_2 dans $\mathbf{R^{n+1}}$.

Si Z est une sous-variété compacte de la variété riemannienne X, nous noterons $NU_X^r(Z)$ le sous-fibré en sphères de rayon r du fibré normal $N_X(Z)$ de $Z \subset X$ et $N_X^r(Z)$, le sous-fibré en boules de rayon r. L'exponentielle normale est définie sur $N_X(Z)$ comme étant l'application exponentielle restreinte aux directions normales à la sous-variété (voir [S] p.9-59 à 9-62). La sous-variété Z étant compacte l'exponentielle normale définit un difféomorphisme sur $NU_X^r(Z)$ pour r assez petit, $TUB_X^r(Z)$ est alors son image dans X.

On suppose qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une isométrie j entre $\left(TUB^{\varepsilon_0}_{\mathbf{R}^{n+1}}\overline{X_2}\right)_{|Y}$ et $TUB^{\varepsilon_0}_{X_1}Y$. On définit alors pour $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$X_1(\varepsilon) = X_1 - TUB^{\varepsilon}_{X_1}Y \qquad X_2(\varepsilon) = NU^{\varepsilon}_{\mathbf{R}^{n+1}}\overline{X_2} \qquad M_\varepsilon = X_1(\varepsilon) \cup_j X_2(\varepsilon)$$

où le recollement est fait grâce à l'isométrie j (j sera sous-entendu par la suite). Cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais elle simplifie les calculs ; si elle n'est pas vérifiée il faut introduire un paramètre asymptotique supplémentaire, voir [A1] p. 274. La métrique sur M_ε est égale à g sur $X_1(\varepsilon)$ et à *la métrique de Sasaki* sur $X_2(\varepsilon)$:
rappelons que d'après le théorème de Vilms (voir [B] p. 249) il existe une métrique et une seule sur le fibré normal NX_2 telle que la projection $\pi : NX_2 \to X_2$ soit une submersion riemannienne à fibre totalement géodésique isométrique à $\mathbf{R}^d$ euclidien et dont la connexion horizontale H coïncide avec la connexion que définit la dérivée covariante $\nabla^\perp$. Cette dérivée covariante $\nabla^\perp$ est naturellement définie à partir de la dérivée covariante de Levi-Civita par projection orthogonale sur la fibre N_xX_2. Dans le cas du fibré tangent ou du fibré normal cette métrique issue du théorème de Vilms s'appelle métrique de Sasaki ([BV]). Le transport parallèle le long de H est alors une isométrie entre les fibres, d'après le théorème de Hermann ([B] p.249). Cette métrique restreinte à $NU(\overline{X}_2)$ fait toujours de $\pi : NU(\overline{X}_2) \to X_2$ une submersion riemannienne à fibre totalement géodésique puisque l'on a simplement restreint la fibre qui devient isométrique à la sphère unité standard et que donc on a pas changé de fibré principal (dont la fibre est le groupe orthogonal $O(d)$).

Notons V la connexion (intégrable) des espaces tangents à la fibre. On a alors sur M_ε un opérateur Laplacien naturel, celui obtenu par extension de Friedrich de la forme quadratique q_ε de domaine

$$\{(f,h) \in \mathcal{H}^1(X_1(\varepsilon)) \times \mathcal{H}^1(X_2(\varepsilon))\,;\; f_{|\partial X_1(\varepsilon)} = h_{|\partial X_2(\varepsilon)}\}$$

où l'égalité des fonctions restreintes est dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^{1/2}$ des deux bords isométriques ; la forme quadratique étant définie par $\int_{X_1(\varepsilon)} |\mathrm{d}f|^2 + \int_{X_2(\varepsilon)} |\mathrm{d}h|^2$. Pour fixer les espaces, indépendamment de ε, on paramètre $X_2(\varepsilon)$ par $NU_{\mathbf{R}^{n+1}}\overline{X}_2$ c'est-à-dire qu'on applique aux fonctions h l'isométrie :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_2\left(NU_{\mathbf{R}^{n+1}}\overline{X}_2\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}_2\left(NU^{\varepsilon}_{\mathbf{R}^{n+1}}\overline{X}_2\right) \\ h & \longmapsto & \left((x_2,v) \to \frac{1}{\varepsilon^{(d-1)/2}}h(x_2,\frac{1}{\varepsilon}v)\right). \end{array}$$

On est ainsi ramené à étudier dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(X_1) \times \mathcal{L}_2(NU(\overline{X}_2))$$

la forme quadratique q_ε qui s'écrit, si d_H et d_V désignent la différentielle dans les directions respectivement horizontales et verticales de $NU(\overline{X}_2)$:

$$q_\varepsilon(f,h) = \int_{X_1(\varepsilon)} |\mathrm{d}f|^2 + \int_{NU(\overline{X}_2)} \left(|\mathrm{d}_H h|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\mathrm{d}_V h|^2\right)$$

et dont le domaine est

$$\mathcal{H}^1(M_\varepsilon) = \Big\{(f,h) \in \mathcal{H}^1(X_1(\varepsilon)) \times \mathcal{H}^1(NU(\overline{X}_2))\,;\, \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} f(\exp_y(\varepsilon v)) = h(y,v)\Big\}$$

