Estimations L^p pour les opérateurs linéaires, qu'en est-il du cas multi-linéaire ?

1 Les Multiplicateurs linéaires

Définition 1.1 *Un multiplicateur est un opérateur agissant sur un espace fonctionnel, qui commute avec les translations.*

Dans toute la suite, je considère les espaces de Lesgue sur $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue.

Définition 1.2 *On note $\mathcal{M}_{p,q}$ les multiplicateurs sur $\mathbb{R}^n$, qui sont continus de L^p dans L^q.*

Théorème 1.3 *Soit $T \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors il existe $v \in \mathbf{S}'$ telle que :*

$$T(f) = v * f.$$

Par conséquent, en notant $m = \widehat{v}$, on a :

$$T(f)(x) = \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) m(\xi) d\xi. \tag{1}$$

Démonstration : Soit $f \in \mathbf{S}$, on pose $\langle u, f \rangle = T(f)(0)$, cela défini bien une distribution sur $\mathbf{S}$ car $T(f) \in W^{\infty,q}$. On pose alors $v(\cdot) = u(-\cdot)$ et la commutativité avec le groupe des translations nous donne :

$$f * v(x) = \langle v, \tau_x(f(-\cdot)) \rangle = \langle u, \tau_{-x}(f) \rangle = T(\tau_{-x}(f))(0) = T(f)(x).$$

◀

.

Théorème 1.4 *Si $1 \leq q < p \leq \infty$ alors $\mathcal{M}_{p,q} = \{0\}$.*

Démonstration : Soit T un tel multiplicateur et f une fonction C_0^∞, alors pour tout h, on a :

$$\|\tau_h(T(f)) + T(f)\|_q = \|T(\tau_h(f) + f)\|_q \leq \|T\| \|\tau_h(f) + f\|_p.$$

Or pour toute fonction $g \in L^q$, $q < \infty$ on a :

$$\lim_{h \to \infty} \|\tau_h(g) + g\|_q = 2^{1/q} \|g\|_q.$$

Idée : si on suppose g à support compact alors pour h assez grand on a égalité puis par densité ... On obtient alors :

$$2^{1/q} \|T(f)\|_q \leq 2^{1/p} \|T\| \|f\|_p.$$

(vrai même si $p = \infty$ car ici f est à support compact). D'où $\|T\| \leq 2^{1/p-1/q} \|T\|$, de ce fait $T = 0$.

◀

Par conséquent, un multiplicateur ne peut qu'améliorer la classe de Lebesgue d'une fonction.

Proposition 1.5 *Pour $1 \leq p, q \leq \infty$, on a $\mathcal{M}_{p,q} = \mathcal{M}_{q',p'}$.*

Démonstration : On utilise q'un opérateur $T \in \mathcal{M}_{p,q}$ est la convolution par une distribution ϕ donc de noyau

$$K(x, y) = \phi(x - y).$$

Le noyau de T^* est $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)} = \overline{\phi(y-x)}$, donc $T^* \in \mathcal{M}_{p,q}$.

◀

Théorème 1.6 Caractérisation de $\mathcal{M}_{2,2}$ *$T \in \mathcal{M}_{2,2}$ si et seulement s'il est donné par la convolution avec une fonction de $\mathcal{F}L^\infty$.*

$$\mathcal{M}_{2,2} \simeq \mathcal{F}L^\infty.$$

Théorème 1.7 Caractérisation de $\mathcal{M}_{1,1}$ *$T \in \mathcal{M}_{1,1}$ si et seulement s'il est donné par la convolution avec une distribution de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ est l'ensemble des mesures de Borel complexes finies.*

$$\mathcal{M}_{1,1} \simeq \mathcal{M}.$$

Démonstration : Il existe u distribution telle que :

$$T(f) = u * f.$$

On régularise u : avec $u_\epsilon = u * \epsilon^{-1} e^{-\pi(x/\epsilon)^2}$. Alors par hypothèse sur T $u_\epsilon = T(..)$ est une famille bornée dans L^1, donc une famille bornée dans C_0^* (qui correspond à l'ensemble des mesures finies). On peut en extraire une sous suite (par Banach Alaoglu) pour la topologie faible * , il reste à montrer que la limite correspond à u.

