Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules

COLETTE ANNÉ ET BRUNO COLBOIS

Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne orientable, connexe et compacte et Δ son laplacien de Hodge agissant sur les formes différentielles. Dans le cas où M a un bord ∂M on se propose d'étudier le comportement au voisinage de ∂M des formes différentielles qui sont dans le domaine de Δ (et même dans le domaine de sa racine carrée $D = \delta + d$). On applique ensuite ces estimées à l'étude de la perturbation obtenue en ôtant à M un nombre fini de petites boules. Soit M_ϵ la variété obtenue à partir de M en enlevant N boules de rayon ϵ (on suppose ϵ inférieur au rayon d'injectivité $\mathrm{Inj}(M)$ de M). On cherche à comparer le spectre et les formes propres de Δ agissant sur les formes de M ou de M_ϵ.

Nous supposons $n = \dim M \geq 3$. Pour $n = 2$, l'étude spectrale se ramène presque entièrement aux fonctions : les 2-formes ont le spectre des fonctions par la dualité de Hodge et le spectre non nulle des 1-formes est contrôlé, grâce à la différentielle et son adjoint par celui des fonctions, les formes harmoniques s'étudient comme pour les autres dimensions, voir §6.

1. Notations et énoncés des résultats

Sur la variété riemannienne (éventuellement à bord) (M, g), on note $\Lambda^p M$ le fibré des co-vecteurs anti-symétriques et $C^\infty(\Lambda^p M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^∞, sections de ce fibré. La métrique définit sur ces sections un produit scalaire par $< \omega, \phi >= \int_M \omega \wedge *\phi$ où $*$ est l'opérateur de Hodge et la dérivée de Levi-Civita ∇ les espaces de Sobolev $H^s(\Lambda^p M)$ des p-formes dont les dérivées jusqu'a l'ordre s sont de carré intégrable, par exemple la norme de $H^1(\Lambda^p M)$ est $\| \phi \|_1^2 = \| \phi \|^2 + \| \nabla\phi \|^2$.

On considère trois problèmes à bords différents qui s'expriment comme suit sur les p-formes $\phi \in H^2(\Lambda^p M)$. L'opérateur de Hodge-Laplace est $\Delta = d\delta + \delta d$, où d est la différentielle extérieure et $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$ son adjoint formel.

1er problème à bord (I)		$(*\phi)_{\|\partial M} \equiv 0$	(i.e. nor$\phi_{\|\partial M} \equiv 0$)
	et	$(*d\phi)_{\|\partial M} \equiv 0$	
2ème problème à bord (II)		$\phi_{\|\partial M} \equiv 0$	(i.e. tan$\phi_{\|\partial M} \equiv 0$)
	et	$(\delta\phi)_{\|\partial M} \equiv 0$	
3ème problème à bord (III)		$(*\phi)_{\|\partial M} \equiv 0$	et $\phi_{\|\partial M} \equiv 0$.

Ellipticité. Remarquons tout d'abord que $\Delta = (d+\delta)^2$, le spectre de Δ est donc le carré de celui de $D = d+\delta$ et les formes propres sont les mêmes. Nous étudions donc D, et notons $\| \phi \|_q^2 = \| \phi \|^2 + \| (d+\delta)\phi \|^2$, cette norme sera appelée **q-norme** dans la suite.

Ainsi, pour $\phi \in \Omega(\Lambda^p M)$,

$$\| \phi \|_q^2 = \| \phi \|^2 + \| d\phi \|^2 + \| \delta\phi \|^2 = \| \phi \|^2 + \| D\phi \|^2 \quad .$$

Un opérateur elliptique doit vérifier l'**inégalité de Friedrichs** ([H] Th. 19.5.1) : Il existe $C > 0$ tel que

$$\| \phi \|_1 \leq C \| \phi \|_q \quad .$$

Si la variété est sans bord, D est elliptique et on a l'équivalence des deux normes $\| \, \|_q$ et $\| \, \|_1$. Mais sur une variété à bord D n'est elliptique que si les conditions au bord sont de "Lopatinski" (voir [H] Chap. 20.1).

Gilkey a montré que (I'): $*\phi_{|\partial M_\epsilon} \equiv 0$ ou (II'): $\phi_{|\partial M_\epsilon} \equiv 0$ sont des conditions de Lopotinski pour l'opérateur D ([G] Chap. 4.1) et il est assez facile de vérifier que (Δ ,III) est aussi elliptique.

On peut remarquer que D sans condition au bord n'est pas elliptique. En effet, regardons sur le disque $D_1 = \{z \in C / \ r = |z| < 1\}$ la forme harmonique $\phi = z^k dz \quad k \in N$, alors

$$\| \phi \|_q^2 = \| \phi \|^2 = \frac{2\pi}{2k+1} \ ;$$

mais

$$\| \phi \|_1^2 = \| \phi \|^2 + \| kz^{k-1} \|^2 = 2\pi \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{k^2}{2k-1} \right) \ .$$

On ne peut donc trouver de constante C pour que l'inégalité de Friedrichs soit vérifiée.

(Notons que comme M est compacte, si les conditions au bord font de D un opérateur auto-adjoint l'inégalité de Friedrichs est équivalente à l'ellipticité, voir [H] Chap. 19.5.)

En résumé, (D,I'), (D,II') et (Δ ,III) sont des opérateurs elliptiques autoadjoints sur leurs domaines respectifs:

$$\{\phi \in H^1(\Lambda^* M_\epsilon) \ \mathrm{nor}(\phi)_{|\partial M_\epsilon} = 0\}$$

$$\{\phi \in H^1(\Lambda^* M_\epsilon) \ \tan(\phi)_{|\partial M_\epsilon} = 0\}$$

$$H_0^2(\Lambda^* M_\epsilon) = \{\phi \in H^1(\Lambda^* M_\epsilon); \ \mathrm{nor}(\phi)_{|\partial M_\epsilon} = 0 \text{ et } \tan\,(\phi)_{|\partial M_\epsilon} = 0\}$$

et ils admettent un spectre discret de valeurs propres de multiplicité finie qui ne s'accumulent qu'en ∞.

Le problème auquel nous serons confrontrés dans l'étude de M_ϵ est que, comme l'ont remarqué S. Gallot et D. Meyer ([GM2]), la constante C de l'inégalité de Friedrichs dépend de la convexité du bord et qu'elle peut devenir arbitrairement grande si le bord devient très concave. Au §3 nous avons précisé cette dépendance :

Proposition 3.1. *Soit A la norme de la deuxième forme fondamentale de ∂M ; il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que du tenseur de courbure de M telle que pour tout ϕ dans le domaine de (D, I') ou de (D, I'')*

$$|q(\phi) - \| \nabla\phi \|^2 | \leq C \left(\| \phi \|^2 + A \int_{\partial M} |\phi|^2 \right) .$$

On obtient alors l'inégalité de Friedrichs grâce à la

Proposition 3.2. *Pour tout $\phi \in H^1(\Lambda^p(M))$ $0 \leq p \leq n$*

$$\int_{\partial M} |\phi|^2 \leq C \left(\| \nabla\phi \| \, \| \phi \| + A \| \phi \|^2 \right) .$$

On obtient donc pour des formes dans un des domaines de D

$$\| \phi \|_1 \leq C \left(\| D\phi \| + A \| \phi \| \right) .$$

La perturbation M_ϵ . Le cas des fonctions $(p = 0)$ est bien connu. Les conditions (II) et (III) correspondent au problème de Dirichlet. Ce problème a été étudié par Ozawa

[O], Rauch-Taylor [RT] et récemment par Courtois [C] dans un cadre plus général. Les conditions (I) correspondent au problème de Neumann, ce problème a été étudié par [RT] dans le cas euclidien et par le premier auteur [A1] sur des variétés. Pour ces deux problèmes, le spectre du Laplacien de M_ϵ converge vers celui de M. L'idée consiste à utiliser les fonctions propres de M comme test pour M_ϵ et réciproquement à tester celles de M_ϵ sur M. S'il est facile de passer de M à M_ϵ en annulant les fonctions de M au voisinage de parties de codimension au moins 2, pour passer de M_ϵ à M il faut prolonger les fonctions. Pour le problème de Dirichlet les fonctions sont naturellement prolongées par 0. Pour le problème de Neumann, plus délicat, on prolonge harmoniquement.

Nous nous concentrerons ici sur le problème (I). Le problème (II) s'en déduit par la dualité de Hodge. Quant au problème (III), il se traite comme pour les fonctions, car on a le prolongement par 0 et, par l'inclusion des domaines la $k^{\text{ième}}$-valeur propre est décroissante en ϵ (voir [A1] pour ce point de vue).