Cette forme quadratique est fermée et définit par extension de Friedrich l'opérateur auto-adjoint à résolvante compacte Δ_ε. Notons n_1 et n les normales extérieures respectivement à $X_1(\varepsilon)$ et à $NU(\overline{X}_2)$, le domaine de Δ_ε est alors

$$\mathcal{D}(\Delta_\varepsilon) = \Big\{(f,h) \in \mathcal{H}^2(X_1(\varepsilon)) \times \mathcal{H}^2(NU(\overline{X}_2))\,; \quad \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} f(\exp_y(\varepsilon v)) = h(y,v)$$
$$\text{et } \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \frac{\partial f}{\partial n_1}(\exp_y(\varepsilon v)) + \frac{\partial h}{\partial n}(y,v) = 0\Big\}$$

et il s'écrit, si Δ_1 est le Laplacien de la variété riemannienne (X_1,g) et si $\Delta_2(\varepsilon) = \Delta_H + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_V$ est défini sur les fonctions de $NU(\overline{X}_2)$:

$$\Delta_\varepsilon(f,h) = \big(\Delta_1(f), \Delta_2(\varepsilon)(h)\big).$$

C. Estimées

Pour utiliser les propositions A et B il faut exhiber des quasi-modes sur M_ε à partir des fonctions propres des opérateurs limites Δ_1 et Δ_2. Nous commençons donc par quelques estimées sur ces fonctions propres transplantées sur M_ε. Pour cela prenons les notations suivantes. Soit n_2 la normale à $Y \subset X_2$. On peut paramétrer un voisinage de Y par $Y \times [0,t_2[$ grace à l'exponentielle normale. Notons $\gamma_y(t) = \exp_y^{X_2}(tn_2)$ et $\tau_{\gamma_y}[t]$ le transport parallèle, agissant sur $NU\overline{X}_2$, le long de $\gamma_{y|[0,t]}$. Rappelons que $\tau_{\gamma_y}[t]$ est une isométrie entre $NU_y\overline{X}_2$ et $NU_{\gamma_y(t)}\overline{X}_2$. On peut ainsi paramétrer un voisinage de $NU(\overline{X}_2)$ par $NU(\overline{X}_2)_{|Y} \times [0,t_2[$. Notons d'autre part $q_\varepsilon^{(2)}$ la deuxième partie de q_ε qui correspond à l'intégrale sur $NU(\overline{X}_2)$. Donnons enfin le résultat suivant qui nous sera utile pour ces estimées :

Lemme a. — *$\exists k > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall f \in \mathcal{H}^1(X_1(\varepsilon))$ on a*

$$\begin{array}{ll} \textit{Si } d>2 & \int_{\partial X_1(\varepsilon)} |f| \leq k\varepsilon^{d/2}\|f\|_1 \\ \textit{Si } d{=}2 & \int_{\partial X_1(\varepsilon)} |f| \leq k\varepsilon\sqrt{\log(1/\varepsilon)}\|f\|_1 \end{array}$$

Démonstration. — On peut supposer, par densité et partition de l'unité, que f est de classe C^∞ et à support dans un voisinage de coordonnées normales $(y, r\theta) \in Y \times U$, où U est une petite boule de rayon r_0 de $\mathbf{R}^d$ centrée en 0. Alors

$$|f(y,\varepsilon\theta)| = |\int_\varepsilon^{r_0} \frac{\partial f}{\partial r}(y,r\theta)\mathrm{d}r| \leq \sqrt{\int_\varepsilon^{r_0} r^{1-d}\mathrm{d}r}\, \sqrt{\int_\varepsilon^{r_0} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(y,r\theta)\right)^2 r^{d-1}\mathrm{d}r}.$$

On conclut alors en prenant le carré, puis en intégrant sur $\partial X_1(\varepsilon)$ et enfin en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz car l'élément de volume de $\partial X_1(\varepsilon)$ est comparable à $\varepsilon^{d-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$. ◇

1. Soit λ une valeur propre de Δ_1. — Une fonction propre f sur X_1 est transplantée sur M_ε en

$$\Phi_\varepsilon(f) = \left(f_{|X_1(\varepsilon)}, \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \tilde{f}_\varepsilon\right) \in \mathcal{H}^1(M_\varepsilon)$$

où $\tilde{f}_\varepsilon(\tau_{\gamma_y}[t](v)) = \chi(t) f(y, \varepsilon v)$ et χ est une fonction de classe C^∞, positive, décroissante, nulle au voisinage de t_2 et égale à 1 au voisinage de 0.

Lemme B. — *En gardant les notations précédantes, $\|\tilde{f}_\varepsilon\|^2 + q_\varepsilon^{(2)}(\tilde{f}_\varepsilon)$ est borné indépendamment de ε.*

Démonstration. — On a

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\| \leq \|f\|_\infty \mathrm{Vol}(NU(\overline{X}_2)).$$

Pour le deuxième terme remarquons d'abord que le transport parallèle étant isométrique on a

$$|\mathrm{d}_V \tilde{f}_\varepsilon(y, \tau_{\gamma_y}[t](v)| = \chi(t) |\mathrm{d}_V f(y, \varepsilon v)| \leq \varepsilon \|\mathrm{d} f\|_\infty$$

d'autre part

$$|\mathrm{d}_H \tilde{f}_\varepsilon(y, \tau_{\gamma_y}[t](v)| \leq (\|f\|_\infty + \|\mathrm{d} f\|_\infty)(\|\chi\|_\infty + \|\mathrm{d}\chi\|_\infty).$$

