

CARACTÉRISATION MAXIMALE DES ESPACES DE SOBOLEV ET ESPACES DE HARDY-SOBOLEV.

Frédéric BERNICOT

Université Paris-Sud

1 Octobre 2008, Orléans.

- 1 CARACTÉRISATION MAXIMALE DES ESPACES DE SOBOLEV
- 2 APPLICATIONS AUX ESPACES DE HARDY-SOBOLEV

- 1 CARACTÉRISATION MAXIMALE DES ESPACES DE SOBOLEV
- 2 APPLICATIONS AUX ESPACES DE HARDY-SOBOLEV

UN EXEMPLE DE CARACTÉRISATION MAXIMALE

Soit (X, d, μ) un espace de type homogène. L'opérateur maximal de Hardy-Littlewood est défini pour $s \in (0, \infty)$ par :

$$M_{HL,s}(f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{L^s(Q)}.$$

THEOREME ((E.M. STEIN, 1983))

Pour tout exposant $p \in (s, \infty]$, l'opérateur $M_{HL,s}$ est borné sur $L^p(X)$.

THEOREME (THÉORÈME DE DIFFÉRENCIATION)

Soit $f \in L^1_{loc}$, pour presque tout x

$$|f(x)| \leq M_{HL,s}(f)(x).$$

Réécriture

$$\|f\|_{L^p} \lesssim \left\| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{L^s(Q)} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Question “générale” : Soit $(E^p)_p$ une échelle d'espaces, admettant des “restrictions locales”, quand peut-on avoir :

$$\|f\|_{E^p} \lesssim \left\| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{E^s(Q)} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{E^p} ?$$

On souhaite donc caractériser la norme E^p par la norme L^p d'un opérateur maximal.

Soit M une variété riemannienne doublante. L'espace $W^{1,p}$ est l'adhérence de $C_0^\infty(M)$ pour la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \| |f| + |\nabla f| \|_{L^p}.$$

THEOREME

Pour tout exposant $s \in (0, \infty)$ et $p \in (s, \infty]$, on a

$$\|f\|_{W^{1,p}} \underset{(1)}{\lesssim} \left\| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{W^{1,s}(Q)} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{W^{1,p}}.$$

REMARQUE

Point important : l'inégalité (1) est vraie pour tout exposant s .

Question : Que se passe-t-il pour les espaces duaux $W^{-1,p}$? même dans $\mathbb{R}^n$?

Soit (M, d, μ) une variété riemannienne de type homogène.
Pour $s \in [1, \infty]$ et O un ouvert de M , on définit :

$$\|f\|_{W^{-1,p}(O)} := \sup_{\substack{g \in C_0^\infty(O) \\ \|g\|_{W^{1,p'} \leq 1}} |\langle f, g \rangle|.$$

Pour $s \in [1, \infty]$, on pose

$$M_{S,s}(f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \|f\|_{W^{-1,s}(Q)}.$$

PROPOSITION

On a la caractérisation suivante :

$$\|f\|_{W^{-1,p}(O)} \simeq \inf_{f=\phi - \operatorname{div}(\psi)} \| |\phi| + |\psi| \|_{L^p(O)}.$$

On définit donc un deuxième opérateur maximal :

$$\begin{aligned}
 M_{S,*,s}(f)(x) &:= \inf_{f=\phi-\operatorname{div}(\psi)} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1/s}} \| |\phi| + |\psi| \|_{L^s(Q)} \\
 &= \inf_{f=\phi-\operatorname{div}(\psi)} M_{HL,s}(|\phi| + |\psi|)(x).
 \end{aligned}$$

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

- Pour $s \in [1, \infty]$, $M_{S,s}(f)(x) \leq M_{S,*,s}(f)(x)$.
- Pour $1 \leq s \leq t \leq \infty$, on a $M_{S,s}(f)(x) \leq M_{S,t}(f)(x)$ et $M_{S,*,s}(f)(x) \leq M_{S,*,t}(f)(x)$.
- Pour $p \in [1, \infty)$, les opérateurs $M_{S,p}$ et $M_{S,*,p}$ sont de type faible (p, p) :

$$\|M_{S,p}(f)\|_{L^{p,\infty}} \lesssim \|M_{S,*,p}(f)\|_{L^{p,\infty}} \lesssim \|f\|_{W^{-1,p}}.$$

- Pour $1 \leq s < p < \infty$, les opérateurs $M_{S,s}$ et $M_{S,*,s}$ sont de type fort (p, p) :

$$\|M_{S,s}(f)\|_{L^p} \lesssim \|M_{S,*,s}(f)\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{W^{-1,p}}. \quad (1)$$

- Inégalité inverse :

$$\|f\|_{W^{-1,p}} \lesssim \|M_{S,p}(f)\|_{L^p} \lesssim \|M_{S,*,p}(f)\|_{L^p}.$$

Problème : On cherche à inverser (1) : à démontrer l'inégalité précédente avec des opérateurs $M_{S,s}$ et $M_{S,*,s}$ pour $s < p$.

