Une définition topologique du fibré de Maslov

Colette Anné
anne@math.univ-nantes.fr
UMR 6629 de Mathématiques, BP 92208
Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques
44322 Nantes-Cedex 03, France

31 mars 2003

Résumé

Nous donnons une définition du fibré de Maslov pour une sous-variété Lagrangienne du cotangent d'une variété lisse qui généralise celle qu'Arnol'd avait donnée en termes homotopiques pour les sous-variétés Lagrangiennes de $T^*\mathbb{R}^n$ et nous montrons qu'elle coïncide avec celle qu'utilise Hörmander dans ses travaux sur les Opérateurs Intégraux de Fourier.
MSClass : 81Q20, 35S30, 47G30.
Key words : fourier integral operators, Maslov bundle, Hörmander's index.

Table des matières

1 Introduction

L'indice de Maslov apparaît comme le terme de phase lorsque l'on veut définir le symbole d'un Opérateur Intégral de Fourier (OIF). Ce symbole se voit alors comme une section du fibré de Maslov construit sur une sous-variété Lagrangienne de T^*X. Dans son article historique [7] Hörmander propose une construction de ce fibré en termes de co-cycles et essaie de faire le lien avec une construction strictement topologique présentée par Arnol'd [3], à l'origine pour une appendice au livre de Maslov. Ce lien n'est établi que pour des sous-variétés Lagrangiennes de $T^*\mathbb{R}^n$. Je propose ici une construction pour les sous-variétés Lagrangiennes de T^*X, X variété lisse.

1.1 Définition d'Arnol'd de l'indice de Maslov

Rappelons d'abord la construction d'Arnol'd [3]. L'espace $T^*\mathbb{R}^n$ est muni de sa forme symplectique standard

$$\omega = \sum_{j=1}^{j=n} d\xi_j \wedge dx_j.$$

Notons $\mathbb{L}(n)$ la variété Grassmannienne des sous espaces Lagrangiens de $T^*\mathbb{R}^n$; on fait l'identification $\mathbb{L}(n) = U(n)/O(n)$. L'application Det^2 est bien définie sur $\mathbb{L}(n)$. Il est montré dans [3] que tout chemin $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{L}(n)$ tel que $Det^2 \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ engendre $\Pi_1(\mathbb{S}^1)$ donne un générateur de $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. En conséquence $\Pi_1(\mathbb{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$ et le cocycle μ_0 défini par

$$\forall \gamma \in \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \quad \mu_0(\gamma) = \text{Degré } (Det^2 \circ \gamma)$$

engendre le groupe $H^1(\mathbb{L}(n)) \simeq \mathbb{Z}$. On peut définir un *fibré de Maslov* $\mathbb{M}(n)$ sur $\mathbb{L}(n)$ par la représentation $\exp(i\frac{\pi}{2}\mu_0) = i^{\mu_0}$ de $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. Ce fibré est un fibré de torsion car $\mathbb{M}(n)^{\otimes 4}$ est trivial.

Maintenant le fibré de Maslov de la sous-variété Lagrangienne $\mathcal{L}$ de $T^*\mathbb{R}^n$ est le tiré en arrière de $\mathbb{M}(n)$ par l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : \mathcal{L} & \to & \mathbb{L}(n) \\ \nu & \mapsto & T_\nu\mathcal{L}. \end{array}$$

Arnol'd montre précisément que $\mu = {\varphi_n}^*\mu_0$ est l'indice de Maslov de $\mathcal{L}$. On peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \mu : \Pi_1(\mathcal{L}) & \to & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \mapsto & <\mu_0, \varphi_n \circ \gamma> = \text{Degré } (Det^2 \circ \varphi_n \circ \gamma). \end{array} \tag{1.1.1}$$

Il faut faire attention au groupe structural de ce fibré. Comme $U(1)-$fibré il est toujours trivial. Mais nous le concidérons comme $\mathbb{Z}_4 = \{1, i, -1, -i\}$-fibré. En fait nous voyons, en utilisant l'expression du cocycle de Maslov σ_{jk} donné par [7] (3.2.15) que le fibré de Maslov a des classes de Chern triviales mais σ_{jk} ne peut pas en général s'écrire comme le co-bord d'une co-chaîne *constante*.

Rappelons maintenant le théorème de réduction symplectique tel qu'il est énoncé dans [6] Proposition 3.2. p.132 .

Proposition 1.1.1 (Guillemin, Sternberg) . — *Soit Δ un sous-espace isotropique de dimension m dans $T^*\mathbb{R}^{(n+m)}$. Définissons $S_\Delta = \{\lambda \in \mathbb{L}(n+m) / \ \lambda \supset \Delta\}$. Alors S_Δ est une sous-variété de $\mathbb{L}(n+m)$ de codimension $(n+m)$, et en définissant l'application ρ par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{L}(n+m) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{L}(n) \\ \lambda & \mapsto & \lambda \cap \Delta^\omega / \lambda \cap \Delta \end{array}$$

(Δ^ω représente l'orthogonal de Δ pour la forme symplectique canonique ω) l'application ρ, qui n'est pas continue sur $\mathbb{L}(n+m)$ lui-même, est lisse en restriction à $\mathbb{L}(n+m) - S_\Delta$ and définit sur cet espace une struture fibrée sur $\mathbb{L}(n)$ de fibre $\mathbb{R}^{(n+m)}$.

De plus l'image du générateur de $\Pi_1(\mathbb{L}(n+m))$ est envoyé par ρ sur le générateur de $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$.