Rappelons que les conditions (I) et (II) ont une signification topologique. En effet, la théorie de Hodge sur les variétés à bord permet de montrer que les formes harmoniques vérifiant (I) donnent la cohomologie absolue de M_ϵ tandis que celles qui vérifient (II) donnent la cohomologie relative au bord (voir [RS] pour les détails). Ainsi, il y a une différence qualitative entre enlever une boule ou au moins deux petites boules. Plus précisément, le théorème de Mayer-Vietoris nous indique que

$$H^k(M_\epsilon, R) \cong H^k(M, R), \quad \text{si} \quad 0 \leq k < n-1$$

$$H^{n-1}(M_\epsilon, R) \cong H^{n-1}(M, R) \oplus R^{N-1}, \text{ où } N \text{ est le nombre de boules enlevées}$$

$$H^n(M_\epsilon, R) = 0 \ .$$

On est alors tenté de croire que l'on a la convergence du spectre de M_ϵ vers celui de M pour les p-formes, avec le rajout de $(N-1)$ formes harmoniques de degré $(n-1)$ qui se singularisent vers le bord lorsque $\epsilon \to 0$. C'est le cas, si ce n'est qu'une petite valeur propre pour les $(n-1)$-formes disparaît.

Théorème 1.1. *Soit $M_\epsilon = M - B(a,\epsilon)$. Si $\mu_0(\epsilon) \leq \mu_1(\epsilon) \leq \dots$ est le spectre du Laplacien de M_ϵ , avec les conditions (I) agissant sur les p-formes $(0 \leq p \leq n)$ et $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ le spectre du Laplacien de M, alors*

si $p \neq n-1 \ \forall k \in N \quad \lim_{\epsilon \to 0} \mu_k(\epsilon) = \lambda_k$

si $p = n-1$ *et* $b_{n-1} = \dim H^{n-1}(M) = \dim H^{n-1}(M_\epsilon)$

$\forall k \quad 0 \leq k < b_{n-1} \quad \mu_k(\epsilon) = \lambda_k = 0$

$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_{b_{n-1}}(\epsilon) = 0 \quad$ *(et* $\mu_{b_{n-1}}\epsilon) \neq 0$ *)*
$\forall k > b_{n-1} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \mu_k(\epsilon) = \lambda_{k-1}$.

De la preuve de la démonstration découle en outre la convergence des espaces propres.

Théorème 1.2. *Soient* $M_\epsilon = M - \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, \epsilon)$ *les* a_j *étant des points distincts* $(N > 1)$ *et de même* $\mu_k(\epsilon)$ *et* λ_k *les spectres des* p*-formes sur* M_ϵ *avec (I) et sur* M *. Alors si* $p \neq n-1$, $\forall k \in N \ \lim_{\epsilon \to 0} \mu_k(\epsilon) = \lambda_k$ *et les espaces propres convergent,*
si $p = n-1$ *et* $b_{n-1} = \dim H^{n-1}(M)$ *,*

$\forall k \ \ 0 \leq k < b_{n-1} + N - 1, \ \mu_k(\epsilon) = 0$,

$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_{b_{n-1}+N-1}(\epsilon) = 0 \quad$ *(et* $\mu_{b_{n-1}+N-1}(\epsilon) \neq 0$ *)*
$\forall k > b_{n-1} + N - 1 , \ \lim_{\epsilon \to 0} \mu_k(\epsilon) = \lambda_{k-N}$.

De plus, les espaces propres pour des valeurs propres limites non nulles convergent; l'espace des $(n-1)$*-formes harmoniques est asymptotiquement donné par les* $(n-1)$*-formes harmoniques de* M *et par les formes singulières:* $*d(G_{a_1} - G_{a_j}) \quad 2 \leq j \leq N$ *où* G_{a_j} *est le noyau de Green au point* a_j *de l'opérateur de Laplace agissant sur les fonctions.*

Nous allons essayer, pour démontrer ces théorèmes, de suivre les méthodes de [A1]. Passer du spectre de M à celui de M_ϵ ne présente pas de difficultés majeures. Pour passer du spectre de M_ϵ à celui de M , on prolonge harmoniquement les formes différentielles. On sait que ce prolongement existe d'après [D-S] et qu'il est unique d'après [A2]. Mais il nous faut un contrôle **indépendant de** ϵ de ce prolongement. C'est pour cela que nous avons choisi le prolongement euclidien.

Au §2, nous étudions le prolongement harmonique à l'intérieur d'une petite boule des formes différentielles définies sur un ouvert de R^n . On est confronté en ce qui concerne les fonctions coordonnées de ces formes différentielles à des conditions au bord mixtes et couplées et le contrôle du prolongement n'est pas aisé par ce biais, il faut donc garder le problème global.

Les deux propositions 3.1 et 3.2 sont démontrées au §3. Aux §4 et 5 consacrés à la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2, nous utiliserons le prolongement euclidien étudié au §2 sur la variété M . C'est au niveau de ce prolongement et de son utilisation sur M que des difficultés importantes surgissent, comparées à [A1]. Alors que pour les fonctions, les normes de l'espace de Sobolev H^1 est aussi la norme de la forme quadratique associée au Laplacien: $\int |f|^2 + |df|^2$, il n'en est pas de même pour les p-formes, et nous utilisons les propositions 3.1 et 3.2.

Rappelons enfin le

Lemme de Weyl. [M] *Soit* X *une variété à bord et* $\phi \in H^1(X)$ *qui vérifie pour tout* $f \in C^\infty(X)$: $\int_X \phi \Delta f = \lambda \int_X \phi f$. *Alors*

$$\forall U \subset \bar{U} \subset X \qquad \phi \in C^\infty(U) \ \text{ et } \Delta\phi = \lambda\phi \ .$$

2. Le cas euclidien

Nous étudions ici le prolongement harmonique à l'intérieur d'une petite boule de R^n. Notons B_ϵ la boule de rayon ϵ et de centre 0. A toute p-forme $\phi \in H^1(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon))$ est associé un unique prolongé harmonique $P_\epsilon(\phi)$ (d'après [D-S] et [A2]) , i.e. $P_\epsilon(\phi)_{|\partial B_\epsilon} = \phi_{|\partial B_\epsilon}$ et $(*P_\epsilon(\phi))_{|\partial B_\epsilon} = *\phi_{|\partial B_\epsilon}$.

Proposition 2.1. *Il existe une constante* C_1 *indépendante de* ϵ, ($\epsilon \leq 1$) *telle que pour tout* $\phi \in H^1(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon))$ *si* $p \neq n-1$ *et si* $\mathrm{nor}\,\phi_{|\partial B_\epsilon} = 0$, *alors*

$$\left(\| P_\epsilon(\phi) \|^2 + q(P_\epsilon(\phi))\right) \leq C_1 \left(\| \phi \|^2 + q(\phi)\right) \ .$$

Démonstration. Notons $H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon)) = \{\phi \in H^1(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon)) \mid \mathrm{nor}(\phi)_{|\partial B_\epsilon} = 0\}$. Remarquons que le cas $p = n$ est vide et le cas $p = 0$, c'est-à-dire où ϕ est une fonction, a déjà été démontré dans [A1].

(2.1.1) Expression de P_ϵ .

Considérons $h_\epsilon(x) = \epsilon x$ bijection de $R^n - B_1$ sur $R^n - B_\epsilon$. Alors
$h_\epsilon^* : H^1(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon)) \longrightarrow H^1(\Lambda^p(R^n - B_1))$ préserve la condition au bord et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon)) \arrow[r, "h_\epsilon^*"] \arrow[d, "P_\epsilon"'] & H^1(\Lambda^p(R^n - B_1)) \arrow[d, "P_1"] \\
H^1(\Lambda^p(R^n)) \arrow[r, "h_\epsilon^*"] & H^1(\Lambda^p(R^n))
\end{tikzcd}$$

est commutatif, car si ω est harmonique $h_\epsilon^*\omega$ l'est aussi (ω harmonique équivaut ici à ce que ses coefficients dans la base canonique $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$ soient harmoniques). Ainsi $P_\epsilon = h^*_{1/\epsilon} \circ P_1 \circ h_\epsilon^*$.

La vérification du lemme suivant est immédiate:

Lemme 2.1.1. *(i)* $\| h_\epsilon^* \phi \|^2 = \epsilon^{2p-n} \| \phi \|^2$.

(ii) $\| d(h_\epsilon^* \phi) \|^2 = \epsilon^{2p+2-n} \| d\phi \|^2$.

(iii) $\| \delta(h_\epsilon^* \phi) \|^2 = \epsilon^{2p+2-n} \| \delta\phi \|^2$.

(2.1.2) P_1 **est continu.**
Les deux espaces $H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_1))$ et $H^1(\Lambda^p(R^n))$ sont complets pour les deux normes équivalentes $\| \cdot \|_q$ et $\| \cdot \|_1$. Il suffit donc, d'après le théorème du graphe fermé, de montrer que le graphe de P_1 est fermé.

Supposons que ϕ_n est une suite de points de $H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_1))$ telle que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ et $\lim_{n\to\infty} P_1 \phi_n = \psi$.

- $\forall \theta \in L^2(R^n - B_1)$:

  $<\theta, \phi_n> = <\theta, P_1\phi_n>$ d'où, lorsque $n \to \infty$, $<\theta, \phi> = <\theta, \psi>$.

