

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES OPÉRATEURS MULTILINÉAIRES ET DES ESPACES DE HARDY.

Frédéric BERNICOT

Thèse sous la direction de P. AUSCHER

Université Paris-Sud

12 Décembre 2007

- Partie 1 : Etude des continuités sur les espaces de Lebesgue pour des opérateurs bilinéaires.
- Partie 2 : Construction abstraite d'espaces de Hardy H^1 .

Importance (et suffisance) des estimations hors-diagonale pour l'étude des continuités des opérateurs.

1 ÉTUDE DES OPÉRATEURS BILINÉAIRES.

- Description du cadre.
- Premier critère.
- Second critère.
- Calcul pseudo-différentiel bilinéaire.
- Perspectives : Des questions à étudier ...

1 Étude des espaces de Hardy

- Introduction
- Construction et définition
- Continuité $H^1 - L^1$ et interpolation.
- Application au problème de régularité maximale.

DESCRIPTION DU CADRE.

Soit T un opérateur bilinéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors il existe une distribution $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$T(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\alpha+\beta)} \sigma(x, \alpha, \beta) \widehat{f}(\alpha) \widehat{g}(\beta) d\alpha d\beta := T_\sigma(f, g)(x).$$

Problème : Pour des exposants $1 < p, q \leq \infty$, trouver des critères “simples” sur σ qui assurent la continuité de T de $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ dans $L^r(\mathbb{R})$ avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Comprendre comment peut-on “perturber” l’inégalité de Hölder ?

PREMIER CRITÈRE.

THÉORÈME (COIFMAN-MEYER [78], BONY [81])

Si $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ vérifie pour tous $b, c \geq 0$

$$\left| \partial_\alpha^b \partial_\beta^c \sigma(\alpha, \beta) \right| \lesssim (|\alpha| + |\beta|)^{-b-c}$$

alors T_σ est continu de $H^p(\mathbb{R}) \times H^q(\mathbb{R})$ dans $L^r(\mathbb{R})$ pour $0 < p, q \leq \infty$ et $0 < r < \infty$.

σ indépendant de $x \Rightarrow$ Paraproducts.

PREMIER CRITÈRE.

THÉORÈME (GRAFAKOS-TORRES [02])

Si $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vérifie pour tous $a, b, c \geq 0$

$$\left| \partial_x^a \partial_\alpha^b \partial_\beta^c \sigma(a, \alpha, \beta) \right| \lesssim (1 + |\alpha| + |\beta|)^{-b-c}$$

alors T_σ est continu de $H^p(\mathbb{R}) \times H^q(\mathbb{R})$ dans $L^r(\mathbb{R})$ pour $0 < p, q \leq \infty$ et $0 < r < \infty$.

Intégrations par parties $\Rightarrow$ Estimations ponctuelles sur le noyau.

PREMIER CRITÈRE.

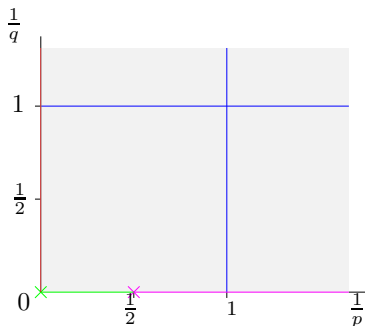
THÉORÈME

Si $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ vérifie pour tous $b, c \geq 0$

$$\left| \partial_\alpha^b \partial_\beta^c \sigma(\alpha, \beta) \right| \lesssim |\lambda_1^m \lambda_2^p| (|\lambda_1 \alpha| + |\lambda_2 \beta|)^{-m-p}$$

alors T_σ est continu de $H^p(\mathbb{R}) \times H^q(\mathbb{R})$ dans $L^r(\mathbb{R})$ pour $0 < p, q \leq \infty$ et $0 < r < \infty$.

Estimations uniformes selon la métrique.



Existence de bornes de continuité uniformes de :

- $H^p \times H^q$ dans L^r
- $L^1 \times H^q, H^p \times L^1$ dans $L^{r, \infty}$ et de $L^1 \times L^1$ dans $L^{1/2, \infty}$
- $H^p \times L^\infty$ dans L^p et de $L^1 \times L^\infty$ dans $L^{1, \infty}$
- L'uniformité est inconnue
- L'uniformité est impossible

FIG.: Estimations uniformes pour $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$.

