Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (53–62)

MAJORATION DE MULTIPLICITÉ POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

par *Colette ANNÉ*

INTRODUCTION

Toute métrique g sur une variété M, compacte ou ouverte, définit un opérateur de Laplace Δ_g. Pour chaque fonction V de classe C^∞ sur la variété, on peut alors définit un opérateur de Schrödinger $H = \Delta_g + V$. En choisissant le domaine de H on est assuré que H est elliptique autoadjoint et à résolvante compacte; il admet alors un spectre discret minoré :

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \cdots$$

(Le théorème de Courant, cité plus bas, nous dit en particulier que la première valeur propre est simple.)

Si M est compacte le domaine $\mathcal{D}$ de H est l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^2(M)$ des fonctions de carré intégrable ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2. Si M est ouverte le domaine de H est soit

$$\mathcal{H}^2_D(M) = \{f \in \mathcal{H}^2(M) / f_{|\partial M} = 0\}$$

qui correspond aux conditions de Dirichlet, soit

$$\mathcal{H}^2_N(M) = \left\{f \in \mathcal{H}^2(M) / \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f_{|\partial M} = 0\right\}$$

qui correspond aux conditions de Neumann ($\vec{n}$ est la normale au bord).

Comme H est elliptique $E(\lambda) = \{f \in \mathcal{D} / Hf = \lambda f\}$ est toujours de dimension finie. Notons $m(\lambda) = \dim E(\lambda)$ la multiplicité de λ.

La question est alors de savoir s'il y a des majorations a priori (topologiques) de $m(\lambda)$. Gérard Besson, en affinant un résultat de Cheng a donné un majorant de $m(\lambda_k)$ linéaire en k et en le genre d'une *surface compacte* (voir [B] et [C]).

Colin de Verdière a montré qu'en dimension supérieure ou égale à 3 il n'y a pas de telle majoration (on peut construire sur une variété de dimension supérieure à 3 un opérateur de Schrödinger dont λ_k a une multiplicité arbitrairement grande, voir [CdV]. Il a par ailleurs conjecture que la multiplicité maximale de λ_1 était liée au nombre chromatique d'une surface compacte, c'est-à-dire quelque chose en racine carrée du genre.

Nous présentons ici les résultats de Nadiraschvili, [N], sur cette question (ces résultats ont partiellement été donné aussi par Colin de Verdière) Nadirashvili donne un résultat sur les surfaces compactes qui améliore légèrement celui de Besson :

THÉORÈME 0.

sur S^2	$m(\lambda_k)$	$\leqslant 2k+1$
sur $\mathbf{RP}^2$	$m(\lambda_k)$	$\leqslant 2k+3$
sur π^2 *tore*	$m(\lambda_k)$	$\leqslant 2k+4$
sur $\mathbf{K}^2$ *bouteille de Klein*	$m(\lambda_k)$	$\leqslant 2k+3$
sur M *de caractéristique d'Euler*	$\chi(M)$	< 0
	$m(\lambda_k)$	$\leqslant 2\big(k+2-\chi(M)\big)-1$.

La démonstration de ce théorème est présentée dans [An]. Nous nous intéressons ici aux résultats concernant les ouverts bornés de $\mathbf{R}^2$, en détaillant les points restés obscurs dans l'article.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ et $H = \Delta_g + V$ un opérateur de Schrödinger sur $\mathcal{U}$ alors son spectre $\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots$ avec condition de Dirichlet ou de Neumann vérifie*

$$m(\lambda_i) \leqslant 2i+1 .$$

Notons $\lambda^D_{i|i\geqslant 0}$ et $\lambda^N_{i|i\geqslant 0}$ le spectre pour Dirichlet et Neumann. On a les raffinements suivants pour des Laplaciens ($V = 0$).