On a donc

$$\begin{aligned} q_\varepsilon^{(2)}(\tilde{f}_\varepsilon) &= \int_{NU(\overline{X}_2)} |\mathrm{d}_H \tilde{f}_\varepsilon(y, \tau_{\gamma_y}[t](v)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\mathrm{d}_V \tilde{f}_\varepsilon(y, \tau_{\gamma_y}[t](v)|^2 \\ &\leq (\|f\|_\infty + \|\mathrm{d} f\|_\infty)^2 (\|\chi\|_\infty + \|\mathrm{d}\chi\|_\infty)^2 \mathrm{Vol}(NU(\overline{X}_2)). \end{aligned}$$

◇

Proposition 1.1. — *Soit f_λ une fonction propre normée sur X_1 de valeur propre λ. On a les estimées suivantes : $\|(\Delta_\varepsilon - \lambda)\Phi_\varepsilon(f_\lambda)\|_{-1} = O(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}})$ et de plus*

$$\|\Phi_\varepsilon(f_\lambda)\| = 1 + O(\varepsilon^{d-1}) \ \ et \ \ q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f_\lambda)) = \lambda + O(\varepsilon^{d-1}).$$

Démonstration. — Notons $r = (\Delta_\varepsilon - \lambda)\Phi_\varepsilon(f_\lambda)$ et soit $F = (f, h) \in \mathcal{H}^1(M_\varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} r(F) &= q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f_\lambda), F) - \lambda < \Phi_\varepsilon(f_\lambda), F > \\ &= \int_{\partial X_1(\varepsilon)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial n_1} f + \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \left(q_\varepsilon^{(2)}(\tilde{f}_{\lambda\varepsilon}, h) - \lambda \int_{NU(\overline{X}_2)} \tilde{f}_{\lambda\varepsilon} h \right). \end{aligned}$$

Le premier terme se majore avec le lemme A par $\|\mathrm{d} f_\lambda\|_\infty O(\varepsilon^{d/2}) \|F\|_1$ si d$\neq$2 et par $\|\mathrm{d} f_\lambda\|_\infty O(\varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}) \|F\|_1$ si d=2. Le deuxième terme se majore avec le lemme B par $\varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \mathrm{Sup}\left(\sqrt{\|\tilde{f}_{\lambda\varepsilon}\|^2 + q_\varepsilon^{(2)}(\tilde{f}_{\lambda\varepsilon})} \right) \|F\|_1$. ◇

Proposition 1.2. — *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions propres normées orthogonales et de même valeur propre sur X_1 alors*

$$< \Phi_\varepsilon(f_1), \Phi_\varepsilon(f_2) >= O(\varepsilon^{d-1})$$
$$q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f_1), \Phi_\varepsilon(f_2)) = O(\varepsilon^{d-1})$$

Démonstration. — En effet

$$< \Phi_\varepsilon(f_1), \Phi_\varepsilon(f_2) >= -\int_{TUB^\varepsilon Y} f_1 f_2 + \varepsilon^{d-1}\int_{NU(\overline{X}_2)} \tilde{f}_{1\varepsilon}\tilde{f}_{2\varepsilon}$$

le premier terme se majore par $\|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty \mathrm{Vol}(TUB^\varepsilon Y) = O(\varepsilon^d)$ et le deuxième terme est en $O(\varepsilon^{d-1})$ d'après le lemme B. D'autre part

$$q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f_1), \Phi_\varepsilon(f_2)) = \int_{X_1(\varepsilon)} (df_1, df_2) + \varepsilon^{d-1} q_\varepsilon^{(2)}(\tilde{f}_{1\varepsilon}, \tilde{f}_{2\varepsilon})$$

Le premier terme vaut $-\int_{TUB^\varepsilon Y}(df_1, df_2) = O(\varepsilon^d)$. Et le deuxième est en $O(\varepsilon^{d-1})$ d'après le lemme B.

2. Soit λ une valeur propre de Δ_2. — Nous avons ici besoin de la fonction auxiliaire suivante. Posons

$d > 2$ $\qquad k(r) = -\dfrac{1}{d-2}\left(\dfrac{1}{r^{d-2}} - \dfrac{1}{R_0^{d-2}}\right)$

$d = 2$ $\qquad k(r) = \log(r/R_0)$.

Le calcul montre que l'on a toujours

$$\text{si } d>2 \qquad \int_\varepsilon^{R_0} \left(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}} k(r)\right)^2 r^{d-1}\mathrm{d}r + \int_\varepsilon^{R_0} \left(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}} r k'(r)\right)^2 r^{d-1}\mathrm{d}r = O(\varepsilon^2)$$
$$\text{si } d=2 \qquad\qquad = O(\varepsilon).$$

Une fonction propre h de (Δ_2, Dir) sera transplantée sur M_ε par

$$\Psi_\varepsilon(h) = \left(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}} k(r)\frac{\partial h}{\partial n_2}_{|Y}, h + \varepsilon^{d-1}k(\varepsilon)\mathcal{P}\Big(\frac{\partial h}{\partial n_2}_{|Y}(y)\Big)\right) \in \mathcal{H}^1(M_\varepsilon)$$

où $\mathcal{P}(u)$ est la prolongée harmonique sur X_2 de la fonction u sur Y.

La fonction $\Psi_\varepsilon(h)$ est donc toujours indépendante de l'angle dans la fibre, aussi bien du côté de X_1 que de $NU(\overline{X}_2)$. Remarquons que $h_\varepsilon = \varepsilon^{d-1}n(\varepsilon)\mathcal{P}\big(\frac{\partial h}{\partial n_2}_{|Y}(y)\big) = O(\varepsilon)$ respectivement $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ si d=2.