Démonstration :

$1 < p, q < \infty$: décomposition de Calderón-Zygmund et théorie de Littlewood-Paley ;

$p, q < 1$: décomposition atomique des espaces de Hardy ;

p ou q infini : notion de “mesure de Carleson”.

SECOND CRITÈRE.

On souhaite remplacer la quantité $|\alpha| + |\beta| = d((\alpha, \beta), (0, 0))$ par $d((\alpha, \beta), \Delta)$ où Δ est une droite du plan fréquentiel.

EXEMPLE

La transformée de Hilbert bilinéaire :

$$H(f, g)(x) := v.p. \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(x + t) \frac{dt}{t},$$

donnée par le symbole $\sigma(\alpha, \beta) = \text{sign}(\alpha - \beta)$.

(Lacey-Thiele [97-00], Grafakos-Li [04])

THÉORÈME

Si σ est x -indépendant et vérifie

$$\forall b, c \geq 0 \quad \left| \partial_\alpha^b \partial_\beta^c \sigma(\alpha, \beta) \right| \lesssim (|\alpha - \beta|)^{-b-c} \quad (1)$$

alors T_σ est continu de $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ dans $L^r(\mathbb{R})$ pour $1 < p, q \leq \infty$ et $2/3 < r < \infty$.

(Muscalu-Tao-Thiele [02-04]) et (Gilbert-Nahmod [00-02])

Démonstration : décomposition spatiale et fréquentielle simultanées, utilisation du premier critère, algorithme de temps d'arrêt pour obtenir une partition de l'unité de l'espace temps-fréquence.

ESTIMATIONS HORS-DIAGONALES.

THÉORÈME

Pour tout $\delta \geq 0$ il existe une constante C telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout symbole σ vérifiant (1) et supporté dans $\{(\alpha, \beta), |\alpha - \beta| \geq |I|^{-1}\}$, on ait l'estimation locale suivante :

$$\|T_{\sigma}(f, g)\|_{r, I} \leq C \sum_{k, l \geq 0} 2^{-\delta(k+l)} \|f\|_{p, 2^k I} \|g\|_{q, 2^l I}.$$

- * Principe d'incertitude d'Heisenberg.
- * Estimations en moyenne de décroissances sur le noyau bilinéaire.
- * Résultat pour des symboles dépendant de x .
- * Continuités sur des espaces à poids.

DÉFINITION DES CLASSES DE SYMBOLES.

DÉFINITION (CLASSE DES SYMBOLES BILINÉAIRES.)

Un symbole $\sigma \in C^3(\mathbb{R}^3)$ appartient à la classe $BS_{\theta}^{(0,0)}$ si pour tous $a, b, c \geq 0$,

$$\left| \partial_x^a \partial_{\alpha}^b \partial_{\beta}^c \sigma(x, \alpha, \beta) \right| \leq (1 + |\beta - \tan(\theta)\alpha|)^{-b-c}.$$

Un symbole $\sigma \in C^3(\mathbb{R}^3)$ appartient à la classe $\overline{BS}_{\theta}^{(0,0)}$ si pour tous $a, b, c \geq 0$,

$$\left| \partial_x^a \partial_{\alpha}^b \partial_{\beta}^c \sigma(x, \alpha, \beta) \right| \leq (1 + \min\{|\alpha|, |\beta - \tan(\theta)\alpha|\})^{-b} \\ (1 + \min\{|\beta|, |\beta - \tan(\theta)\alpha|\})^{-c}.$$

- La classe $\overline{BS}_\theta^{(0,0)}$ est stable par composition à droite avec des opérateurs pseudo-différentiels linéaires d'ordre 0.
- On peut caractériser les classes duales en substituant la variable α (ou β) par la variable duale $\alpha + \beta$: $\tan(\theta)$ devient $-1 - \tan(\theta)$ (ou $\cotan(\theta)$ devient $-1 - \cotan(\theta)$).
- Règles de calcul symbolique. Classes de symboles d'ordre (m_1, m_2) .

ACTION SUR LES ESPACES DE SOBOLEV.

THÉORÈME

Pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0, -\pi/4\}$ et $\sigma \in BS_{\theta}^{(0,0)}$ (ou $\overline{BS}_{\theta}^{(0,0)}$), l'opérateur T_{σ} est continu de $L^p \times L^q$ dans L^r pour tous exposants $1 < p, q \leq \infty$ et $2/3 < r < \infty$. De plus, pour tout réel $s \geq 0$, T_{σ} est continu de $W^{s,p} \times W^{s,q}$ dans $W^{s,r}$.