1.2 Définition du fibré de Maslov par Hörmander

Soit maintenant X une variété lisse, munissons $T^*X \xrightarrow{\pi_0} X$ de sa structure symplectique canonique $\omega = d\xi \wedge dx$. Soit $\mathcal{L}$ une sous-variété Lagrangienne de T^*X. Hörmander, dans [7] p.155, définit le fibré de Maslov de $\mathcal{L}$ par ses sections. Une variété Lagrangienne (homogène) admet un système de cartes (C_ϕ, D_ϕ), où les ϕ sont des fonctions de phases non dégénérées définies sur $U \times \mathbb{R}^N$ avec U un ouvert d'un domaine de carte de X difféomorphe à une boule et

$$\begin{array}{rcl} C_\phi = \Big\{(x,\theta);\ \phi'_\theta(x,\theta) = 0\Big\} & \xrightarrow{D_\phi} & \mathcal{L}_\phi \subset \mathcal{L} \\ (x,\theta) & \longmapsto & (x, \phi'_x(x,\theta)). \end{array}$$

La non-dégénérescence de ϕ signifiant justement que ϕ'_θ est une submersion et donc que C_ϕ est une sous-variété et que D_ϕ est une immersion.
Une section est alors la donnée d'une famille de fonctions

$$z_\phi : C_\phi \to \mathbb{C}$$

qui vérifient les formules de changement de carte

$$z_{\tilde\phi} = \exp i\frac{\pi}{4}\Big(\mathrm{sgn}\phi''_{\theta\theta} - \mathrm{sgn}\tilde\phi''_{\tilde\theta\tilde\theta}\Big) z_\phi. \tag{1.2.2}$$

Il se trouve que $(\mathrm{sgn}\phi''_{\theta\theta} - \mathrm{sgn}\tilde\phi''_{\tilde\theta\tilde\theta})$ est pair (voir ci-dessous la proposition 3.3.1) et on construit donc bien ainsi un $\mathbb{Z}_4-$fibré.

1.3 Définition de l'indice de Maslov et résultats

On peut construire au-dessus de la sous-variété Lagrangienne $\mathcal{L}$ de T^*X (et en fait au-dessus de T^*X) le fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(n) & \xrightarrow{i} & \mathbb{L}(\mathcal{L}) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ & & \mathcal{L} \end{array}$$

des sous-espaces Lagrangiens de $T_\nu(T^*X), \nu \in \mathcal{L}$. Ce fibré a deux sections évidentes :

$$\lambda(\nu) = T_\nu(\mathcal{L}),\ \lambda_0(\nu) = \mathrm{vert}(T_\nu(T^*X))$$

le tangent à $\mathcal{L}$ et le tangent à la verticale $T^*_{\pi_0(\nu)}X$. Mais un fibré donne une suite exacte de groupes d'homotopie, ici :

$$...\Pi_2(\mathcal{L}) \to \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_1(\mathcal{L}) \to \Pi_0(\mathbb{L}(n)) = 0.$$

Notre fibré ayant une section (et même deux) les flèches $\Pi_k(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_k(\mathcal{L})$ sont surjectives et donc les flèches $\Pi_{k+1}(\mathcal{L}) \to \Pi_k(\mathbb{L}(n))$ sont nulles ; la suite exacte se scinde et on a en particulier la suite exacte courte

$$0 \to \Pi_1(\mathbb{L}(n)) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(\mathbb{L}(\mathcal{L})) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_1(\mathcal{L}) \to 0.$$

Prenons un point base $\nu_0 \in \mathcal{L}$ et fixons un chemin σ qui relie $\lambda(\nu_0)$ à $\lambda_0(\nu_0)$ en restant dans la fibre $\mathbb{L}(\mathcal{L})_{\nu_0}$. Pour $\gamma \in \Pi_1(\mathcal{L})$ on note ${\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma)$ le produit amalgamé de σ, $\lambda_{0*}\gamma$ puis σ^{-1}. (On prend ici les conventions d'écriture de [11])

Alors $\forall \gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}),\ \pi_*\Big(\lambda_*\gamma * ({\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1}))\Big) = 0$ et donc $\lambda_*\gamma * ({\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1}))$ vit dans $\Pi_1(\mathbb{L}(n))$. Prenons donc la

Définition 1.3.1 . — *L'indice de Maslov de $\mathcal{L}$ est l'application μ :*

$$\forall \gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}),\ \mu(\gamma) = \mu_0\Big(\lambda_*\gamma * {\lambda_0}^\sigma{}_*(\gamma^{-1})\Big).$$

Proposition 1.3.1 . — *Cette définition ne dépend pas du chemin σ choisi pour relier $\lambda(\nu_0)$ à $\lambda_0(\nu_0)$; de plus μ est un morphisme de groupe et donc $\mu \in H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z})$.*

Remarquons tout de suite que si $X = \mathbb{R}^n$ le fibré $\mathbb{L}(\mathcal{L})$ se trivialise de sorte que la section λ_0 est constante et cette définition coïncide avec celle de [3]. Cette proposition nous permet de prendre la définition suivante :

Définition 1.3.2 . — *Le fibré de Maslov $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est défini, comme précédemment, par la représentation $\exp(i\frac{\pi}{2}\mu) = i^\mu$ de $\Pi_1(\mathcal{L})$ dans $\mathbb{C}$.*

C'est à dire que les sections de ce fibré s'identifient à des fonctions f à valeurs complexes sur le revêtement universel de $\mathcal{L}$ satisfaisant la relation d'équivariance :

$$\forall \gamma \in \Pi_1(\mathcal{L}), \quad f(x.\gamma) = i^{-\mu(\gamma)} f(x), \tag{1.3.3}$$

comme dans [2] formule (2.19).

Théorème 1.1 . — *Soit $\mathbb{L}^1(\mathcal{L})$ l'ensembles des points $l \in \mathcal{L}$ qui ne sont pas transverses à $\lambda_0(\pi(l))$. C'est une sous-variété de $\mathcal{L}$ de codimension 1, si m est sa duale de Poincaré alors*

$$\mu = \lambda^* m.$$

Corollaire 1.3.1 . — *Lorsque ceci a un sens, i.e. génériquement sur $\mathcal{L}$, μ est la duale de Poincaré de la sous-variété de $\mathcal{L}$ des points où les lagrangiens λ et λ_0 ne sont pas transverses.*

Théorème 1.2 . — *Les sections du fibré de Maslov d'une Lagrangienne (homogène) défini par la définition 1.3.2 vérifient les propriétés de recollement de Hörmander, c'est à dire notre définition coïncide avec celle de Hörmander.*

2 Étude de μ.