Le premier terme de $\Psi_\varepsilon(h)$ est fait pour avoir un recollement des dérivées normales, on doit alors rajouter h_ε pour rester dans $\mathcal{H}^1(M_\varepsilon)$.

PROPOSITION 2.1. — *Soit h_λ une fonction propre normée de (Δ_2, Dir) de valeur propre λ alors*

$$\begin{aligned}
\|(\Delta_\varepsilon-\lambda)\Psi_\varepsilon(h_\lambda)\|_{-1} &= O(\varepsilon) \quad \textit{respectivement } \sqrt{\varepsilon} \textit{ si d=2}\\
\|\Psi_\varepsilon(h_\lambda)\|^2 &= \mathit{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\Big(1+\frac{2\varepsilon}{(d-2)\lambda}\int_Y|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}|^2\Big)+O(\varepsilon^2)\\
\textit{respectivement } &= 2\pi\Big(1-\varepsilon\log\varepsilon\int_Y|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}|^2\Big)+O(\varepsilon) \ \textit{ si d=2}\\
q_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(h_\lambda)) &= \mathit{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\Big(\lambda+\frac{\varepsilon}{d-2}\int_Y|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}|^2\Big)+O(\varepsilon^2)\\
\textit{respectivement } &= 2\pi\Big(\lambda-\varepsilon\log\varepsilon\int_Y|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}|^2\Big)+O(\varepsilon) \textit{ si d=2}
\end{aligned}$$

Démonstration. — Notons $\Psi_\varepsilon(h_\lambda)=(f_\varepsilon, h_\lambda+h_\varepsilon)$ et $r=(\Delta_\varepsilon-\lambda)\Psi_\varepsilon(h_\lambda)$. Soit $F=(f,h)\in\mathcal{H}^1(M_\varepsilon)$. Regardons les intégrales dans un domaine de coordonnées normales $(y,r,\theta)\in U\times[\varepsilon,R_0[\times\mathbf{S}^{d-1}$ par partition de l'unité sur Y et trivialisation du fibré $N_{X_1}Y$ au dessus des ouverts $U\subset Y$ de la partition de l'unité (une telle partition finie de l'unité existe toujours). La forme volume s'écrit dans une telle carte $v(r,\theta,y)r^{d-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}y$ et le Laplacien s'écrit sur les fonctions indépendantes de θ :

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+\Delta_Y$$

où Δ_Y est un Laplacien sur Y dont les coefficients dépendent de (r,θ).

Introduisons par ailleurs la métrique produit dans cette carte. Tout ce qui se rapportera à cette métrique portera l'indice ^{0}.

$$r(F)=\int_{X_1(\varepsilon)}\big((\mathrm{d}f,\mathrm{d}f_\varepsilon)-\lambda f_\varepsilon f\big)+\int_{NU(\overline{X}_2)}(\mathrm{d}h,\mathrm{d}h_\lambda)-\lambda h_\lambda h \\ +\big(q_\varepsilon^{(2)}(h_\varepsilon,h)-\lambda<h_\varepsilon,h>\big).$$

D'après la remarque faite sur h_ε le dernier terme se majore par $O(\varepsilon)\|F\|_1$. La fonction f_ε ne dépend pas de la variable θ et les dérivées dans les directions de r et de y restent orthogonales pour les deux métriques. Ces deux métriques coïncident quand $r=0$ et $\frac{\partial}{\partial r}$ est toujours de norme 1. On a donc une majoration du type

$$\int_{X_1(\varepsilon)}|(\mathrm{d}f,\mathrm{d}f_\varepsilon)-(\mathrm{d}f,\mathrm{d}f_\varepsilon)^0|\le C^{\mathrm{te}}\|f\|_{\mathcal{H}^1(X_1(\varepsilon))}\|r\mathrm{d}_Yf_\varepsilon\|$$

Mais $r\mathrm{d}_Yf_\varepsilon=\varepsilon^{\frac{d-1}{2}}rk(r)\mathrm{d}_Y\big(\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}\big)$, et donc, de même que pour f_ε on a

$$\|r\mathrm{d}_Yf_\varepsilon\|=O(\varepsilon) \text{ respectivement } O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ si d=2.}$$

D'autre part

$$\int_{X_1(\varepsilon)}(\mathrm{d}f,\mathrm{d}f_\varepsilon)^0=\int_{U\times]\varepsilon,R_0[\times\mathbf{S}^{d-1}}(\mathrm{d}(v(y,r,\theta)f),\mathrm{d}f_\varepsilon)^0r^{d-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}y$$
$$-\int_{U\times]\varepsilon,R_0[\times\mathbf{S}^{d-1}}f(\mathrm{d}v(y,r,\theta),\mathrm{d}f_\varepsilon)^0r^{d-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}y$$

Dans les coordonnées normales on a $\frac{\partial v}{\partial r}=O(r)$ (voir [GHL] p.139), le deuxième terme ci-dessus peut donc être majoré par $\|F\|_1\big(\|r\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\|+\|\mathrm{d}_Yf_\varepsilon\|\big)=O(\varepsilon)\|F\|_1$, respectivement $O(\sqrt{\varepsilon})$ si d=2, d'après les calculs sur la fonction $k(r)$. Ainsi

$$r(F)=\int_{U\times]\varepsilon,R_0[\times\mathbf{S}^{d-1}}\Big((\mathrm{d}(vf),\mathrm{d}f_\varepsilon)^0-\lambda f_\varepsilon vf\Big)r^{d-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}y$$
$$+\int_{NU(\overline{X}_2)}(\mathrm{d}h,\mathrm{d}h_\lambda)-\lambda h_\lambda h+O(\varepsilon)\|F\|_1$$
$$\text{respectivement }\ +O(\sqrt{\varepsilon})\|F\|_1$$