PERSPECTIVES : DES QUESTIONS À EXPLOITER ...

Une étude géométrique.

Une approche purement géométrique pour l'opérateur maximal

$$M(f, g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |f(x-t)g(x+t)| dt.$$

Propriété importante : Le support de $M(f, g)$ et de $H(f, g)$ est contenu dans la somme de Minkowski

$$\text{supp}(f) + \text{supp}(g) = \{x + y, x \in \text{supp}(f) \text{ et } y \in \text{supp}(g)\}.$$

⇒ Faire appel à des outils de combinatoire additive.

Vers des variables bidimensionnelles.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la transformée de Hilbert bilinéaire directionnelle selon un couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par : pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$H_{(u,v)}(f, g)(x) := v.p. \int_{\mathbb{R}} f(x - tu)g(x - tv) \frac{dt}{t}.$$

PROPOSITION

Si (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, alors l'opérateur $H_{(u,v)}$ ne peut pas être continu de $L^p(\mathbb{R}^2) \times L^q(\mathbb{R}^2)$ dans $L^r(\mathbb{R}^2)$ si $r \leq 1$ ou $\infty \in \{p, q\}$.

ÉTUDE DES ESPACES DE HARDY

- ① Étude des opérateurs bilinéaires.
 - Description du cadre.
 - Premier critère.
 - Second critère.
 - Calcul pseudo-différentiel bilinéaire.
 - Perspectives : Des questions à étudier ...

- ① ÉTUDE DES ESPACES DE HARDY
 - Introduction
 - Construction et définition
 - Continuité $H^1 - L^1$ et interpolation.
 - Application au problème de régularité maximale.

QUELQUES ESPACES DE HARDY

- L'espace de Hardy de Coifman-Weiss [70].
 $\implies$ Opérateurs de Calderón-Zygmund.
- Pour L un opérateur sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace H_L^1 suivant :

$$\|f\|_{H_L^1} = \left\| \sup_{t>0} |e^{-t^p L} f| \right\|_{L^1}$$

ou

$$\|f\|_{H_L^1} = \left\| \sup_{t>0} \iint_{|x-y|<t} |(t^p L)e^{-t^p L} e^{-tL} f(y)| \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right\|_{L^1}.$$

Par exemple $L = -\Delta + V$ (J.Dziubanski et J.Zienkiewicz [98-00-05]) avec un potentiel V . Ou $L = -\operatorname{div}(A\nabla)$ (S.Hofmann et S.Mayboroda [07]).

$\implies$ Transformées de Riesz.

MOTIVATIONS

- Ne pas avoir recours à une analyse temps-fréquence par l'espace des tentes.
- Avoir recours au maximum à des informations L^2 .
- Des espaces adaptés à d'autres opérateurs.
- Un critère simple pour déterminer la continuité $H^1 - L^1$ d'un opérateur.
- Des résultats d'interpolation avec les espaces de Lebesgue.
- Étude de l'espace dual.

CADRE

Soit (X, d, μ) un espace de type homogène : cadre général contenant les graphes, les variétés riemanniennes
Pour Q une boule de X , on note $S_i(Q)$ la couronne

$$S_i(Q) := \left\{ x, 2^i \leq 1 + \frac{d(x, c(Q))}{r_Q} < 2^{i+1} \right\}.$$

Les opérateurs de moyenne : $m_{p,E}$.

On choisit une collection $\mathbb{B} := (B_Q)_Q$ d'opérateurs bornés sur $L^2(X)$.

"Les opérateurs B_Q jouent le rôle d'oscillations que l'on peut adapter à un cadre particulier."

MOLECULES ET ATOMES

DÉFINITION

Une ϵ -molécule associée à une boule Q est une fonction $m = B_Q(f_Q)$ avec

$$\forall i \geq 0, \quad \|f_Q\|_{2,S_i(Q)} \leq \left(\mu(2^i Q)\right)^{-1/2} 2^{-\epsilon i}.$$

Un atome associé à une boule est une ϵ -molécule supportée sur Q : une ∞ -molécule.

Les fonctions f_Q sont normalisées dans L^1 .