2.1 L'indice μ_0 sur $\mathbb{L}(n)$ est aussi un nombre d'intersection.

Pour $\alpha \in \mathbb{L}(n)$ et $k \in \mathbb{N}$ on définit

$$\mathbb{L}^k(n)(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{L}(n);\ \dim \alpha \cap \beta = k\}.$$

Nous savons depuis [3] que $\mathbb{L}^k(n)(\alpha)$ est une variété ouverte de codimension $\frac{k(k+1)}{2}$ en particulier $\overline{\mathbb{L}^1(n)(\alpha)}$ est un cycle orienté de codimension 1 et son nombre d'intersection coïncide avec μ_0.

2.2 Démonstration de la proposition 1.3.1.

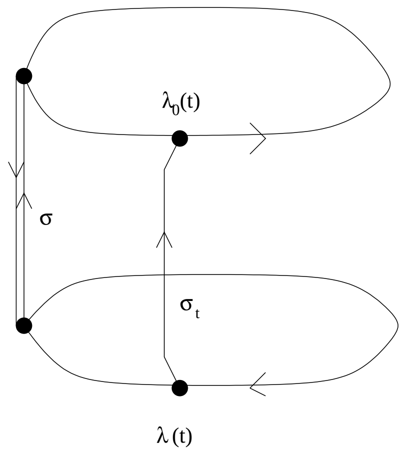
Elle découlera des deux lemmes qui suivent. Munissons $\mathbb{L}(\mathcal{L})$ d'une connexion de $U(n)$-fibré. Rappelons en effet que toute variété symplectique (M, ω), telle T^*X, peut être munie d'une structure presque complexe J compatible avec la structure symplectique (voir [1] p.102), c'est à dire telle que $g(X,Y) = \omega(JX, Y)$ soit une métrique riemannienne. Ainsi le tangent de M est muni d'une forme hermitienne $g_{\mathbb{C}} = g + i\omega$, son groupe structural se reduit donc à $U(n)$ et de même pour la grassmanienne des lagrangiens ou sa restriction à une sous-variété.

Nous notons $\tau(\gamma)_{x\to y}$ le transport parallèle de $\mathbb{L}(\mathcal{L})_x$ à $\mathbb{L}(\mathcal{L})_y$ qu'elle définit pour un chemin γ qui rejoint x à y dans $\mathcal{L}$.

Soit maintenant $\gamma :\ \mathbb{S}^1 \to \mathcal{L}$ un chemin fermé tel que $\gamma(0) = \nu_0$, posons $\lambda(t) = \lambda_*(\gamma)(t)$ et de même ${\lambda_0}^{-1}(t) = \lambda_{0*}(\gamma^{-1})(t)$.

Soit σ un chemin comme précédemment qui relie $\lambda(0)$ à $\lambda_0(0)$ dans la fibre $\mathbb{L}(\mathcal{L})_{\gamma(0)}$; alors le chemin de $\mathbb{L}(\mathcal{L})$: $\lambda * \sigma * {\lambda_0}^{-1} * \sigma^{-1}$ s'homotope à un chemin de la fibre dont il s'agit de calcul l'indice de Maslov μ_0. Nous utilisons le transport parallèle le long de γ pour déformer $\lambda * \sigma * {\lambda_0}^{-1}$.

Définition 2.2.1 . — *Pour $t \in [0,1]$ notons σ_t le chemin inclus dans la fibre $\mathbb{L}(\mathcal{L})_{\gamma(t)}$ allant de $\lambda(t)$ à $\lambda_0(t)$ obtenu par transport parallèle de $\lambda_{|[t,1]} * \sigma * (\lambda_{0|[t,1]})^{-1}$.*



Ce chemin a trois parties distinctes : d'abord $\tilde{\lambda}(t,s) = \tau(\gamma^{-1})_{\gamma(s)\to\gamma(t)}\lambda(s)$ puis $\tilde{\sigma}(t,s) = \tau(\gamma^{-1})_{\gamma(1)\to\gamma(t)}\sigma(s)$ et enfin $\tilde{\lambda}_0^{-1}(t,s) = \tau(\gamma^{-1})_{\gamma(s)\to\gamma(t)}({\lambda_0}^{-1}(t))$.

Alors la définition (1.3.2) dit que

$$\mu(\gamma) = \mu_0(\sigma_0 * \sigma^{-1}).$$

Lemme 2.2.1 . — *Cette définition ne dépend pas du chemin σ choisi pour relier $\lambda(0)$ à $\lambda_0(0)$ en restant dans la fibre au-dessus de $\gamma(0)$.*

Remarquons d'abord que μ_0 est défini sur le groupe d'homotopie libre on a donc

$$\mu_0(\sigma_0 * \sigma^{-1}) = \mu_0(\sigma^{-1} * \tilde{\lambda} * \tilde{\sigma} * \tilde{\lambda}_0^{-1})$$

en notant ici $\tilde{\lambda}(s) = \tilde{\lambda}(0,s)$ et de même pour λ_0 et pour σ.