THÉORÈME 2. — *Si $\mathcal{U}$ est difféomorphe à un disque et est muni d'une métrique à courbure $K \leqslant 0$ alors, pour Δ_g,*

$$m(\lambda^N, 1) \leqslant 2 .$$

THÉORÈME 3. — *Si $\mathcal{U}$ est difféomorphe à un disque et est muni d'une métrique à courbure négative, admet une symétrie d'ordre $n \geqslant 3$ alors, pour Δ_g,*

$$m(\lambda^N_1) = 2 .$$

THÉORÈME 4. — *S'il existe un ouvert $\mathcal{U}$, non simplement connexe, qui vérifie, pour Δ_g,*

$$m(\lambda^N_1) = 3 .$$

Remarque. — Colin de Verdière a montré par des méthodes de transversalité $m(\lambda_1) \leqslant 3$ et aussi le théorème 3.

DÉMONSTRATIONS

Elles utilisent un certain nombre de lemmes qui seront prouvés dans l'appendice. Donnons tout de suite les théorèmes importants utiles ici :

THÉORÈME D'ARONSZAJN. — *Une solution d'une équation elliptique du deuxième ordre, nulle en un point ainsi que toutes ses dérivées (à tous ordres) est nulle.*

Voir [A].

THÉORÈME DE COURANT. — *Soit H un opérateur de Schroödinger sur une variété M compacte ou ouverte avec conditions de Dirichlet ou Neumann et $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \cdots$ son spectre. Si F est une fonction propre de H pour la valeur propre λ_k, alors $M - \{F = 0\}$ a au plus $k+1$ composantes connexes.*

En conséquence une fonction propre relative à λ_0 ne peut changer de signe et λ_0 est forcément de multiplicité 1.

Voir [CH], p. 452 et [An] pour une démonstration complète.

THÉORÈME DE CHENG (variante). — *M est de dimension 2. Si F est fonction propre de l'opérateur de Schrödinger H et s'annule à l'ordre N en un point x_0 (c'est-à-dire dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $N-1$ sont nulles en ce point); choisissons une carte (x_1, x_2) centrée en x_0 et telle que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ soit orthonormée en ce point; $F(x) = p_N(x) + 0(|x|^{N+1})$, p_N est alors un polynôme homogène de degré N, harmonique (pour $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$). Si p_N est non nul alors F est R-équivalente à p_N : il existe un difféomorphisme local φ qui fixe 0 et est tangent en ce point à* Id *tel que $f = p_N \circ \varphi$.*

En conséquence la ligne nodale $\{F = 0\}$ est en ce point tangente à une étoile équiangulaire à $2N$ branches.

Ce théorème est en fait la compilation de plusieurs résultats essentiellement dus à Cheng, voir [C] et [An].

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES

Soit $\mathcal{U}$ un domaine simplement connexe muni d'une métrique à courbure $K \leqslant 0$. Alors :

$$\lambda_0^D \geqslant \frac{\pi j_0^2}{\operatorname{Vol}(\mathcal{U})} \tag{1}$$

si j_0 est le premier zéro de la fonction de Bessel J_0.

$$\lambda_1^N \leqslant \frac{\pi j_1'^2}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})} \tag{2}$$

si j_1' est le premier maximum de la fonction de Bessel J_1.

Commentaires. —

(1) est une inégalité du type Faber-Krahn qui compare λ_0^D à la première valeur propre de Dirichlet du disque euclidien de même volume, $\mathcal{U}$ n'a pas besoin d'être simplement connexe. Elle est due à Peetre.

(2) est un conséquence du mini-max. Elle compare λ_1^N à la deuxième valeur propre de Neumann du disque euclidien de même volume. Elle est due à Nadirashvili, et est démontrée dans l'appendice.

Remarquons enfin que pour des métriques euclidiennes ces inégalités sont bien connues. *(1)* a été démontré en toute dimension par Polya et Szegö et *(2)* par Weinberger (sans que $\mathcal{U}$ soit nécessairement simplement connexe).

