

Perturbation stochastique de processus de rafle.

Frédéric BERNICOT
Juliette VENEL

Université Paris-Sud

28 Avril 2009, École Polytechnique
Séminaire X-EDP

- 1 La Prox-régularité
- 2 Les processus de rafle
- 3 Réflexion d'un mouvement brownien
- 4 Perturbation stochastique de certains processus de rafle

- 1 La Prox-régularité
- 2 Les processus de rafle
- 3 Réflexion d'un mouvement brownien
- 4 Perturbation stochastique de certains processus de rafle

Les ensembles prox-réguliers

Soit C un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$.

Définition

Pour $x \in C$, soit $N(C, x)$ le cône proximal normal de C en x défini par :

$$N(C, x) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d, \exists s > 0, x \in P_C(x + sv) \right\}.$$

Définition

Pour $\eta > 0$, l'ensemble C est dit η -prox-régulier si pour tout $x \in C$ et $v \in N(C, x) \setminus \{0\}$

$$B\left(x + \eta \frac{v}{|v|}, \eta\right) \cap C = \emptyset.$$

La notion de prox-régularité a été initialement définie par Federer (1959) dans $\mathbb{R}^n$ sous l'appellation “positively reached sets”. Elle fut ensuite étendue aux espaces de Hilbert par Clarke, Stern et Wolenski (~ 90) puis par Poliquin, Rockafellar and Thibault (~ 00) et très récemment dans des espaces de Banach par Bernard, Thibault et Zlateva .

Elle traduit la notion géométrique suivante : on peut faire rouler une boule de rayon η continûment sur toute la frontière ∂C . Elle est équivalente à la propriété suivante : la projection P_C est monovaluée et continue en tout point à distance $d_C < \eta$.

Généralisation de la convexité.

Proposition

Le cône proximal normal est hypomonotone. Si C est η -prox-régulier alors pour tout $x, y \in C$, $u \in N(C, x)$ et $v \in N(C, y)$

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq -\frac{|u| + |v|}{2\eta} |x - y|^2.$$

Propriété spécifique due à la structure Hilbertienne.

- 1 La Prox-régularité
- 2 Les processus de rafle
- 3 Réflexion d'un mouvement brownien
- 4 Perturbation stochastique de certains processus de rafle

Interprétation

Processus de rafle par un ensemble mobile $C(t)$, $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) + N(C(t), y(t)) \ni f(t, y(t)) \\ y(0) \in Q(0). \end{cases} \quad (1)$$

Le point $y(t)$, soumis à la perturbation f “doit vivre dans $C(t)$ ” et suivre son évolution.

[Brezis, ~60] Avec un ensemble convexe constant.

[Moreau, ~80] Avec un ensemble convexe non constant.

Algorithme de rattrapage (“Catching-up Algorithm”) :

$$y^{k+1} = P_C(t^{k+1}) \left[y^k + hf(t^k, y^k) \right].$$

Théorème (Edmond-Thibault, ~00)

Supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble $C(t)$ soit η -prox-régulier. Si $C(\cdot)$ varie de manière absolument continue (pour la distance de Hausdorff), alors le problème (1) est bien posé dans $W^{1,1}([0, T])$.

Extensions : Dans un cadre Hilbertien avec une perturbation multivaluée ([Edmond-Thibault, 05-06])
Dans un cadre Banachique ([B-Venel, 08]).

Remarque

L'équation (1) se réécrit en terme de mesure temporelle :

$$dy + N(C(t), y(t))dt \ni f(t, y(t))dt.$$

Le cas d'un ensemble constant

Théorème

Si $C(\cdot) = C$ est constante à un ensemble uniformément prox-régulier alors l'inclusion différentielle (1) est équivalente à l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) + P_{N(C, y(t))}[f(t, y(t))] = f(t, y(t)) \\ y(0) \in C. \end{cases} \quad (2)$$

Conséquence de l'hypomonotonie du cône proximal normal.

[B-Venel,08] Une prox-régularité directionnelle est suffisante.

[Venel,09] Schéma numérique - convergence - "convexification de l'ensemble C ".