Soit maintenant σ' un autre chemin de $\lambda(0)$ à $\lambda_0(0)$, alors en utilisant la remarque precédente et le fait que μ_0 est un homomorphisme de groupe on a :

$$\begin{aligned}
\mu_0(\sigma'_0 * {\sigma'}^{-1}) - \mu_0(\sigma_0 * \sigma^{-1}) &= \mu_0({\sigma'}^{-1} * \tilde{\lambda} * \tilde{\sigma'} * \tilde{\sigma}^{-1} * \tilde{\lambda}^{-1} * \sigma) \\
&= \mu_0(\sigma * {\sigma'}^{-1} * \tilde{\lambda} * \tilde{\sigma'} * \tilde{\sigma}^{-1} * \tilde{\lambda}^{-1}) \\
&= \mu_0\Big((\sigma * {\sigma'}^{-1}) * \tilde{\lambda} * (\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1})^{-1} * \tilde{\lambda}^{-1}\Big) \\
&= \mu_0(\sigma * {\sigma'}^{-1}) + \mu_0(\tilde{\lambda} * (\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1})^{-1} * \tilde{\lambda}^{-1}) \\
&= \mu_0(\sigma * {\sigma'}^{-1}) + \mu_0(\tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\lambda} * (\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1})^{-1}) \\
&= \mu_0(\sigma * {\sigma'}^{-1}) + \mu_0((\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1})^{-1}) \\
&= \mu_0(\sigma * {\sigma'}^{-1}) - \mu_0(\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1}) = 0
\end{aligned}$$

car $\tilde{\sigma} * \tilde{\sigma'}^{-1}$ est l'image de $\sigma * {\sigma'}^{-1}$ par le transport parallèle $\tau(\gamma)$ le long de γ ; mais $\tau(\gamma) \in U(n)$ et donc conserve l'indice de Maslov μ_0. ■

Cette dernière propriété permet aussi de montrer

Lemme 2.2.2 . — *μ est un morphisme de groupe.*

En effet si α et β sont deux éléments de $\Pi_1(\mathcal{L})$ il suffit de calculer $\mu(\alpha) + \mu(\beta)$ en faisant commencer le premier cercle à $\tilde{\sigma}^{-1}(1) = \tau(\alpha)\sigma(0)$ et d'appliquer $\tau(\alpha)$ au deuxième cercle que l'on aura fait commencer à $\sigma(0)$.

2.3 Démonstration du théorème 1.1.

Gardons les notations précédentes. Quitte à modifier le point de départ on peut supposer que *les deux lagrangiens $\lambda_0 = \lambda_0(0)$ et $\lambda(0)$ sont transverses.* Nous allons de nouveau déformer le chemin $\tilde{\lambda} * \tilde{\sigma} * \tilde{\lambda}_0^{-1}$ qui relie $\lambda(0)$ à $\lambda_0(0)$. Rappelons que $\tilde{\sigma}(t) = \tau(\gamma)(\sigma(t))$.

Il existe un chemin continu $u(t) \in U(n)$ tel que $u(0)$ =I et

$$\forall t \in [0,1]\ \tilde{\lambda}_0(t) = u(t)(\lambda_0).$$

Mais $\tilde{\lambda}_0(1) = \tau(\gamma)(\lambda_0)$, donc $\tau(\gamma)$ et $u(1)$ diffèrent par un élément de $O(n)$:

$$\exists a \in O(n);\ \tau(\gamma) = u(1) \circ a.$$

Construisons l'homotopie suivante de $\tilde{\lambda} * \tilde{\sigma} * \tilde{\lambda}_0^{-1}$ par concaténation de $u(st)^{-1}\tilde{\lambda}(t)$, de $u(s)^{-1}\tilde{\sigma}$ et du chemin inverse de $u(st)^{-1}\tilde{\lambda}_0(t)$. Elle aboutit au chemin obtenu par concaténation de $\bar{\lambda}(t) = u(t)^{-1}\tilde{\lambda}(t)$ et de $u(1)^{-1}\tilde{\sigma} = a\sigma$.

Il reste à calculer $\mu_0(\sigma^{-1} * \bar{\lambda} * a\sigma)$. Comme $a \in O(n)$

$$Det^2(\sigma(t)) = Det^2(a\sigma(t))$$

$Det^2 \circ \bar{\lambda}$ est un chemin fermé et

$$\mu(\gamma) = \text{Degré } (Det^2 \circ \bar{\lambda}).$$

C'est à dire, compte tenu de ce qui a été rappelé à la section 2.1,

Proposition 2.3.1 *$\mu(\gamma)$ est le nombre d'intersection de $\bar{\lambda}$, refermé par n'importe quel chemin qui reste transverse à λ_0, avec la sous-variété $\overline{\mathbb{L}^1(n)(\lambda_0)}$.*

Remarquons que $\bar{\lambda}(0) = \lambda(0)$ et $\bar{\lambda}(1) = a\lambda(0)$ sont tous deux transverses à λ_0.

Soit maintenant

$$\mathbb{L}^1(\mathcal{L}) = \Big\{ l \in \mathbb{L}(\mathcal{L})\ ;\ \lambda_0(\pi(l)) \cap l \neq \{0\} \Big\}.$$

C'est une variété fibrée au-dessus de $\mathcal{L}$ de fibre $\overline{\mathbb{L}^1(n)(\lambda_0)}$, c'est donc une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{L}$. Si $\lambda \circ \gamma$ coupe $\mathbb{L}^1(\mathcal{L})$ transversalement en $\lambda \circ \gamma(t)$ alors $\bar{\lambda}$ coupe transversalement $\overline{\mathbb{L}^1(n)(\lambda_0)}$ en $\bar{\lambda}(t)$ et réciproquement. De plus les transformations qui font passer de $\lambda \circ \gamma$ à $\bar{\lambda}$ réalisent une déformation continue de $\mathbb{L}^1(\mathcal{L})$ à $\overline{\mathbb{L}^1(n)(\lambda_0)}$ au dessus de γ. Ceci termine la démonstration du théorème 1.1.

3 Lien avec la définition de Hörmander

Pour voir la relation avec les termes de signatures de la formule de [7] nous allons faire, en suivant [4], les calculs suivants.

3.1 L'indice de Maslov en termes de signatures.

Soit $\gamma \in \mathbb{L}^k(n)(\alpha)$ et $\beta \in \mathbb{L}^0(n)(\alpha) \cap \mathbb{L}^0(n)(\gamma)$. Alors α et β sont transverses et γ s'exprime comme graphe : il existe une unique application linéaire $C : \alpha \to \beta$ telle que $\gamma = \{(x, Cx), x \in \alpha\}$. Définissons alors, comme [4] p. 181, la forme quadratique sur α :

$$Q(\alpha, \beta; \gamma) = \omega(C., .) \in \mathcal{Q}(\alpha).$$

On voit facilement que

$$\ker Q(\alpha, \beta; \gamma) = \ker C = \alpha \cap \gamma.$$

Choisissons une base de α pour que $Q(\alpha,\beta;\gamma)$ s'écrive $\begin{vmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. On remarque que la partie nulle correspond à $\alpha\cap\gamma$.