CONSTRUCTION DE L'ESPACE H^1

DÉFINITION

Une fonction $h \in H^1_{\epsilon, mol}$ si elle admet une décomposition en ϵ -molécules

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i \quad \mu - p.p.$$

avec $\sum_i |\lambda_i| < \infty$. Et alors

$$\|h\|_{H^1_{\epsilon, mol}} := \inf_{h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i m_i} \sum_i |\lambda_i| < \infty.$$

On définit de même l'espace atomique H^1_{ato} .

EXEMPLES

- Espace de Coifman-Weiss avec

$$B_Q(f) = \left[f - \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu \right) \right] \mathbf{1}_Q.$$

- Espace de Hofmann-Mayboroda avec

$$B_Q(f) = (r_Q^2 L)^M e^{-r_Q^2 L}(f).$$

- Problème : tous les espaces de Hardy n'admettent pas de représentation moléculaire aussi simple que la nôtre.

CONTINUITÉ $H^1 - L^1$

THÉORÈME (VERSION ATOMIQUE)

Soit T un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(X)$ tel que :

$$m_{2,S_j(Q)} [T(B_Q(f))] \leq \alpha_j(Q) m_{2,Q}[f],$$

avec les $\alpha_j(Q)$ qui vérifient :

$$\sup_{Q \text{ boule}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty. \quad (2)$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\forall f \in L^2 \cap H_{ato}^1 \quad \|T(f)\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H_{ato}^1}.$$

INTERPOLATION

DÉFINITION

On définit l'opérateur maximal suivant pour $\sigma \in [2, \infty]$:

$$M_{\sigma}(f)(x) := \sup_{\substack{Q \text{ boule} \\ x \in Q}} m_{\sigma,Q} [f - B_Q^*(f)] .$$

EXEMPLE

Dans le cas (correspondant à l'espace de Hardy de Coifman-Weiss) où les B_Q sont exactement les oscillations, pour tout $\sigma \in [2, \infty]$: $M_{\sigma} \leq M_{HL}$.

A l'aide d'une inégalité aux bons λ (Auscher-Martell [07]), on obtient un résultat d'interpolation :

THÉORÈME

Supposons que M_σ soit borné par $M_{HL,2}$. Soit T un opérateur linéarisable borné sur $L^2(X)$ et continu de H_{ato}^1 dans L^1 . Alors pour tout $p \in]\sigma', 2]$ il existe une constante $C = C(p)$ telle que :

$$\forall f \in L^2(X) \cap L^p(X), \quad \|T(f)\|_p \leq C\|f\|_p.$$

- "linéarisable" pour utiliser de la dualité.
- Inégalités d'interpolation.
- Inégalité de Fefferman-Stein.
- Continuité sur des espaces à poids en utilisant les classes de Muckenhoupt et les classes "Reverse Hölder".

RÉSULTAT FINAL.

THÉORÈME

Soit T un opérateur linéarisable borné sur $L^2(X)$ et une collection $\mathbb{B}$ tels que :

$$m_{2,S_j(Q)} [T(B_Q(f))] \leq \alpha_j(Q) m_{2,Q}[f],$$

avec les $\alpha_j(Q)$ vérifiant :

$$\sup_{Q \text{ boule}} \sum_{j \geq 2} \frac{\mu(2^{j+1}Q)}{\mu(Q)} \alpha_j(Q) < \infty$$

et $M_\sigma \lesssim M_{HL,2}$ pour un certain $\sigma \in]2, \infty]$. Alors pour tout $p \in]\sigma', 2]$, l'opérateur T est borné sur $L^p(X)$.

- Ce résultat permet de comprendre le rôle essentiel des estimations $L^2 - L^2$.
- Excepté l'hypothèse de linéarité : Résultat plus fort que celui de Blunck-Kunstmann [03], amélioré par Auscher [07]. On a simplement des décroissances hors-diagonales $L^2 - L^2$ (au lieu de $L^{\sigma'} - L^2$).
- Application aux transformées de Riesz. Intervalle d'exposant optimal.

APPLICATION À LA RÉGULARITÉ MAXIMALE.

Problème de Cauchy sur un espace de type homogène (Y, d_Y, ν) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t), & t \in J, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où $f : J \rightarrow X$ est donnée. La solution s'obtient formellement

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Question : Si $f \in L^q(J, L^p(Y))$, est ce que $\frac{\partial u}{\partial t}$ (et Au) appartiennent à $L^q(J, L^p(Y))$?