  Donc $\psi_{|R^n - B_1} = \phi$, ou ψ est un prolongé de ϕ .

- $\forall \theta \in C_0^\infty(\Lambda^p(B_1))$:

$$\begin{aligned} <\psi, \Delta\theta> &= \lim_{n\to\infty} <P_1(\phi_n), \Delta\theta> \\ &= \lim_{n\to\infty} <\Delta(P_1(\phi_n)), \theta> \quad \text{(car } \theta \text{ est à support compact dans } B_1) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Ainsi ψ est faiblement harmonique à l'intérieur de B_1 . Mais $\psi_{|B_1} \in H^1(B_1)$; donc, d'après le lemme de Weyl, $\psi_{|B_1}$ est harmonique et $\psi = P_1\phi$. Le graphe de P_1 est fermé, il existe donc $C_2 > 0$ telle que

$$\forall \phi \in H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_1)), \quad \|P_1\phi\|^2 + q(P_1\phi) \le C_2(\|\phi\|^2 + q(\phi)) \ .$$

(2.1.3) On montre de même que $\widetilde{P}_1 : H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(B_2 - B_1)) \to H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(B_2))$ est continu. Soit $\widetilde{C}_2 = |||\widetilde{P}_1|||$.

(2.1.4) Lemme. *Il existe une constante* $C_3 > 0$ *telle que, pour tout* $\epsilon, 1 \ge \epsilon > 0$ *et* $\phi \in H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon))$, $p \neq (n-1)$ *en écrivant* $\phi = \alpha + dr \wedge \beta$ (r *est le rayon dans* R^n), *alors*

$$q(\alpha) \le C_3 \ q(\phi) \ .$$

Remarque. Ce problème ne se pose pas pour les fonctions.

Montrons, avant de démontrer ce lemme, comment il permet de conclure.
Soit $\phi = \alpha + dr \wedge \beta \in H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(R^n - B_\epsilon))$. Comme $\beta_{|\partial B_\epsilon} = 0$, $P_\epsilon(\phi)_{|B_\epsilon} = P_\epsilon(\alpha)_{|B_\epsilon}$, $P_\epsilon = h^*_{1/\epsilon} \circ P_1 \circ h_\epsilon$. D'après les lemmes (2.1.1) et (2.1.2), on a:

$$\begin{aligned}\|P_\epsilon(\phi)\|^2 &= \epsilon^{n-2p}\|P_1(h^*_\epsilon\phi)\|^2 \\ &\leq C_2\epsilon^{n-2p}\left(\|h^*_\epsilon\phi\|^2 + q(h^*_\epsilon\phi)\right) \\ &\leq C_2\epsilon^{n-2p}\left(\epsilon^{2p-n}\|\phi\|^2 + \epsilon^{2p+2-n}q(\phi)\right) \\ &\leq C_2\left(\|\phi\|^2 + \epsilon^2 q(\phi)\right) \\ &\leq C_2\left(\|\phi\|^2 + q(\phi)\right) \quad \text{car } \epsilon \leq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q\big(P_\epsilon\alpha\big) &= \epsilon^{2(p+1)-n}q\big(P_1 h^*_\epsilon\alpha\big) \\ &= \epsilon^{2(p+1)-n}\Big(q\big((P_1 h^*_\epsilon\alpha)_{|B_1}\big) + q\big(h^*_\epsilon\alpha\big)\Big),\end{aligned}$$

mais $P_1(h^*_\epsilon\alpha)_{|B_1} = \widetilde{P}_1\left((h^*_\epsilon\alpha)_{|B_2-B_1}\right)_{|B_1}$, c'est-à-dire que le prolongé harmonique de $h^*_\epsilon\alpha$ ne dépend que de la valeur de $(h^*_\epsilon\alpha)$ au bord.

Notons provisoirement $\alpha_\epsilon = h^*_\epsilon\alpha_{|B_2-B_1}$. D'après le point (2.1.3)

$$q\left(P_1(h^*_\epsilon\alpha)_{|B_1}\right) \leq \widetilde{C}_2\left(\|\alpha_\epsilon\|^2 + q(\alpha_\epsilon)\right) \ .$$

Mais $\alpha_\epsilon \in H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(B_2 - B_1))$ et donc $q(\alpha_\epsilon) \geq \mu_1^{(p)}\|\alpha_\epsilon\|^2$, si $\mu_1^{(p)}$ représente la première valeur propre du Laplacien sur les p-formes de $B_2 - B_1$ avec les conditions (I), c'est-à-dire celui dont les formes harmoniques correspondent à la cohomologie absolue. Or si $p \neq n-1$, $H^p(B_2 - B_1) = 0$. Donc $\mu_1^{(p)} > 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}q(P_1(h^*_\epsilon\alpha)_{|B_1}) &\leq \widetilde{C}_2\left(1 + \frac{1}{\mu_1^{(p)}}\right)q(\alpha_\epsilon) \\ &\leq \widetilde{C}_2\left(1 + \frac{1}{\mu_1^{(p)}}\right)q(h^*_\epsilon\alpha) \ .\end{aligned}$$

Et donc, en notant $c = \left(1 + \widetilde{C}_2\left(1 + \frac{1}{\mu_1^{(p)}}\right)\right)$, on a $q(P_\epsilon\alpha) \leq \epsilon^{2(p+1)-n}cq(h^*_\epsilon\alpha) \leq c\ q(\alpha)$, d'après (2.1.1). Donc $q\left(P_\epsilon(\phi)_{|B_\epsilon}\right) \leq c\ C_3 q(\phi)$, d'après (2.1.4) et

$$q\left(P_\epsilon(\phi)\right) \leq (1 + c\ C_3)q(\phi). \qquad \square$$

(2.1.5) *Démonstration du Lemme (2.1.4).*

Nous prenons dans ce paragraphe les notations suivantes : d_0 est la différentielle des formes sur la sphère de rayon r et δ_r son adjoint. Alors $\delta_r = \frac{1}{r^2}\delta_1$ et si $\phi = \alpha + dr \wedge \beta$ est une p-forme et $'$ note la dérivation en r

$$\begin{aligned} d\phi &= d_0\alpha + dr \wedge (\alpha' - d_0\beta) \\ \delta\phi &= \delta_r\alpha - \frac{1}{r^{n-2p+1}}(r^{n-2p+1}\beta)' - dr \wedge \delta_r\beta \ . \end{aligned}$$

Enfin $<,>$ est le produit scalaire des formes différentielles sur la sphère de rayon 1 et $|\cdot|$ la norme associée.

On peut supposer ϕ à support compact.

$$\begin{aligned} q(\phi) = \int_{r>\epsilon} \Big(& r^{n-2p-3}(|d_0\alpha|^2 + |\delta_1\alpha|^2) + r^{n-2p-1}(|\alpha'|^2 + |d_0\beta|^2 + |\delta_1\beta|^2) \\ & + r^{-n+2p-1}|(r^{n-2p+1}\beta)'|^2 - 2r^{n-2p-1} < \alpha', d_0\beta > - \frac{2}{r^2} < \delta_1\alpha, \left(r^{n-2p+1}\beta\right)' > \Big) dr \end{aligned}$$

$$< \alpha', d_0\beta > = < \delta_1\alpha', \beta > = < (\delta_1\alpha)', \beta > \ .$$

Ainsi, par intégration par partie, la somme des deux derniers termes vaut:

$$2\int_{r>\epsilon} -\frac{2}{r^3} < \delta_1\alpha, r^{n-2p+1}\beta > dr + \frac{2}{\epsilon^2} < \delta_1\alpha, \epsilon^{n-2p+1}\beta >_{|r=\epsilon} \ ,$$

mais $\beta_{|r=\epsilon} = 0$ par hypothèse. On a donc la formule

$$\begin{aligned} (2.1.6) \quad q(\phi) = \int_{r>\epsilon} \Big(& r^{n-2p-3}(|d_0\alpha|^2 + |\delta_1\alpha|^2) + r^{n-2p-1}(|\alpha'|^2 + |d_0\beta|^2 + \delta_1\beta|^2) + \\ & + r^{-n+2p-1}|(r^{n-2p+1}\beta)'|^2 - 4r^{n-2p-2} < \delta_1\alpha, \beta > \Big) dr \ . \end{aligned}$$

Transformons l'avant-dernier terme. On a, tout d'abord:

