

CONSTRUCTION ET ÉTUDE DE NOUVEAUX ESPACES DE HARDY H^1 .

Frédéric BERNICOT

Université Paris-Sud

20 novembre 2007

① INTRODUCTION

② DÉFINITION ET CONSTRUCTION

③ PROPRIÉTÉS DE NOS ESPACES DE HARDY.

④ APPLICATIONS AU PROBLÈME DE RÉGULARITÉ MAXIMALE.

⑤ ÉTUDE PARTIELLE DU PROBLÈME DE DUALITÉ.

QUELQUES ESPACES DE HARDY

- L'espace de Hardy de Coifman-Weiss [CW-1970].
 $\implies$ Opérateurs de Calderón-Zygmund.
- Pour L un opérateur sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace H_L^1 suivant :

$$\|f\|_{H_L^1} = \left\| \sup_{t>0} |e^{-t^p L} f| \right\|_{L^1}$$

ou

$$\|f\|_{H_L^1} = \left\| \sup_{t>0} \iint_{|x-y|<t} |(t^p L)e^{-t^p L} e^{-tL} f(y)| \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right\|_{L^1}.$$

Par exemple $L = -\Delta + V$ (J.Dziubanski et J.Zienkiewicz [98-00-05]) avec un potentiel V . Ou $L = -\operatorname{div}(A\nabla)$ (S.Hofmann et S.Mayboroda [07]).
 $\implies$ Transformées de Riesz.

MOTIVATIONS

- Ne pas avoir recours à une analyse temps-fréquence par l'espace des tentes.
- Avoir recours au maximum à des informations L^2 .
- Des espaces adaptés à d'autres opérateurs.
- Un critère simple pour déterminer la continuité $H^1 - L^1$ d'un opérateur.
- Des résultats d'interpolation avec les espaces de Lebesgue.
- Étude de l'espace dual.

CADRE

Soit (X, d, μ) un espace de type homogène : cadre général contenant les graphes, les variétés riemanniennes On note $S_i(Q)$ la couronne

$$S_i(Q) := \left\{ x, 2^i \leq 1 + \frac{d(x, c(Q))}{r_Q} < 2^{i+1} \right\}.$$

Les opérateurs de moyennes : $m_{p,E}$.

On choisit une collection $(B_Q)_Q$ d'opérateurs bornés sur $L^2(X)$.

"Les opérateurs B_Q jouent le rôle d'oscillations."

MOLÉCULES ET ATOMES

DÉFINITION

Une ϵ -molécule associée à un cube Q est une fonction $m = B_Q(f_Q)$ avec

$$\forall i \geq 0, \quad \|f_Q\|_{2,S_i(Q)} \leq \left(\mu(2^i Q)\right)^{-1/2} 2^{-\epsilon i}.$$

Un atome associé à un cube est une ϵ -molécule supportée sur Q : une ∞ -molécule.

Les fonctions f_Q sont normalisées dans L^1 .

CONSTRUCTION DE L'ESPACE H^1

DÉFINITION

Une fonction $f \in H^1_{\epsilon, mol}$ si elle admet une décomposition en molécules

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i \quad \mu - p.p.$$

avec $\sum_i |\lambda_i| < \infty$. Et alors

$$\|h\|_{H^1_{\epsilon, mol}} := \inf_{h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i} \sum_i |\lambda_i| < \infty.$$

On définit de même l'espace atomique H^1_{ato} .

REMARQUES

- L'espace H^1 est-il un espace de Banach ?
Probablement faux dans le cas général, donc on ne peut avoir recours à la théorie d'interpolation réelle ou complexe.
- Quand a-t-on l'injection $H^1 \hookrightarrow L^1$?

⇒ Il suffit de demander des conditions de décroissances hors-diagonales sur les opérateurs B_Q .

EXEMPLES

- Espace de Coifman-Weiss avec

$$B_Q(f) = \left[f - \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right) \right] \mathbf{1}_Q.$$

- Espace de S. Hofmann- S. Mayboroda avec

$$B_Q(f) = (r_Q^2 L)^M e^{-r_Q^2 L}(f).$$

- Espaces étudiés par X.T. Duong et L. Yan
- Problème : tous les espaces de Hardy n'admettent pas de représentation moléculaire aussi simple que la notre.