Mais la fonction $k(r)$ vérifie $\Big(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)(k)=0$, les deux premières intégrales deviennent donc en appliquant la formule de Stockes :

$$-\int_{r=R_0}f\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n_1}+\int_{U\times]\varepsilon,R_0[\times\mathbf{S}^{d-1}}f\Big(-\lambda v-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+\Delta_Y\Big)(f_\varepsilon)v(r,\theta,y)r^{d-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}y$$

On a donc la majoration annoncée car $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n_1}(R_0)=O(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}})$ et le deuxième terme se majore avec les estimées sur la fonction $k(r)$ et le fait que $\frac{\partial v}{\partial r}=O(r)$.

Calculons maintenant

$$\|\Psi_\varepsilon(h_\lambda)\|^2=\int_{X_1(\varepsilon)}f_\varepsilon^2+\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\lambda^2+2\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\lambda h_\varepsilon+\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\varepsilon^2$$

Mais $\int_{X_1(\varepsilon)}f_\varepsilon^2+\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\varepsilon^2=O(\varepsilon^2)$, [resp. $O(\varepsilon)$ si d=2], et $\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\lambda^2=\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})$. Par ailleurs

$$\lambda\int_{NU(\overline{X}_2)}h_\varepsilon h_\lambda=\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\varepsilon^{d-1}k(\varepsilon)\int_{X_2}\Delta_2(h_\lambda)\mathcal{P}\big(\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}_{|Y}\big)$$
$$=-\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\varepsilon^{d-1}k(\varepsilon)\int_Y|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}|^2$$

par la formule de Stockes. On obtient alors le résultat annoncé en remplaçant $k(\varepsilon)$ par sa valeur. Enfin comme $\int_{NU(\overline{X}_2)}(\mathrm{d}h_\lambda,\mathrm{d}h_\varepsilon)=0$ on a :

$$q_\varepsilon\big(\Psi_\varepsilon(h_\lambda)\big)=\int_{X_1(\varepsilon)}|\mathrm{d}f_\varepsilon|^2+\int_{NU(\overline{X}_2)}|\mathrm{d}h_\lambda|^2+\int_{NU(\overline{X}_2)}|\mathrm{d}h_\varepsilon|^2.$$

Le dernier terme est un $O(\varepsilon^2)$ resp. $O(\varepsilon)$ si d=2 et

$$\int_{X_1(\varepsilon)} |\mathrm{d}f_\varepsilon|^2 = \int f_\varepsilon\Big(-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_Y\Big)(f_\varepsilon) + \int_{r=\varepsilon} f_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n_1}.$$

Le premier terme est par les propriétés de $k(r)$ et de $\frac{\partial v}{\partial r}$ en $O(\varepsilon^2)$ et resp. $O(\varepsilon)$ si d=2. Par ailleurs
$f_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n_1}{}_{|r=\varepsilon} = -\varepsilon^{d-1}k(\varepsilon)k'(\varepsilon)|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}{}_{|Y}|^2 = -k(\varepsilon)|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}{}_{|Y}|^2$ et donc

$$\int_{r=\varepsilon} f_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n_1} = -\varepsilon^{d-1}k(\varepsilon)\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\|\frac{\partial h_\lambda}{\partial n_2}{}_{|Y}\|^2.$$

On obtient alors le résultat annoncé en renplaçant $k(\varepsilon)$ par sa valeur. $\diamond$

Avec le même genre de calculs on obtient :

Proposition 2.2. — *Soit h_1 et h_2 deux fonctions propres orthonormées de Δ_2, elles vérifient*

$$\begin{aligned} <\Psi_\varepsilon(h_1),\Psi_\varepsilon(h_2)> &= \frac{2\varepsilon}{\lambda(d-2)}Vol(\mathbf{S}^{d-1})\int_Y \frac{\partial h_1}{\partial n_2}\frac{\partial h_2}{\partial n_2} + O(\varepsilon^2)\\ \textit{respectivement } &= -\frac{2\varepsilon\log\varepsilon}{\lambda}2\pi\int_Y \frac{\partial h_1}{\partial n_2}\frac{\partial h_2}{\partial n_2} + O(\varepsilon) \qquad \textit{si d=2}\\ q_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(h_1),\Psi_\varepsilon(h_2)) &= \frac{\varepsilon}{d-2}Vol(\mathbf{S}^{d-1})\int_Y \frac{\partial h_1}{\partial n_2}\frac{\partial h_2}{\partial n_2} + O(\varepsilon^2)\\ \textit{respectivement } &= -\varepsilon\log\varepsilon 2\pi\int_Y \frac{\partial h_1}{\partial n_2}\frac{\partial h_2}{\partial n_2} + O(\varepsilon) \qquad \textit{si d=2.}\end{aligned}$$