$\left(r^{n-2p+1}\beta\right)' = r^{n-2p}\left((n-2p+1)\beta + r\beta'\right)$

et $\displaystyle\int_{r>\epsilon} 2r^{n-2p} < \beta, \beta' > dr = -(n-2p)\int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr$ (intégration par parties), d'où

$$(n-2p)^2\left(\int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr\right)^2 \leq 4\int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr \int_{r>\epsilon} r^{n-2p+1}|\beta'|^2 dr$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. D'où:

$$\left(\frac{n}{2}-p\right)^2 \int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr \leq \int_{r>\epsilon} r^{n-2p+1}|\beta'|^2 dr \ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{r>\epsilon} r^{-n+2p-1}\left|\left(r^{n-2p+1}\beta\right)'\right|^2 dr \\
&= \int_{r>\epsilon} \left(r^{n-2p+1}|\beta'|^2 + (n-2p+1)^2 r^{n-2p-1}|\beta|^2 + 2(n-2p+1)r^{n-2p} < \beta, \beta' > \right) dr \\
&= \int_{r>\epsilon} r^{n-2p+1}|\beta'|^2 dr + (n-2p+1)\int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr \\
&\geq \left(n-2p+1+(\frac{n}{2}-p)^2\right)\int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr \\
&\geq \left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2 \int_{r>\epsilon} r^{n-2p-1}|\beta|^2 dr \ .
\end{aligned}$$

Et, finalement,

$$\begin{aligned}
(2.1.7) \qquad q(\phi) \geq \int_{r>\epsilon} &\Big(r^{n-2p-3}|d_0\alpha|^2 + r^{n-2p-1}|\alpha'|^2 + \\
&+ r^{n-2p-1}\left(\frac{1}{r^2}|\delta_1\alpha|^2 - 4\langle\frac{1}{r}\delta_1\alpha, \beta\rangle + |d_0\beta|^2 + |\delta_1\beta|^2 + \left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2 |\beta|^2\right)\Big) dr \ .
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que la dernière parenthèse peut toujours être minorée par $\frac{c}{r^2}|\delta_1\alpha|^2$.

(a) Si on décompose α et β, pour chaque r, suivant les formes propres de S^{n-1}, cette minoration de $q(\phi)$ est somme de chacun des termes respectifs de la décomposition, car d_0 et δ_1 respectent cette décomposition suivant les espaces propres.

(b) On peut supposer β perpendiculaire aux formes harmoniques de S^{n-1} car, si β est harmonique, $d\beta = 0$ et le seul terme gênant $< \delta_1\alpha, \beta >=< \alpha, d\beta >= 0$. Et donc $q(\phi) \geq q(\alpha)$.

(c) Notons alors $\lambda_1^{(p)} < \lambda_2^{(p)} < \dots$ les valeurs propres distinctes non nulles du Laplacien de Hodge sur les p-formes de S^{n-1}. Ce spectre a été calculé par S. Gallot et D. Meyer dans [GM1] :
pour $p = 0$ ou $(n-1)$, $\lambda_k^{(p)} = (n-2+k)k$, $k \geq 0$;
pour $1 \leq p \leq n-2$, le spectre des p-formes fermées est $(k+p)(k-p+n)$, $k \geq 0$ celui des p-formes cofermées: $(k+p+1)(k+n-p-1), k \geq 0$ et $\lambda_1^{(p)} = \min\{p(n-p), (p+1)(n-p-1)\}$.

(d) On a $|d_0\beta|^2+|\delta_1\beta|^2 \geq \lambda_1^{(p-1)}|\beta|^2$ et donc, si $n\geq 6$, $\lambda_1^{(p-1)}\geq 5$, d'après la formule ci-dessus. On peut alors minorer la deuxième ligne de (2.1.7) par:

$$\int r^{n-2p-1}\left(\frac{1}{r^2}|\delta_1\alpha|^2-2\langle\frac{2}{r}\delta_1\alpha,\beta\rangle+5|\beta|^2\right)dr \geq \int r^{n-2p-3}\left(1-\frac{4}{5}\right)|\delta_1\alpha|^2\ ,$$

on a donc:

$$q(\phi)\geq\frac{1}{5}q(\alpha)$$

Pour $n\leq 5$, il faut utiliser le facteur $\left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2$:

(e) Pour $n=3$, reste le cas $p=1$ où $\left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2=\frac{9}{4}$ et $\lambda_1^{(0)}=2$, donc $q(\phi)\geq\left(1-\frac{4}{4+\frac{1}{4}}\right)q(\alpha)$ par le même raisonnement.

(f) Pour $n=5$, $p=1$ ou 2 ou 3; $\lambda_1^{(0)}=\lambda_1^{(1)}=4$, $\lambda_1^{(2)}=6$, donc $\lambda_1^{(p-1)}+\left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2$ vaut $\frac{41}{4}$ si $p=1$, $\frac{25}{4}$ si $p=2$ ou 3 et donc, dans tous les cas, $q(\phi)\geq\frac{16}{25}q(\alpha)$.

(g) Pour $n=4$, $p=1$ ou 2: $\lambda_1^{(p-1)}+\left(\frac{n}{2}-p+1\right)^2=7$ pour $p=1$, 4 pour $p=2$.
On a donc pour $p=1$, $q(\phi)\geq\left(1-\frac{4}{7}\right)q(\alpha)$.
Pour $p=2$, il faut remarquer que, vu (2.1.7), on peut se restreindre à β cofermée, car, si $d\beta=0$, le terme gênant est nul. Alors, d'après (c) $|d_0\beta|^2+|\delta_1\beta|^2\geq 4|\beta|^2$ et donc $q(\phi)\geq\left(1-\frac{4}{5}\right)q(\alpha)$.

(h) Finalement, on peut affirmer $q(\phi)\geq\frac{1}{17}q(\alpha)$. □

3. Comparaison des q-normes

Soit (M,g) une variété à bord ∂M et $\vec{n}$ la normale intérieure au bord. Notons $S_{\vec{n}}(X)=\nabla_X\vec{n}-(\nabla_X\vec{n},\vec{n})\vec{n}$ la deuxième forme fondamentale de ∂M prise en un vecteur tangent X de ∂M, on a alors si X et Y sont deux vecteurs tangents à ∂M et si X est prolongé de telle sorte que $[X,\vec{n}]=0$: $(S_{\vec{n}}(X),Y)=(\nabla_{\vec{n}}X,Y)$. Soit A une borne de $S_{\vec{n}}$: $\forall X,\quad |S_{\vec{n}}(X)|\leq A|X|$.

3.1. Proposition. *Il existe une constante $C>0$ qui ne dépend que du tenseur de courbure de M telle que pour tout $\phi\in H^1(\Lambda^p(M))$ vérifiant* $\mathrm{nor}\,\phi_{|\partial M}=0$ *ou* $\tan\phi_{|\partial M}=0$, *on a*

$$|q(\phi)-\|\nabla\phi\|^2|\leq C\left(\int_M|\phi|^2+A\int_{\partial M}|\phi|^2\right)\ .$$

Remarque. Dans [GM2], cette formule est démontrée pour les formes harmoniques dans l'un des domaines du Laplacien de Hodge d'une variété à bord.

Démonstration. Par dualité de Hodge, il suffit de le vérifier pour les p-formes ϕ qui vérifient nor $\phi_{|\partial M} = 0$. De plus, par densité, on peut supposer ϕ de classse C^∞.

La formule de Weizenböck s'écrit, en chaque point:

$$((d\delta + \delta d)\phi, \phi) = \frac{1}{2}\Delta(|\phi|^2) + |\nabla\phi|^2 + \Re_p(\phi, \phi)$$

où $\Re_p$, un opérateur de la courbure de M, est borné par les bornes du tenseur de courbure de M.

$$\int_M ((d\delta + \delta d)\phi, \phi) = \int_M (d\phi, d\phi) + (\delta\phi, \delta\phi) + \int_{\partial M} \delta\phi \wedge *\phi - \phi \wedge *d\phi$$
$$\int_M \Delta(|\phi|^2) = -\int_{\partial M} \nabla_{\vec{n}}|\phi|^2 \ .$$

On a donc :

$$\|\nabla\phi\|^2 - q(\phi) = -\int \Re_p(\phi, \phi) + \int_{\partial M} \delta\phi \wedge *\phi - \phi \wedge *d\phi + (\nabla_{\vec{n}}\phi, \phi) \ . \tag{3.1.1}$$

Faisons une décomposition en coordonnées normales au bord $(y, t) \in \partial M \times [0, t_0[$, grâce à l'application exponentielle normale expn : d_0 est la différentielle de ∂M , δ_t son adjoint et $*_t$ l'étoile de Hodge de la sous-variété $\operatorname{expn}\big(\partial M \times \{t\}\big)$. Ecrivons $\phi = \alpha + dt \wedge \beta$ et $\nabla_{\vec{n}} = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{\vec{n}}$. On a les formules, en écrivant $'$ la dérivation par rapport à t :

$$\begin{aligned}
d\phi &= d_0\alpha + dt \wedge (\alpha' - d_0\beta) \\
\delta\phi &= \delta_t\alpha - *_t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(*_t\beta) - dt \wedge \delta_t\beta \\
(\nabla_{\vec{n}}\phi, \phi) &= (\phi', \phi) + (\Gamma_{\vec{n}}\phi, \phi)
\end{aligned}$$

Quant à l'élément de volume ω de M il sécrit $\omega = dt \wedge d\sigma_t$, où $d\sigma_t$ est l'élément de volume de la sous-variété $\operatorname{expn}\big(\partial M \times \{t\}\big)$. Donc

$$\begin{aligned}
(\phi', \phi)\ \omega = \phi' \wedge *\phi &= (\alpha' + dt \wedge \beta') \wedge \big(*_t\ \beta + dt \wedge (-1)^p *_t \alpha\big) \\
&= \alpha' \wedge *_t\beta + dt \wedge (\beta' \wedge *_t\beta + \alpha' \wedge *_t\alpha)
\end{aligned}$$

$\alpha' \wedge *_t\beta = 0$ comme n-forme sur ∂M. Donc $(\phi', \phi)\ d\sigma_t = \beta' \wedge *_t\beta + \alpha' \wedge *_t\alpha$.