◀

Corollaire 1.8 $\mathcal{M}_{\infty,\infty} = \mathcal{M}_{1,1}$. *Qui est impossible à démontrer sans la dualité !!*

Théorème 1.9 *Par le résultat d'interpolation (réelle ou complexe), la proposition de dualité 1.5, nous donne l'inclusion suivante :*

$$\mathcal{M}_{1,1} \subset \mathcal{M}_{p,p} = \mathcal{M}_{p',p'} \subset \mathcal{M}_{2,2}.$$

On a en fait le résultat suivant :

$$\mathcal{M}_{p,p} = [\mathcal{M}_{1,1}, \mathcal{M}_{2,2}]_\theta \simeq [\mathcal{M}, \mathcal{F}L^\infty]_\theta\,.$$

Un exemple de multiplicateur : la transformée d'Hilbert :

$$H(f)(x) = v.p(\frac{1}{x}) * f = v.p. \int f(x-y)\frac{dy}{y}.$$

Ici : $m(\xi) = sign(\xi)$.

2 L'espace BMO et le théorème $T(1)$

Il existe une première théorie : la théorie de Calderon-Zygmund, qui montre que sous certaines conditions de décroissance et de régularité du noyau K d'un opérateur T quelquonque alors on a l'implication suivante :

$$T \in L(L^2) \Longrightarrow T \in L(L^P) \qquad \forall 1 < p < \infty.$$

Par conséquent, de même que pour les multiplicateurs, on voit que la condition de continuité sur L^2 est la plus faible. Le théorème $T(1)$ nous permet de caractériser exactement ces opérateurs qui sont continus sur L^2.

2.1 L'espace BMO

L^∞ est la limite des espaces L^p en théorie géométrique de la mesure mais : Problèmes liés à l'espace L^∞ : il n'est pas caractérisable par la transformée de fourier, et son dual est "horrible". On va donc le substituer à un nouvel espace : BMO.

Définition 2.1 *Soit $f \in L^1_{loc}$, on définit*

$$\|f\|_{BMO} = \sum_{Q cube\ dyadique} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - m_Q(f)|\, dx,$$

où m_Q représente la moyenne :

$$m_Q(f) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Ici, on a pris la famille de colllection des cubes dyadiques, on peut prendre tous les cubes qui contiennent x, les cubes centrés en x ... La norme BMO (ou il faut quotienter par les constantes) permet de mesurer les oscillations de la fonction en moyenne. Par exemple la fonction $x \to ln(|x|)$ est dans BMO. La fonction $x \to ln(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ n'est pas dans BMO : l'oscillation en 0 n'est pas controllée en moyenne.

Proposition 2.2 $L^\infty \subset BMO$*. Les fonctions dans BMO vérifie la propriété de croissance logarithmique : en tout point (fini ou infini) la divergence de f ne peut être strictement supérieure à celle du log.*

Proposition 2.3 *Le dual de BMO s'identifie à $H^1 = L^1 \cap HL^1$ l'espace de Hardy. De plus, on a une description de BMO par la transformée de Fourier en utilisant la notion de mesure de Carleson sur la fonctionnnelle quadratique de Littlewood Paley.*

2.2 Le théorème $T(1)$ et ...

Définition 2.4 *Un noyau d'intégrale singulière est un noyau $K(x, y)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

$$|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|} \qquad |K(x,y) - K(x',y)| \lesssim \frac{|x-x'|^\delta}{(|x-y| + |x'-y|)^{n+\delta}}$$

et la version symétrique en x, y.