CONTINUITÉ $H^1 - L^1$

THÉORÈME (THM VERSION ATOMIQUE)

Soit T un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(X)$ tel que :

$$m_{2,S_j(Q)} [T(B_Q(f))] \leq \alpha_j(Q) m_{2,Q}[f],$$

avec

$$\Lambda := \sup_{Q \text{ boule}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty. \quad (1)$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\forall f \in L^2 \cap H_{ato}^1 \quad \|T(f)\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H_{ato}^1}.$$

THÉORÈME (THM VERSION MOLÉCULAIRE)

Soit T un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(X)$ tel que :

$$m_{2,S_j(2^k Q)}[T(B_Q(f))] \leq \alpha_{j,k}(Q) m_{2,S_k(Q)}[f],$$

avec

$$\Lambda := \sup_{k \geq 0} \sup_{Q \text{ boule}} \left[\sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+k+1} Q)}{\mu(2^{k+1} Q)} \alpha_{j,k}(Q) \right] < \infty.$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C = C(\epsilon)$ telle que

$$\forall f \in L^2 \cap H_{\epsilon, \text{mol}}^1 \quad \|T(f)\|_1 \leq C \|f\|_{H_{\epsilon, \text{mol}}^1}.$$

INTERPOLATION

DÉFINITION

On définit l'opérateur maximal suivant pour $\sigma \in [2, \infty]$:

$$M_{\sigma}(f)(x) := \sup_{\substack{Q \text{ boule} \\ x \in Q}} m_{\sigma,Q} [f - B_Q^*(f)] .$$

DÉFINITION

On définit la fonction maximale :

$$M^{\sharp}_r(h)(x) := \sup_{x \in Q} m_{r,Q} [B_Q^*(h)] .$$

A l'aide d'une inégalité aux bons λ [A.M. 07], on obtient un résultat d'interpolation :

THÉORÈME

Supposons que M_σ soit borné par $M_{HL,2}$. Soit T un opérateur linéarisable borné sur $L^2(X)$ et continu de H_{ato}^1 dans L^1 . Alors pour tout $p \in]\sigma', 2]$ il existe une constante $C = C(p)$ telle que :

$$\forall f \in L^2(X) \cap L^p(X), \quad \|T(f)\|_p \leq C \|f\|_p.$$

- "linéarisable" pour utiliser de la dualité
- Inégalités d'interpolation.
- Inégalité de Fefferman-Stein.

RÉSULTAT FINAL.

En composant les deux résultats précédents, on obtient :

THÉORÈME

Soit T un opérateur linéarisable borné sur $L^2(X)$ et une collection $\mathbb{B}$ tels que :

$$m_{2,S_j(Q)} [T(B_Q(f))] \leq \alpha_j(Q) m_{2,Q}[f],$$

avec

$$\Lambda := \sup_{Q \text{ boule}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty$$

et

$$M_\sigma \lesssim M_{HL,2}$$

pour un certain $\sigma \in]2, \infty]$. Alors pour tout $p \in]\sigma', 2]$, l'opérateur T est borné sur $L^p(X)$.

- Ce résultat permet de comprendre le rôle essentiel des estimations $L^2 - L^2$.
- Excepté l'hypothèse de linéarité : Résultat plus fort que celui de S.Blunck-P.C.Kunstmann (2003), amélioré par P.Auscher (2007). On a simplement des décroissances hors-diagonales $L^2 - L^2$ (au lieu de $L^{\sigma'} - L^2$).
- Application aux transformées de Riesz. Intervalle d'exposant optimal.

CONTINUITÉ SUR LES ESPACES À POIDS.

On utilise les classes de Muckenhoupt et les classes
"Reverse Hölder" pour obtenir :

THÉORÈME

Supposons que M_σ soit borné par $M_{HL,2}$. Soit T un opérateur linéarisable borné sur $L^2(X)$ et vérifie la condition (1). Alors pour tout $p \in]\sigma', 2]$ et tout poids $\omega \in \mathbb{A}_{p/\sigma'} \cap RH_{(\frac{2}{p})}'$, il existe une constante $C = C(p)$ telle que :

$$\forall f \in L^2(X) \cap L^p(X), \quad \|T(f)\|_{p,\omega d\mu} \leq C \|f\|_{p,\omega d\mu}.$$

APPLICATION À LA RÉGULARITÉ MAXIMALE.