Le terme de bord est donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial M}\Big(\delta_t\alpha - *_t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(*_t\beta)\Big) \wedge *_t\beta - \alpha \wedge *_t(\alpha' - d_0\beta) + (\beta' \wedge *_t\beta) + (\alpha' \wedge *_t\alpha) + (\Gamma_{\vec{n}}\phi, \phi) \\
&\qquad = \int_{\partial M}\Big(\partial_t\alpha - *_t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(*_t)\beta\Big) \wedge *_t\beta + \alpha \wedge *_t d_0\beta + (\Gamma_{\vec{n}}\phi, \phi) \ .
\end{aligned}$$

Si β est nulle, il reste $\int_{\partial M_\epsilon}(\Gamma_{\vec{n}}\alpha,\alpha)$. Ce terme est par définition, contrôlé par la courbure moyenne du bord.

$$|\int_{\partial M}(\Gamma_{\vec{n}}\alpha,\alpha)| \leq A\int_{\partial M}|\alpha|^2 = A\int_{\partial M}|\phi|^2 \qquad \square$$

3.2. Proposition. *Il existe une constante* $C>0$ *telle que, pour tout* $\phi\in H^1(\Lambda^p(M))$,

$$\int_{\partial M}|\phi|^2 \leq C\left(\|\nabla\phi\|\cdot\|\phi\| + A\|\phi\|^2\right) .$$

Démonstration. On garde les coordonnées normales, il suffit de vérifier la proposition pour ϕ à support dans $\operatorname{expn}(\partial M\times[0,t_0[)$.

$$\int_{\partial M}|\phi|^2 = \int_{\partial M}|\phi|^2 d\sigma_0 = \int_M d(|\phi|^2 d\sigma_t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t}(|\phi|^2)\omega + |\phi|^2 dt\wedge\nabla_{\vec{n}}(d\sigma_t)$$

mais $|(d\sigma_t,\nabla_{\vec{n}}(d\sigma_t)|\leq A\ |d\sigma_t|^2$.

On a le résultat de la proposition, avec

$$\int_M\frac{\partial}{\partial t}((\phi,\phi))\omega = 2\int_M <\nabla_{\vec{n}}\phi,\phi>\omega \leq 2\|\nabla\phi\|\ \|\phi\| \ . \qquad \square$$

3.3. Applications à M_ϵ.

Soient (M,g) une variété riemannienne compacte, $a\in M$ et $B(a,R)$ la boule géodésique de centre a et de rayon R. On suppose $R<\operatorname{Inj}(M)$ le rayon d'injectivité de M. On peut donc, grâce à la carte exponentielle, ramener la métrique g_0 de T_aM sur $B(a,R)$. Les métriques g et g_0 définissent chacune un opérateur $D=d+\delta$ et $D_0=d+\delta_0$ et une forme quadratique q et q_0.

Nous voulons comparer leur q-normes respectives. Il est à noter que g et g_0 coïncident en a et, comme on utilise les coordonnées géodésiques, on a :

Lemme 3.3.0. *Si* $(\ ,\ )$ *et* $(\ ,\ )_0$ *sont les produits scalaires respectifs sur la fibre de* $\Lambda^p(M)$, *il existe un opérateur* A *de la fibre tel que* $(\phi,\psi)=(\phi,A\psi)_0$ *et* $A=I+O(r^2)$, *où* I *est l'identité; de même si* ω *et* ω_0 *sont leurs formes-volume, il existe une fonction de classe* $C^\infty f$ *telle que* $\omega=f\cdot\omega_0$ *et* $f=1+O(r^2)$.

En effet, dans les coordonnées normales, $g_{ij}(0)=0$ et $\Gamma^k_{ij}(0)=0$, donc $\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}(0)=0$ et il existe un 2-tenseur covariant h sur $B(0,R)$, tel que

$$g(x)=g_0(x)+\sum_{k\ell} x_k x_\ell h_{k\ell}(x)\ . \qquad \square$$

Enfin, $\vec{n}=\frac{\partial}{\partial r}$ est le vecteur unitaire normal aux sphères centrées en a, pour g et g_0. Les courbures principales des petites sphères sont de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon}$ on a donc aussi bien pour g que pour g_0 l'estimée de la norme de $S_{\vec{n}}$: $A=O(\frac{1}{\epsilon})$.

Proposition 3.3. *Il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $\phi\in H^1(\Lambda^p(B(0,R)-B(0,\epsilon)))$ vérifiant $\mathrm{nor}\phi_{|\partial B(0,\epsilon)}=0$, $\tan\phi_{|\partial B(0,R)}=0$ et $\mathrm{nor}\phi_{|\partial B(0,R)}=0$:*

$$|q(\phi)-q_0(\phi)|\le C(\|\phi\|^2+q(\phi)) \quad et \quad |q(\phi)-q_0(\phi)|\le C(\|\phi\|_0^2+q_0(\phi))\ .$$

Corollaire. *Il existe une constante $C>0$ telle que $\forall\phi\in H^1\left(\Lambda^p(B(0,R)-B(0,\epsilon))\right)$, si $\mathrm{nor}\phi_{|\partial B(0,\epsilon)}=\mathrm{nor}\phi_{|\partial B(0,R)}=0$ et $\tan\phi_{|\partial B(0,R)}=0$, alors*

$$\| P_\epsilon\phi\|_q\le C\ \|\phi\|_q\ .$$

démonstration de la proposition. On s'occupe de la première inégalité, la deuxième étant du même type.

(3.3.1) Lemme. *Soit B l'endomorphisme de fibré défini par $\forall\phi\in\Lambda(B(0,R))$, $*\phi=B*_0\phi$, alors*

$$B=*_0 fA(*_0)^{-1} \quad et \quad B=I+r^2D(r,\sigma),$$

D étant borné en norme C^1 pour $r\le R$.

Démonstration : $\phi\wedge*\phi=(\phi,\phi)\,\omega=(\phi,A\phi)_0 f\,\omega_0=\phi\wedge*_0 fA\phi$.

Le développement de B vient de ceux de A et de f. $\square$

(3.3.2) Lemme. *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $\epsilon<\mathrm{Inj}(M)$ et $\phi\in H^1(\Lambda^p(M_\epsilon))$ vérifiant $\tan\phi_{|\partial M_\epsilon}=0$ ou $\mathrm{nor}\,\phi_{|\partial M_\epsilon}=0$, alors*

$$\int_{M_\epsilon}|\nabla\phi|^2dv_g\le\frac{4}{3}q(\phi)+\frac{C}{\epsilon^2}\ \|\phi\|^2$$

c'est une conséquence directe des propositions 3.1 et 3.2.

(3.3.3) Il existe $C>1$ telles que $\frac{1}{C}\parallel \phi \parallel_{g_0}\leq\parallel \phi \parallel_g\leq C \parallel \phi \parallel_{g_0}$, (car les métriques et les formes-volume sont comparables sur un ensemble compact).

(3.3.4) De même $\exists\, C>0$ tel que $\left| \displaystyle\int_{M_\epsilon} |d\phi|_g^2 dv_g - \int_{M_\epsilon} |d\phi|_{g_0}^2 dv_{g_0} \right| \leq C \int_{M_\epsilon} |d\phi|_g^2 dv_g$.

(3.3.5) $q(\phi)=\int_{M_\epsilon}|d\phi|_g^2 dv_g+\int_{M_\epsilon}|d*\phi|_g^2 dv_g$, il reste donc à comparer $\int_{M_\epsilon}|d*\phi|_g^2 dv_g$ avec $\int_{M_\epsilon}|d*_0\phi|_{g_0}^2 dv_{g_0}$.