Théorème 2.5 *Soit T un opérateur continu de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{S}'$ dont le noyau est un noyau d'intégrale singulière, alors : T est continu de L^2 dans L^2 si et seulement si : - $T(1), T^*(1) \in BMO$ - Petite condition : Pour tout I pavé de $\mathbb{R}^n$:*

$$|\langle < T(1_I), 1_I\rangle| \lesssim |I|^n.$$

On peut donc caractériser la continuité de T, en ne l'étudiant que sur les fonctions caractéristique et essentiellement sur les fonctions constantes !!

Démonstration : Par les paraproduits, on se ramène au cas où $T(1) = T^*(1) = 0$. Alors on utilise des méthodes de cancellation, d'orthogonalité à la Littlewood-Paley ... Dans ce cas, on peut montrer qu'ils sont continus de L^1 dans $L^{1,\infty}$ ainsi que leurs duaux et donc ils sont de type fort (p, p) pour tout $1 < p < \infty$.

Un exemple : les multiplicateurs de Mihlin. Ce sont les multiplicateurs : convolution par ϕ avec :

$$\forall \alpha \qquad \left|\partial^\alpha \widehat{\phi}(\xi)\right| \leq |\xi|^{-|\alpha|}.$$

Un exemple : les commutateurs de Calderon. Ce sont les opérateurs défini par une courbe lipischitzienne :

$$T(f)(x) = \int \frac{A(x) - A(y)}{x - y} f(y) dy.$$

Le calcul pseudo différentiel : Soit T un opérateur continu de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{S}'$ alors il existe un symbôle $\sigma(x, \xi)$ tel que :

$$T(f)(x) = \int e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Proposition 2.6 *Si le symbole est dans la classe* $S^0_{\rho,\delta}$ *c'est à dire :*

$$|\partial_x \alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

alors l'opérateur associé vérifie les conditions du théorème précédent et

$$T(1) = \sigma(x,0) \in L^\infty, \qquad T^*(1) \in BMO.$$

L'opérateur est donc continu sur les L^p*.*

3 Le cas multilineaire

On s'interesse à généraliser les multiplicateurs de Mihlin : soit T un opérateur bilinéaire qui commutte avec les translation simultanées :

$$T(\tau_h f, \tau_h g) = \tau_h T(f,g).$$

Alors, par analogie avec (1) il existe une distribution m telle que :

$$T(f,g) = \int e^{ix(\alpha+\beta)} \widehat{f}(\alpha)\widehat{g}(\beta) m(\alpha,\beta) d\alpha d\beta.$$

Un exemple : la transformée bilinéaire d'Hilbert : $m(\alpha,\beta) = sign(\alpha-\beta)$.

$$T(f,g)(x) = v.p. \int f(x-t)g(x+t)\frac{dt}{t}.$$

Proposition 3.1 *Si* m *est singulier en* 0 *et vérifie les conditions :*

$$\forall a,b \qquad \left|\partial_\alpha^a \partial_\beta^b m(\alpha,\beta)\right| \leq (1+|\alpha|+|\beta|)^{-|a|-|b|}$$

On se ramène au cas des multiplicateurs linéaires de Mihlin, et on montre que T *est continu de* $L^p \times L^q$ *dans* L^r *pour* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *pour tout* $1 < p,q < \infty$*.*

Théorème 3.2 *Si* m *est singulier selon une droite et vérifie les conditions :*

$$\forall a,b \qquad \left|\partial_\alpha^a \partial_\beta^b m(\alpha,\beta)\right| \leq (1+|\alpha-\beta|]^{-|a|-|b|}$$

Alors T *est continu comme précédemment mais uniquement pour* $r > 3/2$*.*

La démonstration est beaucoup plus compliquée ...

Dans le cas de la transformée bilinéaire d'Hilbert, plus généralement si le symbole m s'écrit sous le forme

$$m(\alpha,\beta) = \tilde{m}(\alpha-\beta)$$

où $\tilde{m}$ vérifie les conditions de mihlin. ...