La généralisation à $K \leqslant 0$ utilise le fait que si g est une métrique à courbure négative ou nulle sur la boule de rayon α et de même volume que celui de la boule euclidienne de rayon α alors :

$$\forall r,\ 0 \leqslant r \leqslant \alpha,\ \mathrm{Vol}_g(B(0,r)) \leqslant \mathrm{Vol}(B(0,r)) = \pi r^2.$$

Une conséquence de *(1)* et *(2)* est :

$$\lambda_0^D > \lambda_1^N .$$

On trouve en effet dans le bons livres (par exemple [PS], p. 3) les développements : $j_0 \simeq 2,4048\cdots$ et $j_1' \simeq 1,8412\cdots$. ∎

1. Démonstration du théorème 1.

Gardons les notations de l'énoncé; soit $x_0 \in \mathcal{U}$; si $m(\lambda_i) \geqslant 2i+2$ il existe une fonction propre non nulle $u \in E(\lambda_i)$ qui s'annule à l'ordre $N \geqslant i+1$ en x_0. En effet, Gérard Besson a montré que pour une fonction qui vérifie une équation du deuxième ordre elliptique $Hu = \lambda_i u$, il suffit de $2i+1$ conditions pour l'annuler à l'ordre $i+1$:

$$i = 0 \ : \ u(x_0) = 0$$

$$i = 1 \ : \ u(x_0) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_0) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_0) = 0$$

ensuite pour chaque ordre on ajoute deux conditions : $\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}u(x_0) = 0$ et $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2}u(x_0) = 0$, les autres conditions étant entraînées par l'équation $Hu = \lambda_i u$, voir [B].

Prenons alors un petit disque Q autour de x_0. La ligne nodale de u coupe ∂Q en $2N$ points $b_1 \cdots b_{2N}$, d'après le théorème de Cheng.

Prenons entre les b_j des points $a_1 \cdots a_{2N}$. Alors (th. de Cheng) $u(a_j)u(a_{j+1}) < 0$, $\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant 2N-1$.

Soit alors G_j la composante connexe de $\mathcal{U}_-\{u = 0\}$ qui contient a_j. On montre par récurrence sur N :

LEMME 1. — *Au moins $N+1$ des G_j sont distincts.*

Ceci contredit le théorème de Courant ($N + 1 \geqslant i + 2$).

2. Démonstration du théorème 2.

Notons $0 = \lambda_0^N < \lambda_1^N \leqslant \cdots$ le spectre du Laplacien de Neumann de $\mathcal{U}$. Pour montrer $m(\lambda_1^N) \leqslant 2$ il faut deux lemmes.

LEMME 2. — *Soit u une fonction propre de valeur propre λ_1^N alors $u_{|\partial\mathcal{U}}$ change de signe et la ligne nodale de u est une courbe lisse dont les extrémités sont sur $\partial\mathcal{U}$.*

LEMME 3. — *Si $m(\lambda_1^N) = 3$ il existe $u \in E(\lambda_1^N)$ non nulle qui s'annule 3 fois sur $\partial\mathcal{U}$.*

Donc $m(\lambda_1^N) \leqslant 2$ car d'après le Lemme 2 une fonction propre de λ_1^N ne peut s'annuler que deux fois sur le bord.

3. Démonstration du théorème 3.

Supposons de plus que $\mathcal{U}$ admet une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ comme isométrie ($n \geqslant 3$).

Si $m(\lambda_1^N) = 1$ et u est une fonction propre de λ_1^N alors $u \circ r$ doit être colinéaire à u et donc la ligne nodale doit être invariante par r ce qui d'après le Lemme 2 est impossible si $n > 2$.

4. Démonstration du théorème 4.

Considérons Q_α pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$:

$$Q_\alpha = \mathcal{U} - \left\{(r,\varphi)/r = \frac{1}{2}\ ,\ 0 \leqslant 3\varphi \leqslant 3\alpha \bmod 2\pi\right\}$$
$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbf{R}^2/|z| < 1\}$$

Q_α est invariant par la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Notons G le groupe $\{e, r, r^2\}$.