Mais on a, toujours pour la même raison :

$$\left| \int_{M_\epsilon} |d*\phi|_{g_0}^2 dv_{g_0} - |d*\phi|_g^2 dv_g \right| \leq C \int_{M_\epsilon} |d*\phi|_g^2 dv_g \ .$$

Reste donc à regarder $\int_{M_\epsilon}|d*\phi|_{g_0}^2 dv_{g_0}-\int_{M_\epsilon}|d*_0\phi|_{g_0}^2 dv_{g_0}$:

$$\begin{aligned}
\parallel d*\phi \parallel_{g_0}^2 - \parallel d*_0\phi \parallel_{g_0}^2 &= (\parallel d*\phi \parallel_{g_0} - \parallel d*_0\phi \parallel_{g_0})(\parallel d*\phi \parallel_{g_0} + \parallel d*_0\phi \parallel_{g_0}) \\
\left| \parallel d*\phi \parallel_{g_0} - \parallel d*_0\phi \parallel_{g_0} \right| &\leq \parallel d(*-*_0)\phi \parallel_{g_0} \\
&\leq \parallel d((B-I)*_0\phi) \parallel_{g_0} \\
&\leq C(\parallel r^2\nabla\phi \parallel + \parallel \phi \parallel) \quad \text{d'après 3.3.1 et 3.3.2.}
\end{aligned}$$

On remarque que $\nabla(r^2\phi)=2rdr\otimes\phi+r^2\nabla\phi$, donc $\left|\parallel r^2\nabla\phi\parallel - \parallel\nabla(r^2\phi)\parallel\right| = O(\parallel\phi\parallel)$. Mais d'après la proposition 3.1 :

$$|q(r^2\phi)-\parallel \nabla(r^2\phi)\parallel^2| \leq C\left(\int_{M_\epsilon}|r^2\phi|^2+\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial M_\epsilon}\epsilon^4|\phi|^2\right) \ .$$

Avec la proposition 3.2, on en déduit :

$$|q(r^2\phi)-\parallel \nabla(r^2\phi)\parallel^2| \leq C\left(\int_{M_\epsilon} r^4|\phi|^2+\left(\epsilon^3(\parallel\nabla\phi\parallel\,\parallel\phi\parallel+\epsilon^2\parallel\phi\parallel^2\right)\right) \ ,$$

et donc, comme pour le lemme 3.3.2 :

$$\begin{aligned}
\parallel \nabla(r^2\phi)\parallel^2 &\leq C\left(\parallel r^2\phi\parallel^2+q(r^2\phi)\right) \\
&\leq C'\left(\parallel\phi\parallel^2+q(\phi)\right) \quad \text{(car } r^2 \text{ et } rdr \text{ sont bornées).}
\end{aligned}$$

On a finalement : $\left|\parallel d*\phi\parallel_{g_0}-\parallel d*_0\phi\parallel_{g_0}\right|\leq C\parallel\phi\parallel_q$; donc

$$\left|\parallel d*\phi\parallel_{g_0}^2-\parallel d*_0\phi\parallel_{g_0}^2\right| \leq C\parallel\phi\parallel_q(2\parallel d*\phi\parallel_{g_0}+C\parallel\phi\parallel_q)$$

et avec (3.3.4) :

$$\left(\| d * \phi \|_g^2 - \| d *_0 \phi \|_{g_0}^2\right) \leq C\left(\| \phi \|^2 + q(\phi)\right) \ . \qquad \square$$

4. Démonstration du théorème 1.1

(4.1) Il suffit, par dualité, d'étudier le spectre du Laplacien avec les conditions au bord (I). Les $(n-1)$-formes seront encadrées par les $(n-2)$- et les n-formes. Considérons donc $p \neq n-1$. Dans ce cas la comparaison se fait en transplantant les formes propres d'une variété sur l'autre.

(4.2) Passage de M à M_ϵ. Soit $\chi : R^+ \to R^+$ une fonction de classe C^∞ vérifiant :
$\chi(r) = 0$ si $r \leq 3/2$,

$\chi(r) = 1$ si $r \geq 2$,

χ est croissante.

On pose $\chi_\epsilon(m) = \chi\left(\frac{d(a,m)}{\epsilon}\right)$. Alors $\chi_\epsilon(m) = 0$ si $d(a,m) \leq \frac{3\epsilon}{2}$

$$\| d\chi_\epsilon \|_0^2 = \int_{B_2} \frac{1}{\epsilon^2} \, |\chi'\left(\frac{\| x \|}{\epsilon}\right)|^2 dx = \epsilon^{n-2} \int_{B_2} |\chi'(x)|^2 dx \ ,$$

comme $n \geq 3$ $\| d\chi_\epsilon \|_0 \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$. On a donc le

Lemme 4.2. *Pour toute p-forme $\psi \in H^1(\Lambda^p(M))$ $\lim_{\epsilon \to 0} \| \psi - \chi_\epsilon \cdot \psi \|_q = 0$, on a même $\| \psi - \chi_\epsilon \cdot \psi \|_q^2 = O(\epsilon^{n-2})$ où le O dépend de ψ.*

On a $\chi_\epsilon \psi \in H_0^1(\Lambda^p M_\epsilon)$ et, d'après la formule du minimax, on en déduit, en appliquant le lemme aux formes propres de M : $\forall k \geq 0$, $\mu_k(\epsilon) \leq \lambda_k + O_k(\epsilon^{n-2})$.

(4.3) Passage de M_ϵ à M. Remarquons d'abord que d'après le point précédent $\mu_k(\epsilon)$ est bornée indépendamment de ϵ.

Soit $\psi \in H^1_{\mathrm{nor}}(\Lambda^p(M_\epsilon))$, définissons $\phi(x) = \left(1 - \chi(\dfrac{4}{R} d(x,a))\right) \psi(x)$. La forme ϕ est à support dans $B(a, \frac{R}{2})$ et $\psi = \phi + (\psi - \phi)$.

On prolonge ψ, euclidiennement harmonique sur $B(a,\epsilon)$, c'est-à-dire on considère $\tilde{\psi} = P_\epsilon(\phi) + (\psi - \phi)$.

D'après le corollaire de la proposition (3.3)

$$\| P_\epsilon(\phi) \|_q \leq C \| \phi \|_q \ .$$

La fonction $1-\chi\left(\frac{4}{R}d(x,a)\right)$ et ses dérivées premières sont uniformément bornées, il existe donc une constante C, qui dépend de χ, telle que

$$\| \tilde{\psi} \|_q \leq C \| \psi \|_q \quad .$$

Soient alors $\psi_0(\epsilon)\ldots\psi_k(\epsilon)$ des p-formes propres de M_ϵ , de valeurs propres $\mu_0(\epsilon)\ldots\mu_k(\epsilon)$ et $\tilde{\psi}_0(\epsilon)\ldots\tilde{\psi}_k(\epsilon)$ leurs prolongées. Définissons pour $0\leq j\leq k$: $\mu_j=\liminf_{\epsilon\to 0}\mu_j(\epsilon)$, on a d'après le point (4.2) $\mu_j\leq\lambda_j$.

La famille $\tilde{\psi}_j(\epsilon)_{|\epsilon>0}$ est bornée dans $H^1(\Lambda^p(M))$. On peut donc en extraire une suite $\tilde{\psi}_j(\epsilon_m)$ telle que $\mu_j(\epsilon_m)\to\mu_j$ et $\tilde{\psi}_j(\epsilon_m)$ converge faiblement dans $H^1(\Lambda^pM)$ et en norme dans $L^2(\Lambda^pM)$ (d'après le théorème de Banach-Alaoglu qui dit que la boule unité d'un espace de Banach est relativement compact pour la topologie faible, et le lemme de Rellich qui dit que l'injection $H^1(\Lambda^pM)\to L^2(\Lambda^pM)$ est compacte si M est compacte).

Notons ψ_j la limite de $\tilde{\psi}_j(\epsilon_k)$. Alors $\psi_j\in H^1(\Lambda^pM)$ $(\psi_0\ldots\psi_k)$ est orthonormée, en effet:

$$\sqrt{\int_{B(a,\epsilon)}|\tilde{\psi}_j(\epsilon)|^2}\leq\sqrt{\int_{B(a,\epsilon)}|\psi_j|^2}+\| \tilde{\psi}_j(\epsilon)-\psi_j \| ,$$

donc

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B(a,\epsilon_m)}|\tilde{\psi}_j(\epsilon_m)|^2=0$$

et donc

$$<\psi_j,\psi_{j'}>=\lim_{m\to\infty}<\psi_j(\epsilon_m),\psi_{j'}(\epsilon_m)>=\delta_{jj'} \quad .$$

Enfin, $\Delta\psi_j=\mu_j\psi_j$:

$\forall\omega\in C_0^\infty(\Lambda^p(M\backslash\{a\})$ (c'est-à-dire ω est nulle au voisinage de a).

$$\begin{aligned} q(\omega,\psi_j) &= \lim_{m\to\infty} q(\omega,\tilde{\psi}_j(\epsilon_m)) = \lim_{m\to\infty} q(\omega,\psi_j(\epsilon_m)) = \lim_{m\to\infty}\mu_j(\epsilon_m)<\omega,\psi_j(\epsilon_m)> \\ &= \mu<\omega,\psi_j> \quad . \end{aligned}$$

car ω est nulle sur $B(0,\epsilon)$ pour ϵ assez petit.