Prenons maintenant un chemin $\gamma(t)$ dans $\mathbb{L}^0(n)(\beta)$ tel que $\gamma(0)=\gamma$. Le but de ce qui suit est de mesurer le saut de la signature de $Q(\alpha,\beta;\gamma(t))$ au voisinage de $t=0$.

Proposition 3.1.1 . — *Soit $\gamma(t)$ un chemin dans $\mathbb{L}^0(n)(\beta)$ tel que $\gamma(0)=\gamma$. Ecrivons*

$$Q(\alpha,\beta;\gamma(t)) = \begin{vmatrix} B(t) & C(t) \\ C^t(t) & D(t) \end{vmatrix}$$

$D(t)$ étant sur $\alpha\cap\gamma$. Alors, si $D'(t)$ est inversible au voisinage de 0, il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall t,\ 0<t<\varepsilon\ \ \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\alpha,\beta;\gamma(\mathrm{t})) - \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\alpha,\beta;\gamma(-\mathrm{t})) = 2\mathrm{sgn}\, \mathrm{D}'(0).$$

Démonstration. — Nous savons que $B(t)$ est inversible et $C(t)$, $D(t)$ sont petits. Une diagonalisation par bloc montre clairement l'identité

$$\begin{vmatrix} B & C \\ C^t & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ C^tB^{-1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & (D-C^tB^{-1}C) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & B^{-1}C \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.1.4}$$

et donc sgn $Q(\alpha,\beta;\gamma(t))$ =sgn$(B(t))$+sgn$(D(t)-C(t)^tB(t)^{-1}C(t))$.

Le théorème des accroissements finis donne, puisque $D'(t)$ est supposé inversible au voisinage de 0, que pour t suffisamment petit

$$\mathrm{sgn}\Big(D(t)-C(t)^tB(t)^{-1}C(t)\Big) = \mathrm{sgn}(t)\ \mathrm{sgn}(D'(0)),$$

par ailleurs, pour t proche de 0, sgn $B(t)$ = sgn $Q(\alpha,\beta;\gamma)$. ∎

Maintenant si γ est un chemin qui coupe *transversalement* $\mathbb{L}^1(n)(\alpha)$ en $\gamma(0)$ alors l'hypothèse sur D' est vérifiée et on a le

Théorème 3.1.1 . — *Soit $\alpha\in\mathbb{L}(n)$ et γ un chemin fermé de $\mathbb{L}(n)$ qui coupe $\mathbb{L}^1(n)(\alpha)$ transversalement, alors pour tout $\beta\in\mathbb{L}(n)$ transverse à α et aux $\gamma(t)$ on a*

$$\mu_0(\gamma) = \frac{1}{2}\sum_{t,\gamma(t)\in\mathbb{L}^1(n)(\alpha)} \Big(\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\alpha,\beta;\gamma(\mathrm{t}^+)) - \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\alpha,\beta;\gamma(\mathrm{t}^-))\Big).$$

En effet dans ce cas $T_\gamma\mathbb{L}(n)/T_\gamma\mathbb{L}^1(n)(\alpha)\sim S^2(\alpha\cap\gamma)$ que l'on oriente par les formes quadratiques définies positives et $\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}'(0)=\pm1$, on utilise alors la formule précédente.

Remarque 3.1.1 . — *Cette formule permet de définir des indices de chemin (pas forcément fermés) voir à ce sujet [12].*

3.2 L'indice de Hörmander.

Soient α, β, β' trois éléments de $\mathbb{L}(n)$ tels que β, $\beta' \in \mathbb{L}^0(n)(\alpha)$. Pour un chemin σ qui relie β à β' on définit

$$[\sigma,\alpha] = \mu_0(\hat{\sigma})$$

où $\hat{\sigma}$ est un chemin fermé obtenu à partir de σ en le refermant dans $\mathbb{L}^0(n)(\alpha)$:

$$\hat{\sigma} = \sigma * \sigma_\alpha \text{ et } \sigma_\alpha \subset \mathbb{L}^0(n)(\alpha).$$

Le théorème (3.1.1) montre que $[\sigma,\alpha]$ ne dépend pas de la façon dont on a refermé σ dans $\mathbb{L}^0(n)(\alpha)$. Prenons maintenant α' dans $\mathbb{L}^0(n)(\beta) \cap \mathbb{L}^0(n)(\beta')$. L'indice de Hörmander est le nombre

$$s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = [\sigma,\alpha'] - [\sigma,\alpha] = \mu_0(\sigma * \sigma_{\alpha'} * (\sigma * \sigma_\alpha)^{-1}) = \mu_0(\sigma_{\alpha'} * {\sigma_\alpha}^{-1})$$

car le calcule de μ_0 ne dépend pas du point de départ sur $\mathbb{S}^1$.

On voit donc que cet indice ne dépend que des quatre points dans $\mathbb{L}(n)$ et pas des chemins.