PROPOSITION. — *Le spectre du Laplacien de Neumann de Q_α, $0 = \lambda_0(\alpha) \leqslant \lambda_1(\alpha) \cdots$ est continu en α.*

En effet les valeurs propres sont décroissantes en α :

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow Q_{\alpha_1} \subset Q_{\alpha_2} \Longrightarrow H^1(Q_{\alpha_1}) \subset H^1(Q_{\alpha_2})$$
$$\Longrightarrow \lambda_k(\alpha_2) \leqslant \lambda_k(\alpha_1)\ ,$$

d'après le mini-max.

Par ailleurs, si $\alpha_{n|n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante qui converge vers α et φ_n des fonctions propres normées de Q_{α_n} de valeur propre $\lambda_k(\alpha_n)$, et $\lambda_k = \lim_{n\to\infty} \lambda_k(\alpha_n)$. On voit facilement que la suite φ_n étant bornée dans $H_1(Q_\alpha)$ on peut en extraire, en passant par la topologie faible une sous-suite qui converge vers une fonction φ qui se révèle être fonction propre de Q_α pour λ_k. On fait un raisonnement analogue pour la continuité à droite.

Supposons maintenant que $\forall\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ $\dim E(\lambda_1(\alpha)) \leqslant 2$.

(1) Si $\dim E(\lambda_1(\alpha)) = 2$ alors $\forall u \in E(\lambda_1(\alpha)) - \{0\}$ si $u(0) = 0$, et u et $u \circ r$ forment une base de $E(\lambda_1(\alpha))$.

En effet u et $u \circ r$ ne peuvent être colinéaire car la ligne nodale de u est simple en 0 et ne peut être invariante par r.

(1') $\dim E(\lambda_1(\alpha)) = 2 \Rightarrow \exists u \in E(\lambda_1(\alpha)) - \{0\}\,;\ u(0) = 0$. Donc $\forall v \in E(\lambda_1(\alpha))$, v est combinaison linéaire de u et $u \circ r$ et donc $v(0) = 0$.

(2) Soit maintenant $\mathcal{E} = \left\{\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}[\,;\ \dim E(\lambda_1(\alpha)) = 1\right\}$

$$\lim_{\alpha\to\frac{2\pi}{3}} \lambda_1(\alpha) = 0 \quad , \quad \lim_{\alpha\to\frac{2\pi}{3}} \lambda_2(\alpha) = \lambda_2\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) \neq 0 \ ,$$

donc $\mathcal{E}$ n'est pas vide. $0 \in \mathcal{E}^c$ donc $\mathcal{E}^c$ n'est pas vide.

$\mathcal{E}$ est ouvert d'après la continuité du spectre. $\mathcal{E}$ est aussi fermé : soit $\alpha_{n|n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}$ qui converge vers $\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

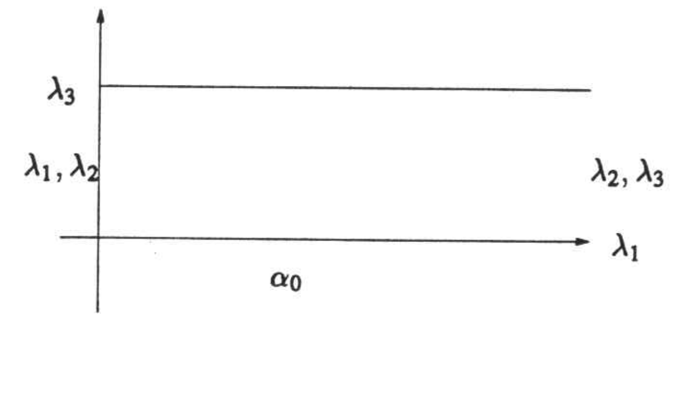
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \exists v_n \in E(\lambda_1(\alpha_n)),\quad \|v_n\| = 1 \ .$$

v_n et $v_n \circ r$ sont proportionnels donc $v_n(0) \not= 0$. Mais $r(0) = 0$ donc $v_n = v_n \circ r$.