(Cannarsa-Vespi [86] ; Hieber-Prüss [97] ;
Couhlon-Duong [00] ; Blunck-Kunstmann [02])

- Condition nécessaire : semi groupe e^{tA} soit analytique.
- Problème équivalent à l'étude de l'opérateur T sur $L^p(J \times Y)$:

$$Tf(t, x) = \int_0^t \left[A e^{(t-s)A} f(s, \cdot) \right] (x) ds.$$

- Semi groupe analytique $\implies T$ borné sur $L^2(J \times Y)$.
(De Simon [64])
- Un critère équivalent a été trouvé avec la notion de R-bornitude (Weis [01]).

On définit notre espace de Hardy associé au problème. On choisit

$$X = J \times Y$$

munit de la mesure produit et de la "quasi"-distance parabolique

$$d((t, x), (u, y)) := \max \left\{ \sqrt{|t - u|}, d_Y(x, y) \right\}.$$

On pose alors

$$B_Q(f)(t, x) := f(t, x) - \int_0^{+\infty} \varphi_r(t - \sigma) e^{r_Q A}(f(\sigma, \cdot))(x) d\sigma.$$

RÉSULTATS.

LEMME (CONTINUITÉ $H^1 - L^1$)

Si le semi groupe vérifie : pour $u \leq 2^{j+1}r$

$$m_{2,S_j(B)} \left[e^{u^2 A}(f) \right] \leq \frac{\nu(B)}{\nu(2^{j+1}B)} \gamma \left(\frac{2^{j+1}r}{u} \right) m_{2,B}[f]$$

et pour $u \geq 2^{j+1}r$

$$m_{2,S_j(B)} \left[e^{u^2 A}(f) \right] \leq \frac{\nu(B)}{\nu(\frac{u}{r}B)} m_{2,B}[f]$$

alors il existe un espace de Hardy H^1 tel que $T : H^1 \rightarrow L^1$.

LEMME (INTERPOLATION)

Pour $p_0 \in]1, 2]$ si il existe $(\beta_j)_{j \geq 0}$ tels que

$$\sum_{j \geq 0} 2^j \beta_j < \infty$$

et

$$m_{p'_0, B} \left[e^{r_Q^2 A^*}(f) \right] \leq \sum_{j \geq 0} \beta_j m_{2, 2^j B}[f].$$

Alors $M_{p'_0}$ est borné par $M_{HL, 2}$

RÉSULTAT FINAL

THÉORÈME

Sous les conditions précédentes, l'opérateur T est borné sur $L^p(J \times Y)$ pour $p \in]p_0, 2]$. Par conséquent le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t), & t \in J, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

vérifie la propriété de régularité maximale dans $L^q(J, L^p(Y))$.

Résultats identiques sur T^* .

QUELQUES PERSPECTIVES.

- Définir de nouveaux espaces de Hardy plus “grands” tels que leurs espaces duaux soient caractérisables par des espaces de type BMO.
- Etudier la dépendance de l'espace $H_{\epsilon, mol}^1$ en fonction du paramètre ϵ et de la définition des molécules.

QUELQUES RÉSULTATS DE DUALITÉ.

Par analogie avec l'espace de Coifman-Weiss, l'espace de Hofmann-Mayboroda (grâce à la dualité dans l'espace des tentes).

DÉFINITION

Espace BMO :

$$\begin{aligned}\|f\|_{BMO} &:= \sup_{Q \text{ boule}} \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |B_Q^*(f)|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &= \left\| M_2^\sharp(f) \right\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

On définit BMO_∞ comme le complété de L^2 avec cette pseudo-norme.

THÉORÈME

On a alors

$$(H_{ato}^1)^* \cap L^2 = BMO_\infty \cap L^2. \quad (3)$$

$$(H_{\epsilon, mol}^1)^* \cap L^2 \subset BMO_\infty \cap L^2. \quad (4)$$

- Sous des hypothèses supplémentaires, inclusion inverse de (4). Par exemple si B_Q ne dépend que du rayon r_Q .
- Sous des hypothèses raisonnables, $(H_{ato}^1)^* \cap L^2$ dense dans $(H_{ato}^1)^*$ pour la topologie faible.

Question : Quel critère pour assurer que $(H_{ato}^1)^*$ soit un espace de fonctions ?