Proposition 3.2.1 . — *Si* $\beta,\ \beta' \in \mathbb{L}^0(n)(\alpha) \cap \mathbb{L}^0(n)(\alpha')$ *alors*

$$s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sgn} \mathrm{Q}(\alpha,\beta';\alpha') - \operatorname{sgn} \mathrm{Q}(\alpha,\beta;\alpha')\Big).$$

En effet supposons d'abord que α et α' sont transverses ; le théorème (3.1.1) s'applique et on peut utiliser la proposition (3.1.1) ; cela donne

$$s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sgn} \mathrm{Q}(\alpha,\alpha';\beta) - \operatorname{sgn} \mathrm{Q}(\alpha,\alpha';\beta')\Big).$$

Mais par ailleurs $\beta \in \mathbb{L}^0(n)(\alpha)$ s'écrit comme le graphe de $C \in \mathrm{End}(\alpha,\alpha')$ et donc $Q(\alpha,\alpha';\beta) = \omega(C.,.)$. Mais alors α' est le graphe de $D \in \mathrm{End}(\alpha,\beta)$ avec

$$\forall x \in \alpha, \quad D(x) = -(x + C(x))$$

donc $Q(\alpha,\beta;\alpha') = \omega(D.,.) = -\omega(C.,.) = -Q(\alpha,\alpha';\beta)$. Ainsi

$$s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = \frac{1}{2}\Big(\ \operatorname{sgn}\ Q(\alpha,\beta';\alpha') - \ \operatorname{sgn}\ Q(\alpha,\beta;\alpha')\Big).$$

Cette formule se généralise grâce à la réduction symplectique (1.1.1). ∎

Signalons pour terminer ce paragraphe la

Proposition 3.2.2 . — *Soient* $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ *quatre points de* $\mathbb{L}(n)$ *tels que* β *et* β' *soient dans* $\mathbb{L}^0(n)(\alpha) \cap \mathbb{L}^0(n)(\alpha')$ *alors*

$$s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = -s(\alpha',\alpha;\beta,\beta') = -s(\alpha,\alpha';\beta',\beta) = -s(\beta,\beta';\alpha,\alpha').$$

Seule la troisième égalité n'est pas triviale, avec la définition de s. Nous allons utiliser la formule de la proposition (3.2.1) pour montrer la dernière égalité. Choisissons des coordonnées symplectiques (x,ξ) telles que

$$\alpha = \{x = 0\} \quad \beta = \{\xi = 0\}.$$

Vues les hypothèses de transversalité il existe des homomorphismes A et B tels que

$$\alpha' = \{x = A\xi\} \quad \beta' = \{\xi = Bx\}.$$

Et alors si on veut écrire α' comme graphe de $A' \in$Hom(α,β'), pour tout $\xi \in \alpha$ il faut trouver $\xi' \in \alpha$ et $x \in \beta$ tels que

$$A'\xi = (x, Bx) \text{ et } (A\xi', \xi') = (x, Bx + \xi).$$

Cela donne $x = A\xi'$ et $\xi' = Bx + \xi = BA\xi' + \xi$ donc $\xi' = (1 - BA)^{-1}\xi$ et

$$A'\xi = (A(1 - BA)^{-1}\xi, (1 - BA)^{-1}\xi - \xi).$$

On remarque que $(1 - BA)$ est bien inversible : si $\xi \in \ker(1 - BA)$ alors $(A\xi, \xi) = (A\xi, BA\xi) \in \alpha' \cap \beta' = \{0\}$ donc $\xi = 0$.

Donc, d'après la proposition (3.2.1)

$$2s(\alpha,\alpha';\beta,\beta') = \operatorname{sgn} \omega(A(1-BA)^{-1}.,.) - \operatorname{sgn} \omega(A.,.) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -A(1-BA)^{-1} \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant A inversible alors, une matrice symétrique ayant même signature que son inverse :

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -A(1-BA)^{-1} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -(1-BA)A^{-1} \end{vmatrix} =$$
$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B - A^{-1} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} A & 1 \\ 1 & B \end{vmatrix}$$

par la formule (3.1.4). Par le même type de calcul, on a, puisque ω est antisymétrique :

$$2s(\beta,\beta';\alpha,\alpha') = \operatorname{sgn} Q(\beta,\alpha';\beta') - \operatorname{sgn} Q(\beta,\alpha;\beta')) = -\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} B & 1 \\ 1 & A \end{vmatrix}.$$

■

3.3 Démonstration du théorème 1.2

Notons maintenant, en suivant [7], $\mathcal{T}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{L}(\mathcal{L})$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ qui sont transverses à $\lambda(\pi(\alpha))$ et à $\lambda_0(\pi(\alpha))$. Si $p : \mathcal{T}(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$ est la projection associée, en chaque point $\nu \in \mathcal{L}$

$$p^{-1}(\nu) = \mathbb{L}^0(n)(\lambda(\nu)) \cap \mathbb{L}^0(n)(\lambda_0(\nu)).$$

n.b. Cette application n'est pas une fibration au voisinage des points ou les deux lagrangiens se coupent.

Lemme 3.3.1 . — *Soit* $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{T}(\mathcal{L})$ *qui vérifie* $p \circ \alpha = \gamma$ *et* σ *un chemin comme précédemment. L'indice* $[\sigma_t, \alpha(t)]$ *est constant en* t.

En effet cet indice est continu : soit $t_0 \in [0,1]$ et β un chemin dans la fibre au dessus de $\gamma(t_0)$ qui relie $\lambda_0(t_0)$ à $\lambda(t_0)$ en restant transverse à $\alpha(t_0)$; par définition $[\sigma_{t_0}, \alpha(t_0)] = \mu_0(\sigma_{t_0} * \beta)$ mais la propriété de transversalité est ouverte. Notons β_t le chemin dans la fibre au-dessus de $\gamma(t)$ obtenu par transport parallèle de $\lambda_{0|[t,t_0]} * \beta * \lambda^{-1}{}_{|[t,t_0]}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|t - t_0| < \varepsilon$ alors β_t reste transverse à $\alpha(t)$. Le transport parallèle ainsi décrit réalise une homotopie et donc pour $|t - t_0| < \varepsilon$ on a $\mu_0(\sigma_{t_0} * \beta) = \mu_0(\sigma_t * \tilde{\beta}_t)$. ■

Corollaire 3.3.1 . — *Le fibré induit* $p^*\mathbb{M}(\mathcal{L})$ *est trivial.*

Démonstration. — Il suffit de voir que pour tout chemin $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{T}(\mathcal{L})$ continu si on pose $\gamma = p \circ \alpha$, alors $\mu(\gamma) = 0$. Pour cela prenons σ comme précedemment un chemin dans la fibre de $\gamma(0)$ qui relie $\lambda(0)$ à $\lambda_0(0)$. On choisit σ transverse à $\alpha(1)$ et on fait les mêmes constructions que ci-dessus. Alors

$$[\sigma, \alpha(1)] = [\sigma_0, \alpha(0)] = 0$$

d'après la définition de $[\sigma, \alpha(1)]$ et le lemme (3.3.1).