Soit β une borne supérieure des α_n, v_n est une suite bornée de $H^1(Q_\beta)$ on peut donc en extraire une sous-suite α_{n_k} qui converge vers v qui est fonction propre de Q_α pour $\lambda_1(\alpha)$. Mais $\lim_{k\to\infty}(L_2(u))v_{n_k} = v$ donc $v = v \circ r$ et $v \not\equiv 0$ et donc d'après le point *(1)* ci-dessus

$$\dim\big(E(\lambda_1(\alpha)\big) = 1 \ .$$

Tout ceci est incompatible donc $\exists\alpha_0 \in]0, \frac{2\pi}{3}[$, $\dim E\big(\lambda_1(\alpha_0)\big) = 3$. La courbe des valeurs propres est la suivante :



Appendice

I. Lemme 1. — *$a_1 \cdots a_{2N}$ sont des points sur le bord d'un petit disque Q centré en x_0, $u(x_0) = 0$, u fonction propre de λ_i, pour l'opérateur de Schrödinger H sur l'ouvert u de $\mathbf{R}^2$ et $u(a_j)u(a_{j+1}) < 0$.*

G_j est la composante connexe de $\mathcal{U} \setminus \{u = 0\}$ qui contient a_j. Alors il y a au moins $N + 1$ G_j distincts.

Démonstration. — Par récurrence sur N.

$$\begin{aligned} \text{Si } N = 1 \text{ sur } G_1, &\quad u \text{ est du signe de } u(a_1) \\ \text{sur } G_2, &\quad u \text{ est du signe de } u(a_2) \\ \text{donc } G_1 \neq G_2. & \end{aligned}$$

Si la proposition est vraie jusqu'au rang N. Supposons que les a_i sont au nombre de $2(N+1)$, si les G_k sont tous distincts $N \geqslant 1 \Rightarrow 2N \geqslant N + 1$ c'est démontré.

Si $\exists j < k$, $G_j = G_k$ alors $u(a_k) \cdot u(a_j) > 0 \Rightarrow k - j \geqslant 2$. Soit alors $A = \{j, j+1, \ldots, k-1\}$, $B = \{k, \ldots, 2(N+1), 1, \ldots, j-1\}$.

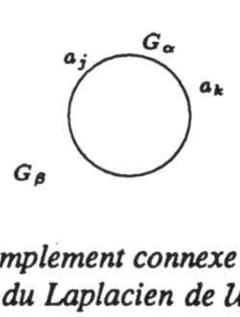
$$\#A = k - 1 \geqslant 2\,, \qquad \#A \leqslant 2N$$
$$\#B = 2N + 2 - k + j \leqslant 2N\,, \quad \#B \geqslant 2$$

D'après l'hypothèse de récurrence au moins $\frac{k-1}{2} + 1$ des $G_{\alpha|\alpha\in A}$ sont distincts et $N - \frac{(k-j)}{2} + 2$ des $G_{\beta|\beta\in B}$ sont distincts.

Enfin, si $\alpha \in A - \{j\}$, G_α est intérieur à une ligne tracée dans G_j allant de a_j à a_k. Si $\beta \in B - \{k\}$, G_k en est extérieur. $G_j = G_k$ est donc le seul domaine commun possible entre les G_α et les G_β ; et donc au moins

$$\left(\frac{k-j}{2} + 1\right) + \left(N - \frac{(k-j)}{2} + 2\right) - 1 = N + 2$$

des G_i sont distincts.



II. Lemme 2. — *$\mathcal{U}$ est simplement connexe et muni d'une métrique à courbure négative et u est fonction propre du Laplacien de $\mathcal{U}$ avec condition de Neumann pour $\lambda_1(N)$. Alors la ligne nodale de u est une courbe lisse dont les extrémités sont situées dans le bord $\partial\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$.*

Démonstration. —

a) Si la ligne nodale de u se refermait il existerait un domaine $G \subset \mathcal{U}$ tel que $\lambda_1^N = \lambda_0^D(G)$ première valeur propre du problème de Dirichlet de G. Mais $\lambda_0^D(G) \geqslant \lambda_0^D(\mathcal{U})$ d'après le minimax et donc $\lambda_1^N \geqslant \lambda_0^D$ mais ceci est faux d'après les inégalités isopérimétriques.

b) Si il existe $x_0 \in \mathcal{U}$, $u(x_0) = 0$ et $d_{x_0}u = 0$ alors la ligne nodale de u aurait au moins 4 branches en x_0, à cause de *a)* elles ne pourraient se recouper et $\mathcal{U} - \{u = 0\}$ aurait au moins 4 composantes connexes, ce qui contredit le théorème de Courant.