A l'aide d'une inégalité “aux bons lambdas” :

PROPOSITION

*Soit M une variété de type homogène et de mesure infinie.
Alors pour tout $s \in [1, \infty)$ et $p \in [1, \infty)$, on a :*

$$\|M_{S,s}(f)\|_{L^p} \simeq \|M_{S,*,s}(f)\|_{L^p}.$$

Reformulation du problème : Pour quels exposants $s < p$, a-t-on

$$\|f\|_{W^{-1,p}} \lesssim \|M_{S,s}(f)\|_{L^p} \simeq \|M_{S,*,s}(f)\|_{L^p} ?$$

THEOREME

Soit M une variété vérifiant Poincaré (P_2). Soient r, s des exposants tels que $1 < s < r' < \infty$. Supposons que

$$\|f\|_{W^{1,s'}} \lesssim \left\| (1 - \Delta)^{1/2}(f) \right\|_{L^{s'}}, \quad (nhR_{s'})$$

$$\left\| (1 - \Delta)^{1/2}(f) \right\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{W^{1,r}} \quad (nhRR_r)$$

Supposons que p_t le noyau du semi-groupe $e^{-t\Delta}$ vérifie

$$|p_t(x, y)| \lesssim \mu(B(x, t^{1/2}))^{-1} \quad \text{et} \quad \left\| \nabla e^{-t\Delta} \right\|_{L^{s'} \rightarrow L^{s'}} \lesssim t^{-1/2}.$$

Alors il existe une constante $c = c(s, r)$ telle que

$$\forall f \in W^{-1,r'}, \quad \|f\|_{W^{-1,r'}} \leq c \|M_{S,s}(f)\|_{L^{r'}}.$$

On peut allger les hypothèses ...

DÉMONSTRATION :

D'après les hypothèses et les propriétés précédentes, il nous suffit de démontrer :

$$\|(1 - \Delta)^{-1/2} f\|_{L^{r'}} \lesssim \|M_{S,*,s}(f)\|_{L^{r'}}.$$

Inégalité de “Fefferman-Stein” :

$$\|h\|_{L^{r'}} \simeq \|M_s^\sharp(h)\|_{L^{r'}}$$

avec

$$M_s^\sharp(h)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))^{1/s}} \|f - e^{-r^2 \Delta} f\|_{L^s(B(x,r))}.$$

Il suffit alors de montrer

$$M_s^\sharp((1 - \Delta)^{-1/2} f) \lesssim M_{S,*,s}(f),$$

ce qui utilise les décroissances hors-diagonales du semi-groupe.

THEOREME

Supposons que le noyau p_t du semi-groupe $e^{-t\Delta}$ vérifie

$$p_t(x, y) \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, t^{1/2}))} \text{ et que pour } p_0 \in (1, 2)$$

$$\left\| (1 - \Delta)^{1/2}(f) \right\|_{L^{p_0}} \lesssim \|f\|_{W^{1,p_0}}. \quad (nhRR_{p_0})$$

Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$\frac{1}{p_\theta} := (1 - \theta) + \frac{\theta}{2} < \frac{1}{p_0},$$

on a

$$(W^{1,1}, W^{1,2})_{\theta, p_\theta} = W^{1,p_\theta}.$$

On remplace l'hypothse de Poincaré (P_{p_0}) (cf Travaux de N. Badr) par l'hypothse plus "faible" ($nhRR_{p_0}$).

- 1 CARACTÉRISATION MAXIMALE DES ESPACES DE SOBOLEV
- 2 APPLICATIONS AUX ESPACES DE HARDY-SOBOLEV

DÉFINITION DES ESPACES DE HARDY-SOBOLEV

On définit les espaces par décomposition atomique à l'aide d'une collection d'opérateurs $\mathbb{B} := (B_Q)_Q$: collection d'opérateurs bornés sur $W^{1,2}$, indexée par l'ensemble des boules de M .

DEFINITION

Une fonction $m \in L^1_{loc}$ est un 2-atome associé à la boule Q s'il existe une fonction f_Q supportée dans Q telle que $m = B_Q(f_Q)$, avec $\|f_Q\|_{W^{1,2}} \leq \mu(Q)^{-1/2}$.

DEFINITION

On définit l'espace de Hardy-Sobolev HS^1 associé à $\mathbb{B}$ par décomposition atomique.

De manière identique l'interpolation des espaces "abstrait" de Hardy, on utilise les nouveaux opérateurs maximaux pour pouvoir interpoler les espaces de Hardy-Sobolev.

THEOREME

Supposons que le noyau p_t du semi-groupe $e^{-t\Delta}$ vérifie $p_t(x, y) \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, t^{1/2}))}$ et $(nhRR_{p_0})$ pour $p_0 \in (1, 2)$. Si pour tout x et $Q \ni x$

$$\frac{1}{\mu(Q)^{1/p'_0}} \|f - B_Q^*(f)\|_{W^{-1,p'_0}(Q)} \lesssim M_{S,*,2}(f)(x), \quad (2)$$

alors pour tout $\theta \in (0, 1)$ tel que $\frac{1}{p_\theta} := (1 - \theta) + \frac{\theta}{2} < \frac{1}{p_0}$, on a

$$(HS^1, W^{1,2})_{\theta, p_\theta} = W^{1,p_\theta}.$$