Mais $\alpha(0) = \alpha(1)$ donc

$$\mu(\gamma) = \mu_0(\sigma_0 * \sigma^{-1}) = [\sigma_0, \alpha(1)] = 0.$$

■

Corollaire 3.3.2 . — *Soit* s *est une section du fibré de Maslov de* $\mathcal{L}$, $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{L}$ *un chemin fermé tel que* $\gamma(0) = \nu_0 = \pi(\lambda_0$. *Soit* $\alpha : [0,1] \to \mathcal{T}(\mathcal{L})$ *un chemin continu vérifiant* $\gamma = p \circ \alpha$. *Alors*

$$p^*s(\alpha(1)) = i^{s(\lambda_0(0), \lambda(0); \alpha(1), \alpha(0))} p^*s(\alpha(0)).$$

Démonstration. — Soit σ un chemin qui relie $\lambda(0)$ à λ_0 en restant transverse à $\alpha(1)$. Donc, par le lemme (3.3.1), $[\sigma_0, \alpha(0)] = [\sigma, \alpha(1)] = 0$ et

$$\mu(\gamma) = \mu_0(\sigma_0 * \sigma^{-1}) = [\sigma_0, \alpha(1)] = [\sigma_0, \alpha(1)] - [\sigma_0, \alpha(0)] = s(\alpha(0), \alpha(1); \lambda(0), \lambda_0(0))$$

et $s(\alpha(0), \alpha(1); \lambda, \lambda_0) = -s(\lambda_0, \lambda; \alpha(1), \alpha(0))$ d'après la proposition (3.2.2). Donc

$$-\mu(\gamma) = s(\lambda_0(0), \lambda(0); \alpha(1), \alpha(0)).$$

Ce qui donne le résultat, d'après la relation d'équivariance (1.3.3). ■

De ces deux corollaires on tire

Corollaire 3.3.3 . — *Les sections de* $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ *s'identifient à des fonctions* f *sur* $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ *qui vérifient la relation :* $\forall \alpha, \tilde{\alpha} \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$

$$p(\alpha) = p(\tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = i^{s(\lambda_0, \lambda; \tilde{\alpha}, \alpha)} f(\alpha).$$

Ceci donne la condition de recollement de Hörmander d'après le théorème 3.3.3 de [7] et termine la démonstration du théorème ; rappelons ce dernier résultat.

Proposition 3.3.1 . — *Les fonctions f sur $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ qui satisfont : $\forall \alpha, \tilde{\alpha} \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$*

$$p(\alpha) = p(\tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = i^{s(\lambda_0, \lambda; \tilde{\alpha}, \alpha)} f(\alpha).$$

sont les sections définies par les conditions de recollement de (1.2).

Démonstration. — Soit ϕ une fonction de phase non dégénérée, comme dans (1.2) et $\nu_0 = (x_0, \xi_0) = (x_0, \phi'_x(x_0, \theta_0))$ un point de $\mathcal{L}_\phi$. Pour chaque $\alpha \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ tel que $p(\alpha) = \nu_0$, il existe une fonction ψ définie sur l'ouvert U telle que, en notant

$$L_\psi = \{(x, d\psi(x)),\ x \in U\}$$

le graphe de la différentielle $d\psi$, on ait $\xi_0 = d\psi(x_0)$ et

$$T_{\nu_0} L_\psi = \alpha$$

et donc L_ψ coupe la lagrangienne $\mathcal{L}_\phi$ transversalement en ce point.

Une condition équivalente à ces deux conditions est de dire que la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^{n+N}$ par la matrice

$$Q_\psi = \begin{vmatrix} \phi''_{xx} - \psi''_{xx} & \phi''_{x\theta} \\ \phi''_{\theta x} & \phi''_{\theta\theta} \end{vmatrix} \tag{3.3.5}$$

est non dégénérée.

On remarque que cette forme quadratique, en restriction au tangent W de $\mathcal{L}_\phi$ ne dépend que de $\mathcal{L}$ et de ψ (et pas de ϕ).

En effet, dans la carte définie par ϕ,

$$\lambda(\nu_0) = T_{\nu_0}(\mathcal{L}) = \{(X, \phi''_{xx} X + \phi''_{x\theta} A); (X, A) \in \mathbb{R}^{n+N},\ \phi''_{\theta x} X + \phi''_{\theta\theta} A = 0\}.$$

Soient donc $(X, A), (X', A')$ définissant deux vecteurs tangents V et $V' \in \lambda(\nu_0)$

$$\begin{aligned} Q_\psi\Big((X, A), (X', A')\Big) &= < X, (\phi''_{xx} - \psi''_{xx}) X' + \phi''_{x\theta} A' > \\ &= < -\psi''_{xx} X, X' > - < -X, \phi''_{xx} X' + \phi''_{x\theta} A' > \\ &= Q(\lambda(\nu_0), \alpha; \lambda_0(\nu_0))\Big(V, V'\Big) \end{aligned}$$

d'après la définition (3.1).