$C_0^\infty((\Lambda^p(M\backslash\{a\})$ est dense dans $H^1(\Lambda^pM)$ car $n\geq 3$ (voir [A1]). On a donc $\psi_j\in H^1(\Lambda^p(M))$ et $\forall\omega\in H^1(\Lambda^pM)$ $q(\omega,\psi_j)=\mu<\omega,\psi_j>$. Donc, d'après le lemme de Weyl, $\psi_j\in C^\infty(\Lambda^pM)$ et $\Delta\psi_j=\mu_j\psi_j$. Le minimax nous donne alors $\lambda_k\leq\mu_k=\liminf_{\epsilon\to 0}\mu_k(\epsilon)$. Mais en (4.2) on avait $\limsup_{\epsilon\to 0}\mu_k(\epsilon)\leq\lambda_k$. Finalement:

$$\lambda_k=\lim_{\epsilon\to 0}\mu_k(\epsilon) \ .$$

(4.4) On peut alors du point (4.2) déduire la convergence des formes propres et plus précisément des espaces propres grâce au

Lemme (voir [CdV] et [A3] pour des hypothèses minimales).

Soit I un intervalle borné de R dont les extrémité ne sont pas dans le spectre $Sp(Q)$ de la forme quadratique Q (supposée positive, fermée et à spectre discret).

Posons $a = d(\partial, Sp(Q)) > 0$ et $m = \dim E_I$ l'espace propre des valeurs propres de Q qui sont dans I. Alors, si E est un espace vectoriel de dim m (dans le domaine $\mathcal{D}(Q)$ de Q) et s'il existe δ, $0 < \delta < a$ et $\lambda \in I$ tels que

$$\forall f \in E,\ \forall g \in \mathcal{D}(Q) \quad |Q(f,g) - \lambda(f,g)| \leq \delta\sqrt{\| g \|^2 + Q(g)}\, \| f \| ,$$

alors $d(E, E_I) = 0(\delta)$ et les valeurs propres de I sont dans l'intervalle $]\lambda - \delta^2, \lambda + \delta^2[$.

On applique ce lemme à $q_\epsilon = q$,et les conditions au bord I' sur M_ϵ avec un intervalle I tel que $I \cap Sp(q) = \{\lambda_k\}$ alors, à cause de la convergence du spectre, $\dim E_I(q_\epsilon) = m$ la multiplicité de λ_k et d'après (4.2), si $\phi^{(1)} \ldots \phi^{(m)}$ est une base orthonormée de l'espace propre de λ_k, $\chi_\epsilon \phi^{(1)} \ldots \chi_\epsilon \phi^{(m)}$ donne une approximation, à $0(\epsilon^{\frac{n-2}{2}})$ près d'une base de $E_I(q_\epsilon)$.

(4.5) Regardons maintenant le cas $p = n-1$. On peut comme précédemment transplanter les formes propres de M et on a donc, comme dans (4.2), $\limsup \mu_k(\epsilon) \leq \lambda_k$.

D'après la suite de Mayer-Vietoris, on sait que si $b_{(n-1)} = \dim H^{n-1}/(M)$, $\mu_0(\epsilon) = \ldots = \mu_{b_{(n-1)}-1}(\epsilon) = 0$ et $\mu_{b_{(n-1)}}(\epsilon) \neq 0$.

Soit $k \geq b_{(n-1)}$ et $\psi_k(\epsilon)$ une p-forme propre normée de valeur propre $\mu_k(\epsilon)$. Du fait que les opérateurs d et δ commutent avec Δ, on peut supposer $d\psi_k(\epsilon) = 0$ ou $\delta\psi_k(\epsilon) = 0$. Il est donc évident que $\mu_k(\epsilon)$ a une limite, il reste à voir que cette limite est une valeur propre pour les $(n-1)$-formes.

(a) S'il existe une infinité de k tels que $d\psi_k(\epsilon) = 0$. Alors $\delta\psi_k(\epsilon) \neq 0$ est une $(n-2)$-forme propre de M_ϵ (il faut remarquer que les conditions au bord sont toujours vérifiées). Soit alors

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k(\epsilon)}}(\widetilde{\delta\psi_k(\epsilon)}) ,$$

c'est une famille bornée de $H^1(\Lambda^{n-2}M)$. On peut donc trouver une suite $\epsilon_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ telle que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_k(\epsilon_m)$ existe, notons la λ, et telle que $\phi(\epsilon_m)$ converge faiblement H^1 et en norme L_2. Notons $\phi \in H^1(\Lambda^{n-2}M)$ la limite. $\| \phi \|= \lim\limits_{m\to\infty} \| \phi(\epsilon(m)) \| = 1$ et ϕ est non nulle.

Comme précédemment, ϕ est une forme propre de valeur propre λ. Remarquons que $\lambda \neq 0$ car $\lambda = \lim\limits_{m\to 1} \mu_k(\epsilon_m)$ et $\mu_k(\epsilon_m) \neq 0$. La convergence du spectre des $(n-2)$-formes et le fait que la multiplicité de 0 est conservée entraîne $\lambda \neq 0$. Voyons que ceci entraîne $d\phi \neq 0$. Si $d\phi = 0$:

$$\lim_{m\to\infty}(H^1 \text{ faible})\ \phi(\epsilon_m) = \phi \Rightarrow q(\phi) =< \delta\phi, \delta\phi >= \lim_{m\to\infty} < \delta\phi, \delta(\phi(\epsilon_m)) >$$

mais $\delta(\phi(\epsilon)) = \delta(\delta\psi_k(\epsilon)) = 0$ en dehors de la boule $B(0,\epsilon)$, donc

$$\begin{aligned} q(\phi) &= \lim_{m\to\infty} < \delta\phi_{|B_{\epsilon_m}}, \delta(\phi_{\epsilon_m})_{|B_{\epsilon_m}} > \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sqrt{\int_{B_{\epsilon_m}} |\delta\phi|^2} \sqrt{\int_{B_{\epsilon_m}} |\delta\phi_{\epsilon_m}|^2} \, . \end{aligned}$$

Mais, d'après le corollaire 3.3 $\int_{B_{\epsilon_m}} |\delta\phi_{\epsilon_m}|^2$ est borné; de plus $\delta\phi$ est de carré intégrable. Donc $q(\phi) = 0$, ce qui est faux, car $q(\phi) = \lambda \| \phi \|= \lambda, \lambda \neq 0$. Donc $d\phi \neq 0$ et λ est une valeur propre du spectre de Δ sur les $(n-1)$-formes.

(b) S'il existe une infinité de k tels que $\delta\psi_k(\epsilon) = 0$. On regarde, de même que précédem- -ment, $d\psi_k(\epsilon)$, qui est une n-forme nulle au bord (d'après la 2ème condition de (I)) que l'on peut prolonger par 0. $\phi(\epsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_k(\epsilon)}} d\psi_k(\epsilon)$ est une n-forme propre normée de valeur propre $\mu_k(\epsilon)$. On sait déjà que $\mu_k(\epsilon)$ converge vers une valeur propre λ du Laplacien sur les n-formes; quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\phi(\epsilon)$, converge faiblement H^1 et en norme L^2 vers une forme propre ϕ normée, de valeur propre λ. Il peut se passer ici que λ soit nulle (en effet, 0 n'a pas la même multiplicité sur M_ϵ et sur M en degré n).

- Si $\lambda = 0$, alors $\delta\phi(\epsilon) = \frac{\Delta\psi_k(\epsilon)}{\sqrt{\mu_k(\epsilon)}} = \sqrt{\mu_k(\epsilon)}\psi_k(\epsilon)$ converge vers 0.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\delta\phi \neq 0$ et donc λ est une valeur propre du Laplacien de M sur les $(n-1)$-formes.

En résumé, $\mu_0(\epsilon) = \ldots = \mu_{b_{(n-1)}-1}(\epsilon) = 0$, $\mu_{b_{(n-1)}}(\epsilon) \to 0$ et $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \mu_k(\epsilon) = \lambda_{k-1}(\epsilon)$, si $k > b_{(n-1)}$; c'est-à-dire qu'une valeur propre non nulle disparaît à la limite.

On a pour les autres valeurs propres les mêmes résultats que dans les autres degrés sur les projecteurs spectraux. Enfin, si f_ϵ est la fonction du Laplacien avec condition de

Dirichlet qui converge vers $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{vol}M}}$, et dont la valeur propre converge vers 0, alors $*df_\epsilon$ vérifie à $(*df_\epsilon)_{|\partial M_\epsilon} = 0$ et elle est la forme propre de valeur propre $\mu_{b_{(n-1)}}(\epsilon)$ (on peut la normer).

5. Démonstration du théorème 1.2

Le prolongement harmonique de (2.1) peut se faire simultanément sur plusieurs boules distinctes. les techniques précédentes peuvent donc être reproduites sans changement pour $p \neq n-1$. Pour $p = n-1$, $\dim H^{n-1}(M_\epsilon) = \dim H^{n-1}(M) + N - 1$ d'après la suite de Mayer-Vietoris.

Les valeurs propres non nulles du Laplacien sur les $(n-1)$-formes se traitent comme précédemment, en les renvoyant soit dans le spectre des $(n-2)$-formes soit dans le spectre des n-formes.