3. Soit λ une valeur propre de Δ_1 et de Δ_2. — Nous devons mesurer l'intéraction des quasi-modes correspondants.

Proposition 3. — *Soit f une fonction propre normée de Δ_1 et h une fonction propre normée de Δ_2 de même valeur propre λ, alors*

$$\begin{aligned} <\Phi_\varepsilon(f),\Psi_\varepsilon(h)> &= O(\varepsilon) \quad \textit{resp. } O(\sqrt{\varepsilon}) \textit{ si d=2}\\ q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f),\Psi_\varepsilon(h)) &= \lambda <\Phi_\varepsilon(f),\Psi_\varepsilon(h)> + \varepsilon^{\frac{d-1}{2}}Vol(\mathbf{S}^{d-1})\textstyle\int_Y f\frac{\partial h}{\partial n_2} \quad +O(\varepsilon^{\frac{d+1}{2}})\\ &\qquad\qquad \textit{resp. si d=2} \quad +O(\varepsilon^{3/2}|\log\varepsilon|)\end{aligned}$$

Démonstration. — Posons $\Phi_\varepsilon(f) = (f, h_\varepsilon)$ et $\Psi_\varepsilon(h) = (f_\varepsilon, h+\tilde{h}_\varepsilon)$. Alors

$$<\Phi_\varepsilon(f),\Psi_\varepsilon(h)> = \int_{X_1(\varepsilon)} f_\varepsilon f + \int_{NU(\overline{X}_2)} h_\varepsilon h + \int_{NU(\overline{X}_2)} h_\varepsilon\tilde{h}_\varepsilon.$$

Le premier terme est en $O(\varepsilon)$ et respectivement $O(\sqrt{\varepsilon})$ si d=2, d'après les propriétés de la fonction $k(r)$ rappelés au paragraphe précédent. Le deuxième terme est en $O(\varepsilon^{\frac{d-1}{2}})$

d'après les estimèes sur h_ε du paragraphe 1. On a vu de même que le troisième terme est $O(\varepsilon^{\frac{d+1}{2}})$. Pour la forme quadratique :

$$
\begin{aligned}
q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f), \Psi_\varepsilon(h)) &= \int_{X_1(\varepsilon)} (\mathrm{d}f, \mathrm{d}f_\varepsilon) + \int_{NU(\overline{X}_2)} (\mathrm{d}h, \mathrm{d}h_\varepsilon) + \int_{NU(\overline{X}_2)} (\mathrm{d}h_\varepsilon, \mathrm{d}\tilde{h}_\varepsilon) \\
&= \int_{X_1(\varepsilon)} \Delta(f) f_\varepsilon + \int_{r=\varepsilon} f_\varepsilon \frac{\partial f}{\partial n_1} + \int_{NU(\overline{X}_2)} \Delta(h) h_\varepsilon + \int_{\partial NU(\overline{X}_2)} h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial n_2} \\
&+ O(\varepsilon^{\frac{d+1}{2}})
\end{aligned}
$$

Mais $\int_{r=\varepsilon} f_\varepsilon \frac{\partial f}{\partial n_1} = O\big(\varepsilon^{d-1} \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} k(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^{\frac{d+1}{2}})$ et respectivement $O(\varepsilon^{3/2} |\log \varepsilon|)$ si d=2. D'autre part $\int_{\partial NU(\overline{X}_2)} h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial n_2} = \mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1}) \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \int_Y f \frac{\partial h}{\partial n_2}$. ◇

D. Conclusions

Soit λ une valeur propre du spectre limite, E_1 son espace propre sur X_1, E_2 son espace propre sur X_2 et E_ε l'espace spectral de M_ε correspondant à la somme des espaces propres des valeurs propres qui convergent vers λ. D'après les estimées des propositions 1.1 et 1.2, et les résultats préliminaires on peut énoncer :

Théorème 1. — *Si λ est valeur propre de X_1 et pas de X_2 et $m = \dim E_1$, alors M_ε possède m valeurs propres qui convergent vers λ, elles admettent toutes le développement asymptotique $\lambda + O(\varepsilon^{d-1})$ et l'espace propre total correspondant est à distance de $\Phi_\varepsilon(E_1)$ inférieure à $O(\varepsilon^{(d-1)/2})$.*

D'après les propositions 2.1 et 2.2 on a

Théorème 2. — *Si λ est valeur propre de X_2 et pas de X_1 et si $m = \dim E_2$ alors M_ε possède m valeurs propres qui convergent vers λ. Choisissons une base orthonormée $h_1, \ldots, h_m$ de E_2 qui diagonalise la matrice $[< \frac{\partial h_i}{\partial n_2}_{|Y}, \frac{\partial h_j}{\partial n_2}_{|Y} >]$. Alors l'espace propre total E_ε est à distance de $\Psi_\varepsilon(E_2)$ inférieure $O(\varepsilon)$ et resp. $O(\sqrt{\varepsilon})$ si d=2. Les valeurs propres correspondantes admettent le développement asymptotique*

$$
\begin{aligned}
\lambda_j(\varepsilon) &= \lambda - \frac{\varepsilon}{d-2} \int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2 + O(\varepsilon^2) \text{ si } d > 2 \\
&= \lambda + \varepsilon \log \varepsilon \int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2 + O(\varepsilon) \text{ si d=2.}
\end{aligned}
$$

On voit en particulier que si les valeurs $\int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2$ sont toutes distinctes les fonctions propres correspondantes s'écrivent $h_j + O(\varepsilon)$ et respectivement $h_j + O(\sqrt{\varepsilon})$ si d=2.