En effet α est transverse aux deux lagrangiens $\lambda(\nu_0)$ et $\lambda_0(\nu_0)$ donc le vertical $\lambda_0(\nu_0)$ s'exprime comme graphe d'un homomorphisme A_ψ de $\lambda(\nu_0)$ vers $\alpha = T_{\nu_0} L_\psi$:

$$\forall (0, \Xi) \in \lambda_0(\nu_0),\ \exists (X, A) \text{unique tel que } \Xi = \phi''_{xx} X + \phi''_{x\theta} A \ \text{ et } \ \phi''_{\theta x} X + \phi''_{\theta\theta} A = 0$$

puisque Q_ψ est non dégénérée. On écrit alors

$$(0, \Xi) = (X, \phi''_{xx} X + \phi''_{x\theta} A) - (X, \psi''_{xx} X)$$

c'est à dire

$$A_\psi(X, \phi''_{xx}X + \phi''_{x\theta}A) = (-X, -\psi''_{xx}X).$$

On voit maintenant que l'orthogonal W^{Q_ψ} de W par rapport Q_ψ est $\mathbb{R}^N = \{(0, A)\}$ et que

$$Q_{\psi_{|W^{Q_\psi}}} = \phi''_{\theta\theta}.$$

Mais d'après le lemme ci-dessous on a $\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi = \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_{\psi_{|\mathrm{W}}} + \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_{\psi_{|\mathrm{W}^{\mathrm{Q}_\psi}}}$, c'est à dire :

$$\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi = \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\lambda(\nu_0), \alpha; \lambda_0(\nu_0)) + \mathrm{sgn}\, \phi''_{\theta\theta}. \tag{3.3.6}$$

Soit maintenant z_ϕ une section au sens de Hörmander. Pour $\alpha \in \mathcal{T}(\mathcal{L}), p(\alpha) = \nu_0$, si ϕ et $\tilde{\phi}$ sont deux fonctions de phase qui définissent $\mathcal{L}$ au voisinage de ν_0 et ψ une fonction sur X qui satisfait $\alpha = T_{\nu_0}L_\psi$, notons Q_ψ et $\tilde{Q}_\psi$ les formes quadratiques respectives définies par (3.3.5).

On définit

$$f(\alpha) = \exp(i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi)\mathrm{z}_\phi(\nu_0).$$

D'après la relation (3.3.6) on a

$$\mathrm{sgn}\, \phi''_{\theta\theta} - \mathrm{sgn}\, \tilde{\phi}''_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} = \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi - \mathrm{sgn}\, \tilde{\mathrm{Q}}_\psi$$

la relation de compatibilité 1.2.2 donne donc

$$\exp(i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi)\mathrm{z}_\phi(\nu_0) = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\, \tilde{\mathrm{Q}}_\psi)\mathrm{z}_{\tilde{\phi}}(\nu_0)$$

et la fonction f est bien définie sur $\mathcal{TL}$. Par ailleurs si $\tilde{\alpha}$ est un autre point de $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ tel que $p(\tilde{\alpha}) = \nu_0$ et $\tilde{\psi}$ une fonction adaptée alors

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\alpha}) &= \exp(i\frac{\pi}{4}(\mathrm{sgn}\, \tilde{\mathrm{Q}}_\psi - \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_\psi))\mathrm{f}(\alpha) \\
&= \exp\Big(i\frac{\pi}{4}\Big(\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\lambda(\nu_0), \tilde{\alpha}; \lambda_0(\nu_0)) - \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}(\lambda(\nu_0), \alpha; \lambda_0(\nu_0))\Big)\Big)\mathrm{f}(\alpha) \\
&= \exp\Big(i\frac{\pi}{2}s(\lambda(\nu_0), \lambda_0(\nu_0); \alpha, \tilde{\alpha})\Big)f(\alpha) \\
&= \exp\Big(i\frac{\pi}{2}s(\lambda_0(\nu_0), \lambda(\nu_0); \tilde{\alpha}, \alpha)\Big)f(\alpha)
\end{aligned}$$

c'est donc bien une section du fibré de Maslov. Ce qui termine la démonstration du théorème 1.2. ∎

Lemme 3.3.2 . — *Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et V^Q son orthogonal pour Q, on a alors la relation*

$$\mathrm{sgn}\, \mathrm{Q} = \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_{|\mathrm{V}} + \mathrm{sgn}\, \mathrm{Q}_{|\mathrm{V}^\mathrm{Q}}.$$

Démonstration. — Ce lemme se démontre par récurrence sur $\dim V \cap V^Q$. Si cette valeur est 0 il n'y a rien à faire, sinon soit $v_1, \ldots, v_k$ une base de $V \cap V^Q$ que l'on complète en une base de $V + V^Q$ par $v_{k+1}, \ldots, v_p$. Comme Q est non dégénérée il existe $w_1 \in \mathbb{R}^n$ telle que $Q(v_1, w_1) = 1$, et quitte à le modifier par une combinaison linéaire des v_j on peut supposer $Q(w_1) = 0$ et $Q(v_j, w_1) = 0$ pour $j > 1$. On remarque que la signature de Q en restriction à $\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}w_1$ est nulle et on applique l'hypothèse de récurrence à $(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}w_1)^Q$. ∎

4 Références

.

1. Aebischer B, Borer M & al. — *Symplectic Geometry*, Birhäuser, Basel, 1992.
2. Anné C., Charbonnel A-M. — *Bohr Sommerfeld conditions for several commuting Hamiltonians*, preprint (Juillet 2002), ArXiv Math-Ph/0210026.
3. Arnol'd V.I. — *Characteristic Class entering in Quantization Conditions.* Funct. Anal. and its Appl. **1** (1967), 1-14.
4. Duistermaat J. — *Morse Index in Variational Calculus.* Adv. in Maths **21** (1976), 173–195.
5. Duistermaat J., Guillemin V. — *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics.* Invent. Math. **29** (1975), 39-79.
6. Guillemin V., Sternberg S. — *Geometric Asymptotics* Math. Surveys and Monograph n^o 14, AMS (1990).
7. Hörmander L. — *Fourier Integral operators.* Acta Math. **127** (1971), 79–183.
8. Hörmander L. — *The Weyl calculus of pseudodifferential operators.* Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 359-443.
9. Hörmander L. — *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III.*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1985.
10. Hörmander L. — *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV.*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1985.
11. Husemoller D. — *Fibre Bundles*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
12. Robin J., Salamon D. — *The Maslov Index for Path.* Topology **32** (1993), 827–844.