Problème de Cauchy sur un espace de type homogène
(Y, d_Y, ν) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t), & t \in J, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où $f : J \rightarrow X$ est donnée. La solution s'obtient formellement

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Question : Si $f \in L^q(J, L^p(Y))$, est ce que $\frac{\partial u}{\partial t}$ (et Au)
appartiennent à $L^q(J, L^p(Y))$?

[Cannarsa-Vespri 86 ; Hieber-Prüss 97 ;

Couhlon-Duong 00 ; Blunck-Kunstmann 02]

- Condition nécessaire : semi groupe e^{tA} soit analytique.
- Problème équivalent à l'étude de l'opérateur T sur $L^p(J \times Y)$:

$$Tf(t, x) = \int_0^t \left[A e^{(t-s)A} f(s, \cdot) \right] (x) ds.$$

- Semi groupe analytique $\implies T$ borné sur $L^2(J \times Y)$.
[L de Simon - 64]
- Un critère équivalent a été trouvé avec la notion de R-bornitude [Weis - 01].

On définit notre espace de Hardy associé au problème. On choisit

$$X = J \times Y$$

muni de la mesure produit et de la "quasi"-distance parabolique

$$d((t, x), (u, y)) := \max \left\{ \sqrt{|t - u|}, d_Y(x, y) \right\}.$$

On pose alors

$$B_Q(f)(t, x) := f(t, x) - \int_0^{+\infty} \varphi_r(t - \sigma) e^{r_Q A}(f(\sigma, \cdot))(x) d\sigma.$$

Les hypothèses de base sont vérifiées.

RÉSULTATS.

THÉORÈME

Si le semi groupe vérifie : pour $u \leq 2^{j+1}r$

$$m_{2,S_j(B)} \left[e^{u^2 A}(f) \right] \leq \frac{\nu(B)}{\nu(2^{j+1}B)} \gamma \left(\frac{2^{j+1}r}{u} \right) m_{2,B}[f]$$

et pour $u \geq 2^{j+1}r$

$$m_{2,S_j(B)} \left[e^{u^2 A}(f) \right] \leq \frac{\nu(B)}{\nu(\frac{u}{r}B)} m_{2,B}[f]$$

alors il existe un espace de Hardy H^1 tel que $T : H^1 \rightarrow L^1$.

THÉORÈME

Pour $p_0 \in]1, 2]$ si il existe $(\beta_j)_{j \geq 0}$ tels que

$$\sum_{j \geq 0} 2^j \beta_j < \infty$$

et

$$m_{p'_0, B} \left[e^{r_Q^2 A^*}(f) \right] \leq \sum_{j \geq 0} \beta_j m_{2, 2^j B}[f].$$

Alors $M_{p'_0}$ est borné par $M_{HL, 2}$

COROLLAIRE

T est borné sur $L^p(J \times Y)$ pour $p \in]p_0, 2]$.

Résultats identique sur T^* .

QUELQUES RÉSULTATS DE DUALITÉ.

Par analogie avec l'espace de Coifman-Weiss, l'espace de Hofmann-Mayboroda (grâce à la dualité dans l'espace des tentes).

DÉFINITION

Espace BMO :

$$\begin{aligned}\|f\|_{BMO} &:= \sup_{Q \text{ boule}} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |B_Q^*(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &= \left\| M_2^\sharp(f) \right\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

On définit BMO_∞ comme le complété de L^2 avec cette pseudo-norme.

THÉORÈME

On a alors

$$(H_{ato}^1)^* \cap L^2 = BMO_\infty \cap L^2. \quad (2)$$

$$(H_{\epsilon, mol}^1)^* \cap L^2 \subset BMO_\infty \cap L^2. \quad (3)$$

- Sous des hypothèses supplémentaires, réciproque à (3). Par exemple si B_Q ne dépend que du rayon r_Q .
- Sous des hypothèses raisonnables, $(H_{ato}^1)^* \cap L^2$ dense dans $(H_{ato}^1)^*$ pour la topologie faible.

Question : Quel critère pour assurer que $(H_{ato}^1)^*$ soit un espace de fonctions ?