- 1 La Prox-régularité
- 2 Les processus de rafle
- 3 Réflexion d'un mouvement brownien**
- 4 Perturbation stochastique de certains processus de rafle

La réflexion d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ (associé à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) à l'intérieur d'un ensemble C est décrite par un processus X solution de :

$$\begin{cases} dX_t + N(C, X_t)dt \ni f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

avec $u_0 \in C$ une condition initiale fixée.

$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ correspond au “champ” subi par X .

$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ correspond à la perturbation stochastique (avec un mouvement Brownien réel).

Plus précisément : un processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de (3) s'il existe un autre processus $(K_t)_{t \geq 0}$ tel que :

- a) $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté avec des chemins continus à valeurs dans C ;
- b) $(K_t)_{t \geq 0}$ est adapté avec des chemins continus et à variation bornée;
- c) Les deux processus X et K vérifient

$$dX_t + dK_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t; \quad (4)$$

- d) La condition initiale en temps $X_0 = u_0$ p.p.;
- e) Le processus dK_t est uniquement supporté lorsque $X \in \partial C$

$$|K|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \in \partial C} d|K|_s, \quad K_t = \int_0^t \xi(s) d|K|_s, \quad (5)$$

avec $\xi(s) \in N(C, X_s)$.

- L'EDS (4) se réécrit sous la version intégrale suivante :

$$X_t + K_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (6)$$

$\implies$ Méthode de point fixe.

- (5) décrit de manière rigoureuse : “ $dK_t \in N(C, X_t)dt$ ”.

Le problème déterministe de Skorokhod

Pour C un ensemble fermé et $h \in C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$, une solution x du problème de Skorokhod est une fonction $x \in C^0([0, T], C)$ telle qu'il existe $k \in BV([0, T])$ avec :

- x et k solutions de "l'équation intégrale" :

$$x(t) + k(t) = x(0) + h(t).$$

- La condition initiale en temps $k(0) = 0$;
- La distribution dk est uniquement supportée sur $\{t, x(t) \in \partial C\}$ et

$$|k|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{x(s) \in \partial C} d|k|_s, \quad k(t) = \int_0^t \xi(s) d|k|_s,$$

avec $\xi(s) \in N(C, x(s))$.

Problème : Pour $h \in W^{1,1}([0, T])$ le problème est équivalent à l'inclusion différentielle décrivant un processus de rafle avec $f = \frac{dh}{dt}$.

- Comment passer des fonctions $h \in W^{1,1}([0, T])$ aux fonctions $h \in C^0([0, T])$.
- Comment montrer l'existence et l'unicité de telles solutions ?
- Comment borner la variation de k en fonction de $h \in C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$ pour utiliser un raisonnement par densité ?

Admissibilité d'un ensemble

Définition (Lions-Sznitman (84))

Un ensemble fermé C de $\mathbb{R}^d$ est dit admissible s'il existe $\delta > 0$, $\beta > 0$ et une famille de vecteurs normalisés $(l_x)_{x \in \partial C}$ tels que :

$$\forall x \in \partial C, \forall y \in \partial C \cap B(x, \delta), \forall v \in N(C, y), \quad \langle l_x, v \rangle \geq \beta |v|.$$

Condition de régularité sur le bord ∂C , décrivant une certaine condition de “densité géométrique” de l'intérieur $\text{Int}(C)$ en tout point $x \in \partial C$.

Théorème (Lions-Sznitman (84) ; Saisho (87))

Soit C un ensemble uniformément prox-régulier et admissible. Si on sait résoudre le problème de Skorokhod pour toutes fonctions $h \in C^\infty([0, T])$, alors on sait le résoudre pour toutes fonctions $h \in C^0([0, T])$.

De plus la variation totale de la fonction k est bornée par $\|h\|_\infty$ et son module de continuité.

Conséquence : Le problème de Skorokhod est bien posé pour toute fonction $h \in C^0([0, T])$.

Conséquences pour le problème stochastique

Théorème (Lions-Sznitman (84) ; Saisho (87))

Soit C un ensemble uniformément prox-régulier et admissible, alors le problème (3) est bien posé dans

$$H := L^4(\Omega, L^\infty([0, T]))$$

pour tout $T < \infty$.