Il reste à trouver des asymptotiques des formes harmoniques de M_ϵ. Une partie provient de celles de M qu'on annule au voisinage de chaque a_j par multiplication avec $\chi_\epsilon(d(a_j,\cdot))$. Les autres peuvent s'exprimer comme suit : considérons $G(x,y)$ le noyau de Green du Laplacien de M sur les fonctions. C'est une fonction symétrique telle que

$\forall x \in M \quad G_x(y) = G(x,y)$ est solution de

$$\Delta G_x = \delta_x - \frac{1}{\mathrm{vol}M}$$

(c'est-à-dire $\forall f \in H^2(M) \quad \int_M f dv = 0 \Rightarrow \int_M G(x,y)\Delta f(y)dy = f(x)$).

Il ressort des travaux de Aubin ([Au] p.108) qu'on peut écrire

$$G_{a_j} = \frac{C_n}{d(a_j,\cdot)^{n-2}} \cdot F_j$$

où F_j est de classe C^∞ dans les coordonnées polaires, $F_j(0) = 1$ et
$C_n = \dfrac{1}{(n-2)\mathrm{vol}(S^{n-2})}$.

Dans les coordonnées polaires la forme volume s'écrit $r^{n-1}\psi dr \wedge d\mathrm{vol}_{S^{n-1}}$ et le Laplacien $\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\psi\right)}{r^{n-1}\psi}\dfrac{\partial}{\partial r} + A_r$ où A_r est le Laplacien de la sphère de rayon r plongée. F_j vérifie donc l'équation:

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2}F_j - \left(\frac{-n+3}{r} + \frac{\frac{\partial}{\partial r}\psi}{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial r}F_j + A_r F_j + \frac{(n-2)}{r}\frac{\frac{\partial}{\partial r}\psi}{\psi}F_j = -\frac{r^{n-2}}{\mathrm{vol}M} .$$

Ecrivons le développement limité de F_j en fonction de r : $F_j = 1 + rf_j^1 + O(r^2)$.

En regardant les coefficients de $\frac{1}{r}$ dans l'équation, on voit que f_j^1 doit vérifier l'équation $(n-3)f_j^1 + \Delta_0 f_j^1 = 0$ (Δ_0 est le Laplacien de la sphère euclidienne de rayon 1). En effet, en coordonnées polaires $\frac{\frac{\partial}{\partial r}\psi}{\psi} = 0(r)$ et $A_r = \frac{1}{r^2}(\Delta_0 + r^2 \; \dots)$. Donc

si $n > 3 \quad f_j^1 = 0$.

si $n = 3 \quad f_j^1$ est constante.

On peut donc écrire

$$F_j = (1 + rf_j^1) + \widetilde{F_j} \text{ avec } \widetilde{F_j} = 0(r^2) \ .$$

Considérons alors $\omega_j = *d(G_{a_1} - G_{a_j})$. C'est une $(n-1)$-forme fermée et cofermée de M_ϵ . Au voisinage de a_1, $\omega_j \sim C_n \left(-\frac{n-2}{r_1^{n-1}} - f_1^1 \frac{n-3}{r^{n-2}} \right) * dr + \phi_{1j}$ et de même vers a_j avec un signe opposé, ce qui définit ϕ_{jj} et $\phi_{jj} = O\left(\frac{1}{r_j^{n-3}}\right)$, on considère alors

$$\begin{aligned}
\omega_j(\epsilon) &= -\left(\frac{n-2}{r_1^{n-1}} + f_1^1 \frac{n-3}{r_1^{n-2}} \right) * dr + \chi_\epsilon(r_1)\phi_{1j} \quad \text{vers } a_1 \\
&= \left(\frac{n-2}{r_j^{n-1}} + f_j^1 \frac{n-3}{r_j^{n-2}} \right) * dr + \chi_\epsilon(r_j)\phi_{jj} \quad \text{vers } a_j \\
&= \chi_\epsilon(r_k)\omega_j \quad \text{vers } a_k, \;\; k \neq j \text{ et } k \neq 1
\end{aligned}$$

et partout ailleurs $\quad \omega_j(\epsilon) = \omega_j$.

Alors $\mathrm{nor}\,(\omega_j(\epsilon))_{|\partial M_\epsilon} = 0$. Par ailleurs $\| \, \omega_j(\epsilon) \, \|^2 = 0\left(\frac{1}{\epsilon^{n-2}}\right)$. En faisant les mêmes raisonnements que dans (4.2) on voit que

$$q\left(\sqrt{\epsilon^{n-2}}\omega_j(\epsilon)\right) = O(\epsilon^2) \;\text{ ou }\; O(\epsilon^2 \log \epsilon) \ .$$

(Remarquons qu'ici on est amené à estimer des intégrales du type

$$\begin{aligned}
\epsilon^{n-2} \int_\epsilon^{\frac{3}{2}\epsilon} |d\chi_\epsilon|^2 \left(\frac{1}{r^{n-3}}\right)^2 r^{n-1} dr &= \epsilon^{n-4} \int_\epsilon^{\frac{3}{2}\epsilon} r^{-n+5} dr \\
&= O(\epsilon^2) \;\text{ si }\; n \neq 6 \\
&= O(\epsilon^2 \log \epsilon) \;\text{ si }\; n = 6 \ .)
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{\epsilon^{n-2}}\omega_j(\epsilon)$ donne des approximations des $(n-1)$-formes harmoniques manquantes, la singularité de $\omega_j(\epsilon)$ en a_j nous assure qu'elles engendrent un espace vectoriel de dimension $(N-1)$, supplémentaire à celui des $(n-1)$-formes harmoniques de M.

6. En dimension 2

Dans ce cas la fonction qui permet d'annuler les formes propres au voisinage des points a_i a une expression différente. On peut utiliser celle proposée par Courtois ([C] Prop. 1.3.1) :

$$\chi_\epsilon(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq \epsilon \\ \frac{-2}{\ln \epsilon}(\ln r - \ln \epsilon) & \text{si } \epsilon \leq r \leq \sqrt{\epsilon} \\ 1 & \text{si } r \geq \sqrt{\epsilon}. \end{cases}$$

cette fonction vérifie la première partie du lemme 4.2 et on peut l'utiliser pour déterminer comme dans le §5 des 1-formes $\omega_j^{(\epsilon)}$ qui approchent les (N-1) formes harmoniques supplé--mentaires de M_ϵ . Il est à noter que la fonction de Green a en dimension 2 une singularité logarithmique au voisinage de la diagonale et

$$\begin{aligned} \omega_j(\epsilon) &= \frac{-1}{r_1} * dr + \chi_\epsilon(r_1)\phi_{1j} \quad \text{vers } a_1 \\ &= \frac{1}{r_j} * dr + \chi_\epsilon(r_j)\phi_{jj} \quad \text{vers } a_j \\ &= \chi_\epsilon(r_k)\omega_j \quad \text{vers } a_k, \;\; k \neq j \text{ et } k \neq 1 \end{aligned}$$

et partout ailleurs $\quad \omega_j(\epsilon) = \omega_j$.

Bibliographie

[A1] C. Anné, Spectre du Laplacien et écrasement d'anses, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, **20** (1987), 271-280.

[A2] C. Anné, Principe de Dirichlet pour les formes différentielles, *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), 445-450.

[A3] C. Anné, Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité, *Commun. in Partial Diff. Equations* **15** (11) (1990), 1617-1630.

[Au] T. Aubin, Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[C] G. Courtois,. Comportement du spectre d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine, Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1987.

[CdV] Y. Colin de Verdière, Variations spectrales. Manuscrit non publié.

[DS] G.F.D. Duff and D.C. Spencer, Harmonic tensors on riemannian manifolds with boundary, *Ann. of Math.* **56** n. 1 (1952), 128-156.

[G] P.B. Gilkey, Invariance Theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index Theorem, Publish or Perish, Inc. Wilmington, 1984.

[GM1] S. Gallot et D. Meyer, Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, *J. Math. pures et appl.* **54** (1975), 259-284.

[GM2] S. Gallot et D. Meyer, D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications, *Ann. scient. Ec. àm. Sup.* 4ème série, **21** (1988), 561-591.

[H] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Sprin--ger Verlag, Berlin, 1985.

[M] C. B. Morrey, Multiples Integrals in the Calculus of Variations, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[O1] S. Ozawa, Electrostatic capacity and eigenvalues of the Laplacian, *J. Fac. Sci. Univ. Japan Acad.* **55 A** (1979), 172-175.

[O2] S. Ozawa, Spectre of domain with small spherical Neumann boundary, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sec IA, **30** n. 2 (1983), 259-277.

[RS] D.B. Ray and T.M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds, *Adv. in Math.* **7** (1971), 145-210.

[RT] J. Rauch and M. Taylor, Potential and scattering theory on widly perturbed domains, *J. Funct. Anal.* **18** (1975), 27-59.

—o o o—

Colette Anné
E.P.F.L–D.M.A
CH-1015 LAUSANNE

Bruno Colbois
E.T.H. Zentrum Mathematik
CH-8092 ZÜRICH