Démonstration. — Regardons ici seulement le cas $d > 2$. Il faut, pour appliquer la Proposition B, orthonormaliser la base $\Psi_\varepsilon(h_j)$. Posons $G_{ij} =< \Psi_\varepsilon(h_i), \Psi_\varepsilon(h_j) >$. D'après la proposition 2.2 et l e bon choix des h_j la matrice G s'écrit

$$
G_{ij} = \delta_{ij} \Big(\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})(1 + \frac{2\varepsilon}{(d-1)\lambda} \int_Y |\frac{\partial h_i}{\partial n_2}|^2) \Big) + O(\varepsilon^2).
$$

Si A est la racine carrée de G^{-1} alors $\psi_i = \sum A_{ij}\Psi_\varepsilon(h_j)$ forme une base orthonormée. Mais

$$A_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{(d-2)\lambda}\int_Y |\frac{\partial h_i}{\partial n_2}|^2\right) + O(\varepsilon^2)$$

et donc $q_\varepsilon(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}(\lambda - \frac{\varepsilon}{d-2}\int_Y |\frac{\partial h_i}{\partial n_2}|^2) + O(\varepsilon^2)$. ◇

Supposons maintenant que λ est valeur propre de X_1 et de X_2 de multiplicités respectives m_1 et m_2. Soient alors $f_1, \ldots, f_{m_1}$ une base orthonormée de l'espace propre E_1 de λ sur X_1, et $h_1, \ldots, h_{m_2}$ une base orthonormée de l'espace propre E_2 de λ sur X_2 tel que la matrice $< \frac{\partial h_i}{\partial n_2}_{|Y}, \frac{\partial h_j}{\partial n_2}_{|Y} >$ soit diagonale. On sait déjà que $\mathrm{d}\big(E_\varepsilon, \Phi_\varepsilon(E_1) \oplus \Psi_\varepsilon(E_2)\big) = O(\varepsilon)$ et respectivement $O(\sqrt{\varepsilon})$ si d=2. Posons enfin

$$m = m_1 + m_2 \qquad (\phi_1, \ldots, \phi_m) = (\Phi_\varepsilon(f_1), \ldots, \Phi_\varepsilon(f_{m_1}), \frac{\Psi_\varepsilon(h_1)}{\|\Psi_\varepsilon(h_1)\|}, \ldots, \frac{\Psi_\varepsilon(h_{m_2})}{\|\Psi_\varepsilon(h_{m_2})\|}).$$

Pour pouvoir appliquer la proposition B nous devons orthonormaliser cette base et écrire un développement asymptotique de q_ε restreinte à la base obtenue.

Lemme c. — *Si G désigne la matrice symétrique de terme général $< \phi_i, \phi_j >$ et A est la racine carrée positive de G^{-1}, elle est aussi symétrique et la famille des*

$$\psi_i = \sum_1^m A_{ij}\phi_j$$

est orthonormée. Dans cette base, la forme quadratique q_ε s'écrit

$$q_\varepsilon = \Lambda + \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^t & C_\varepsilon \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \qquad [\text{resp. si } d=2, + O(\varepsilon)]$$

où $\Lambda = \lambda Id$, C_ε est la matrice diagonale de terme général $-\frac{\varepsilon}{d-2}\int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2$ si $d > 2$ et $\varepsilon \log \varepsilon \int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2$ si $d = 2$; enfin le terme général de la matrice Z est donné par

$$1 \le i \le m_1,\ 1 \le j \le m_2, \qquad z_{ij} = \varepsilon^{(d-1)/2}\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1})\int_Y f_i \frac{\partial h_j}{\partial n_2}.$$

Démonstration. — Contentons nous du cas $d > 2$. D'après les propositions 1.1, 1.2, 3 et la démonstration du théorème 2, la matrice A vérifie $A_{ij} = \delta_{ij} + O(\varepsilon)$. Par ailleurs si $I = \{1, \ldots, m_1\}$ et $J = \{m_1 + 1, \ldots, m\}$, alors si i et j sont tous les deux dans I où tous les deux dans J $a_{ij} = \delta_{ij} + O(\varepsilon^2)$, et donc comme

$$q_\varepsilon(\psi_i, \psi_j) = \sum_{kl} a_{ik}a_{jl}q_\varepsilon(\phi_k, \phi_l)$$

il y a trois cas à envisager.
• $i, j \in I$ dans ce cas

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\psi_i,\psi_j) &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + \sum_{l\in J} a_{jl} q_\varepsilon(\phi_i,\phi_l) + \sum_{k\in J} a_{ik} q_\varepsilon(\phi_k,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \\ &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

d'après la proposition 3.
• $i, j \in J$ ce cas est similaire au précédent

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\psi_i,\psi_j) &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + \sum_{l\in I} a_{jl} q_\varepsilon(\phi_i,\phi_l) + \sum_{k\in I} a_{ik} q_\varepsilon(\phi_k,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \\ &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

et ce terme a été calculé dans le théorème 2.
• $i \in I, j \in J$ cette fois

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\psi_i,\psi_j) &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + \sum_{l\in I} a_{jl} q_\varepsilon(\phi_i,\phi_l) + \sum_{k\in J} a_{ik} q_\varepsilon(\phi_k,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \\ &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + a_{ji} q_\varepsilon(\phi_i,\phi_i) + a_{ij} q_\varepsilon(\phi_j,\phi_j) + O(\varepsilon^2) \\ &= q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) + 2\lambda a_{ij} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

mais la matrice G est proche de Id et A s'obtient par le développement en série de $(1+x)^{-1/2}$ donc pour $i \neq j$ on a $a_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij} + O(\varepsilon^2)$, et donc

$$q_\varepsilon(\psi_i,\psi_j) = q_\varepsilon(\phi_i,\phi_j) - \lambda < \phi_i,\phi_j > + O(\varepsilon^2)$$