III. Lemme 3. — *$\mathcal{U}$ est simplement connexe*

$$m(\lambda_1(N)) = 3 \Rightarrow \exists u \in E(\lambda_1(N)) \ , \ u \not\equiv 0$$

et u s'annule trois fois sur $\partial\mathcal{U}$.

Démonstration. — Soit (u_1, u_2, u_3) une base de $E(\lambda_1(N))$ si il existe $\theta_1 \in \partial\mathcal{U}$ tel que $u_1(\theta_1) = u_2(\theta_1) = u_3(\theta_1) = 0$ soit alors θ_2 et θ_3 deux autres points de $\partial\mathcal{U}$ il existe u dans $E(\lambda_1(N))$ non nulle telle que $u(\theta_1) = 0$ et $u(\theta_2) = 0$ alors $\mathcal{U}$ s'annule 3 fois. Si un tel θ_1 n'existe pas, construisons

$$\begin{array}{rcl} F \ : \ \partial\mathcal{U} = S^1 & \longrightarrow & S^2 \\ \partial & \longmapsto & \big(u_1(\theta), u_2(\theta), u_3(\theta_3)\big) \Big/ \sqrt{u_1^2(\theta) + u_2^2(\theta) + u_3^2(\theta)} \end{array}$$

et $\Gamma = F(\partial\mathcal{U})$.

Définissons par ailleurs pour $\alpha \in S^2$, $\Gamma_\alpha = S^2 \cap \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\}$ c'est un grand cercle de S^2.

Par hypothèse, $\forall \alpha \in S^2$, $\#(\Gamma_\alpha \cap \Gamma) \geqslant 2$. En effet, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ s'annule au moins 2 fois.

Plaçons-nous sur un intervalle $]\theta_0, \theta_1[$ sur lequel F est un difféomorphisme local sur l'image et soit $z_0 \in]\theta_0, \theta_1[$ et Γ_{α_0} le grand cercle de S^2 tangent à Γ en $F(z_0)$.

Si $F(z_0)$ est un point triple, c'est-à-dire Γ traverse Γ_{α_0} alors en tournant légèrement Γ_{α_0} on a $\#(\Gamma \cap \Gamma_\alpha) \geqslant 3$. Si Γ ne traverse pas Γ_{α_0} en $F(z_0)$ alors F_{α_0} et Γ se coupe aussi en un autre point et en bougeant légèrement Γ_{α_0} on dédouble le point $F(z_0)$ donc $\#(\Gamma_\alpha \cap \Gamma) \geqslant 3$. ■

IV. Démonstration de l'inégalité isopérimétrique (2). — Il suffit de voir : soient $\mathcal{U}_\alpha = \{z \in \mathbf{R}^2 \ ; \ |z| < \alpha\}$ où α est le premier maximum de la fonction de Bessel J_1 et g une métrique à courbure $K \leqslant 0$ de même volume total : $\int_{\mathcal{U}_\alpha} dv_g = \pi\alpha^2$, $\lambda_1(N)$ la première valeur propre non nulle du problème de Neumann sur $\mathcal{U}_\alpha$ relatif à la métrique g; alors $\lambda_1(N) \leqslant 1$.

n.b. La première valeur propre non nulle du problème de Neumann de $\mathcal{U}_\alpha$ pour la métrique euclidienne est 1, de multiplicité 2; les fonctions propres sont

$$v_\tau(r, \theta) = \zeta_1(r) \sin(\theta + \tau) \ .$$

a) Soit $s^{z_0}(z) = \alpha^2 \frac{z-z_0}{\alpha^2 - \bar{z}_0 z}$ (transformation conforme de $\mathcal{U}_\alpha$), alors

$$\exists z_0 \in \mathcal{U}_\alpha \text{ tel que } \forall \tau \in]-\pi;\pi[\ ,\ \int_{\mathcal{U}_\alpha} v_\tau dv_{(s_*^{z_0} g)} = 0 .$$