Preuve :

Résolution du problème de Skorokhod
déterministe.

Continuité de l'intégrale stochastique.

Méthode de point fixe dans H .

- 1 La Prox-régularité
- 2 Les processus de rafle
- 3 Réflexion d'un mouvement brownien
- 4 Perturbation stochastique de certains processus de rafle**

But : combiner les deux théories pour étudier une perturbation stochastique d'un processus de rafle associé à une fonction multivaluée $C(\cdot)$

$$\begin{cases} dX_t + N(C(t), X_t)dt \ni f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = u_0. \end{cases} \quad (7)$$

Problème : dépendance en temps de l'ensemble $C(t)$ et son admissibilité.

Le cadre et les hypothèses

Soit $\mathcal{I} := [0, T]$ et $g_i : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexes (en la variable d'espace) pour $i = 1 \dots p$. On pose alors

$$Q(t) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \forall i, \quad g_i(t, x) \geq 0 \right\},$$

qui représente "l'ensemble des points admissibles sous les contraintes $g_i(t, \cdot)$ ". On suppose qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, M, \kappa > 0$ telles que $g_i \in C^2(\mathcal{I} \times \mathbb{R}^d)$ et

$$\forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \quad \alpha \leq |\nabla_x g_i(t, x)| \leq \beta, \quad (\text{A1})$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \quad |\partial_t g_i(t, x)| \leq \beta, \quad (\text{A2})$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^d, \quad |D_x^2 g_i(t, x)| \leq M. \quad (\text{A3})$$

Pour vérifier la prox-régularité des ensembles $Q(t)$ et leur admissibilité, on fait l'hypothèse suivante : il existe $\rho, \gamma > 0$ tel que

$$\forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i \in I_\rho(t, x)} \lambda_i |\nabla_x g_i(t, x)| \leq \gamma \left| \sum_{i \in I_\rho(t, x)} \lambda_i \nabla_x g_i(t, x) \right| .$$

(R_ρ)

avec

$$I_\rho(t, x) := \{i, g_i(t, x) \leq \rho\} .$$

Inégalité triangulaire inverse sur les gradients qui sont “presque activés”, qui traduit une “indépendance uniforme” de ces vecteurs sous combinaisons linéaires positives.

Le problème (7) est bien posé

Théorème

Sous (R_0) , l'ensemble $Q(t)$ est uniformément prox-régulier (avec une constante indépendante de $t \in \mathcal{I}$).

Théorème

Sous les hypothèses de régularité et (R_ρ) , la multifonction $Q(\cdot)$ est Lipschitzienne. De plus, l'ensemble $Q(t)$ est admissible (de manière uniforme en temps).

Application : on peut résoudre le problème de Skorokhod $x_t + k_t = h_t$ déterministe en utilisant la théorie des processus de rafle pour $h \in W^{1,1}(\mathcal{I})$. L'admissibilité des ensembles $Q(t)$ permet alors par les arguments de Lions-Sznitman de le résoudre pour toutes les fonctions $h \in C^0(\mathcal{I})$.

On peut alors appliquer la méthode de point fixe pour obtenir :

Théorème

Sous les hypothèses précédentes, le problème (7) est bien posé dans

$$H = L^4(\Omega, L^\infty(\mathcal{I})).$$

Des résultats de stabilité

Théorème

On note X^σ l'unique processus, solution de (7), associé à la perturbation stochastique σdB_t . Soit X^0 le processus déterministe solution de (7) pour $\sigma = 0$. Alors X^σ converge vers X^0 lorsque σ tend vers 0 dans $L^\infty(\mathcal{I} \times \mathbb{R}^d)$:

$$\left\| X^\sigma - X^0 \right\|_H \leq C_{u_0} \|\sigma\|_{L^\infty(\mathcal{I} \times \mathbb{R}^d)}.$$

Preuve :

Théorème du point fixe à paramètre.

Utilisation d'inégalités maximales de Doob pour obtenir la continuité des intégrales stochastiques en fonction de la perturbation σ .

Perspectives

- Sous (R_ρ) , adaption du schéma numérique à $Q(t)$ pour des contraintes dépendantes du temps.
- Application au modèle de mouvement de foule.