Ce terme a été déterminé dans la proposition 3. $\diamond$

CONSÉQUENCES. — On voit que C_ε est de rang maximal, donc si $d \geq 4$ alors $Z = o(\|C_\varepsilon\|)$ et les parties sont toujours découplées, il n'y a pas d'interaction. Par contre si $d = 2$, la matrice Z est en $\sqrt{\varepsilon}$ d'un ordre supérieur à celui de C_ε, si $d = 3$ le premier terme de Z est en ε du même ordre que C_ε. Dans ces deux cas il peut y avoir interaction. On est ramené à étudier les vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{m_1} \times \mathbf{R}^{m_2}$ de matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^t & C \end{pmatrix}.$$

LEMME D. — *Si $m_1 = m_2$ et Z est inversible cet endomorphisme n'admet pas de vecteur propre localisé c'est à dire de la forme $(0, y)$ où $(x, 0)$.*

Démonstration. — En effet
- si $(0, y)$ est un vecteur propre de valeur propre μ alors l'équation de la première composante donne $\mu.0 = Z^t(y)$ donc $y = 0$.

- si $(x,0)$ est un vecteur propre de valeur propre μ alors l'équation de la deuxième composante donne $\mu.0 = Z(x) + 0$ et donc $x = 0$. $\diamond$

Une étude plus précise de cette matrice montre que si $m_1 \neq m_2$ il peut y avoir des fonctions propres localisées dans l'une des deux parties de la variété M_ε. Par exemple pour $d = 2$ la matrice C est nulle et donc $y \in \mathrm{Ker} Z$ ou $x \in \mathrm{Ker} Z^t$ fournissent des vecteurs propres de S qui sont localisés dans l'une ou l'autre partie de la variété. On a donc

THÉORÈME 3. — *Si λ est valeur propre de Δ_1 et de Δ_2 et si E_1 et E_2 sont les espaces propres correspondants alors*

$$\mathrm{d}\big(E_\varepsilon, \Phi_\varepsilon(E_1) \oplus \Psi_\varepsilon(E_2)\big) = O(\varepsilon) \text{ et respectivement } O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ si d=2.}$$

- *Si $d \geq 4$ l'opérateur Δ_ε admet m_1 valeur propres de développement asymptotique $\lambda + O(\varepsilon^2)$ d'espace propre total à distance inférieure à $O(\varepsilon^2)$ de $\Phi_\varepsilon(E_1)$ et m_2 valeurs propres de développement asymptotique $\lambda - \frac{\varepsilon}{d-2} \int_Y |\frac{\partial h_j}{\partial n_2}|^2 + O(\varepsilon^2)$ où les (h_j) sont une base orthonormée de E_2 qui diagonalise la matrice $[< \frac{\partial h_i}{\partial n_2}, \frac{\partial h_j}{\partial n_2} >_Y]$ et l'espace propre total est à distance inférieure à $O(\varepsilon)$ de $\Psi_\varepsilon(E_2)$. Il y a localisation.*
- *Si d=2 ou d=3 il peut y avoir interaction. En particulier si $m_1 = m_2$ et si la matrice $[\int_Y f_i \frac{\partial h_j}{\partial n_2}]$ (pour une base orthonormée (f_i) de E_1 et une base orthonormée (h_j) de E_2 qui diagonalise la matrice $[< \frac{\partial h_i}{\partial n_2}, \frac{\partial h_j}{\partial n_2} >_Y]$) est inversible il y a une interaction totale ; les fonctions propres, dont l'asymptotique est donné par la diagonalisation de la matrice S ci-dessus, sont toutes non-localisées.*

Dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = 1$ la diagonalisation de la matrice 2×2 ci-dessus nous donne les résultats annoncés dans l'introduction.

E. Bibliographie

[A1] C. Anné, Spectre du Laplacien et écrasement d'anses, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **20** (4ᵉ série), (1987), 271–280.

[A2] C. Anné, Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité, *Commun. in Partial Differential Equations* **15** (11), (1990), 1617–1630.

[B] A. Besse, Einstein Manifolds, *Spinger-Verlag, Berlin*, (1987).

[BV] A. A. Borisenko A. L. Vampol'skii, Riemannian Geometry of fibre bundles, *Uspekhi Math. Nauk.* **46:6**, (1991) 51–95 (*Russian Math. Survey* 55–106).

[CdV2] Y. Colin de Verdière, Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien, *Comment. Math. Helvetici* **61**, (1986), 254–270.

[GHL] S. Gallot, D. Hullin et J. Lafontaine, Riemannian Geometry, *Springer-Verlag, Berlin*, (1987).

[H] B. Helffer, Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications, *SprVilmsinger-Verlag, Berlin*, (1988).

[HM] P. D. Hislop et A. Martinez, Scattering Resonances of a Helmholtz Resonator, *Indiana University Math. Journ.* **40**(2), (1991), 767–787.

[HS1] B. Helffer et J. Sjöstrand, Multiples Wells in the semi-classical limit I, *Commun. in Partial Differential Equations* **9** (4), (1984), 337–408

[HS2] B. Helffer et J. Sjöstrand, Puits Multiples en limite semi-classique II, Interaction moléculaire-Symétrie-Perturbations, *Annales de l'IHP (Physique théorique)* **42**(2), (1985), 127–212.

[S] M. Spivak, Differential Geometry vol. I, *Publish or Perich, Boston,* (1970).

—◇—

Colette Anné
Institut Fourier
BP 74
F-38402 S^t Martin d'Hères cedex