Posons en effet $\psi_\tau(z_0) = \int_{\mathcal{U}_\alpha} v_\tau dv_{s_*^{z_0} g}$ et $\gamma_\tau = \{z_0 / \psi_\tau(z_0) = 0\}$,

$$\lim_{z_0 \to \alpha e^{i\theta}} \psi_\tau(z_0) = \pi\alpha^2 v_\tau(\alpha,\theta) \text{ (c'est le noyau de poisson!)}$$

v_τ change de signe deux foix au bord. Donc ν_0 contient une ligne qui relie $-\alpha$ à α et $\nu_{\pi/2}$ une ligne qui relie $-i\alpha$ à $i\alpha$. Donc $\nu_0 \cap \nu_{\pi/2} \neq \emptyset$, $z_0 \in \nu_0 \cap \nu_{\pi/2}$ convient.

b)

$$\int_{\mathcal{U}_\alpha} |dv_\tau|^2 dv_{s_*^{z_0} g} = \int_{\mathcal{U}_\alpha} |dv_\tau|^2 |dz|^2 = \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 |dz|^2 .$$

En effet, en dimension 2 $\int |df|^2 dv_g$ est un invariant conforme de la métrique. Mais $\mathcal{U}_\alpha$ est de plus simplement connexe, toute métrique admet donc des coordonnées isothermes globales. En d'autres termes toutes les métriques sont conformes.

c) Posons $g_0 = s_*^{z_0} g = \rho_0(dX^2 + dY^2)$.

$$K \leqslant 0 \Longrightarrow \exists \tau_0\ ;\ \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2 \leqslant \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_{\tau_0}|^2 dv_{g_0} .$$

En effet,

$$\begin{aligned} K = -\Delta(\ln\rho_0)/2\pi_0 \leqslant 0 \Rightarrow \Delta\rho_0 > 0 \\ &\Rightarrow p(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_0(re^{i\theta})d\theta \text{ est croissante en } r \\ &\Rightarrow P(r) = \int_0^r tp(t)dt \text{ vérifie } : P(r) \leqslant r^2 \text{ et } P(\alpha) = \alpha^2 . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 dv_{\rho_0} d\tau &= \pi^2 \int_0^\alpha J_1(r) dP_r \\ &\geqslant 2\pi^2 \int_0^\alpha J_1(r) r dr \\ &\geqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 |dz|^2 d\tau. \end{aligned}$$

d) **Conclusion**

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int |dv_{\tau_0}|^2 dv_{\rho_0}}{\int |v_{\tau_0}|^2 dv_{g_0}} \leqslant \frac{\int |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2}{\int |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2} = 1 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARONSZAJN N. — *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl., **36** (1957), 235–249.

[An] ANNÉ C. — *Bornes sur la multiplicité*, à paraître, 1990.

[B] BESSON G. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) , **30,1** (1980), 109–128.

[C] CHENG S.Y. — *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv., **51** (1976), 43–55.

[CH] COURANT R., HILBERT G. — *Methods of Mathematical Physics*, Tome 1, New-York Interscience, 1953.

[CdV] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Construction de Laplaciens dont une partie du spectre est donnée*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **XX** (1987), 599–615.

[N] NADIRASHVILI N.S. — *Multiple eigenvalues of the Laplace Operator*, Math. USSR Sbornik, **61,1** (1988), 225–238.

[P] PEETRE J. — *A generalization of Courant's nodal domain theorem*, Math. Scand., **5** (1957), 15–20.

[PS] POLYA G., SZEGÖ G. — *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Studies, n°27, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[W] WEINBERGER H.F. — *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal., **5** (1956), 613–623.

Colette ANNÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)