

N° d'ordre : 351

Document de synthèse

Présenté en vue d'obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER LES RECHERCHES

Université Bordeaux 1

Spécialité:

Mathématiques Appliquées

par

Christophe BERTHON

Titre de l'habilitation:

Simulations numériques de quelques problèmes hyperboliques

Soutenue le 11 octobre 2006

après avis de

François BOUCHUT, Directeur de Recherche	CNRS (ENS Paris)
Hervé GUILLARD, Directeur de Recherche	INRIA Sophia-Antipolis
Smadar KARNI, Professeur	Université du Michigan (USA)

devant le jury composé de

Rémi ABGRALL, Professeur	Université Bordeaux 1	
François BOUCHUT, Directeur de Recherche	CNRS (ENS Paris)	
Pierre CHARRIER, Professeur	Université Bordeaux 1	Président
Frédéric COQUEL, Chargé de Recherche	CNRS (Université Paris 6)	
Pierre DEGOND, Directeur de Recherche	CNRS (Université Toulouse 3)	
Hervé GUILLARD, Directeur de Recherche	INRIA Sophia-Antipolis	
Philippe LEFLOCH, Directeur de Recherche	CNRS (Université Paris 6)	
Carlos PARES, Professeur	Université de Malaga (Espagne)	

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à profiter de l'occasion qui m'est donnée pour remercier très sincèrement Rémi Abgrall et Pierre Charrier qui, depuis 1999, m'ont accueilli au sein de leur équipe. Leurs encouragements et leurs conseils ont été précieux et m'ont permis de mener à bien les travaux présentés dans ce mémoire.

Ma reconnaissance va évidemment à Frédéric Coquel à qui je dois énormément. Son contact a été pour moi un enrichissement permanent. Travailler avec Frédéric est toujours un véritable plaisir.

Je souhaite exprimer ma très vive reconnaissance à François Bouchut, Hervé Guillard et Smadar Karni qui ont accepté de rapporter sur ce mémoire. Je suis très honoré qu'ils aient pu donner leur avis de spécialiste sur mes travaux de recherche. Je remercie également Pierre Degond, Philippe LeFloch et Carlos Parés, pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Je remercie Boniface Nkonga pour m'avoir permis d'implémenter les schémas par projection nonlinéaire dans son code de calcul FluidBox. Cette mise en oeuvre informatique a marqué le début d'une collaboration fructueuse.

Je souhaite également remercier chaleureusement Bruno Dubroca pour sa gentillesse et ses qualités humaines. Il a su orienter judicieusement mes recherches. En effet, durant les sept ans passés au MAB, chaque matin Bruno m'a demandé : "Alors, ça relaxe?". Il en résulte qu'aujourd'hui, j'utilise presque exclusivement des schémas de relaxation, schémas que je n'avais pratiquement jamais utilisés avant mon arrivée à Bordeaux. Cependant, depuis quelques semaines, Bruno me dit deux fois par jour : "La relaxation c'est pareil que HLLC!". Serait-ce pour moi le moment d'envisager de nouvelles méthodes d'approximation?

Je remercie infiniment Didier Reignier grâce à qui j'ai réalisé que l'esclavagisme est, chez moi, une seconde nature. Didier a toujours répondu présent avec le sourire lorsqu'il fallait travailler tard le soir pour achever une simulation numérique d'écoulements turbulents.

Certains des travaux constituant ce mémoire n'auraient jamais vu le jour sans mes collaborateurs : M. Baudin, B. Braconnier, M. Breuss, J. Claudel, J. M. Hérard, R. Masson, M. O. Titeux, Q. H. Tran, M. Uhlmann. C'est pour moi une chance d'avoir pu travailler avec eux, qu'ils en soient remerciés.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Modèle multi-entropie et applications [2, 3, 4, 8, 12, 13, 15]	9
2.1	Schéma par projection nonlinéaire [2, 12]	11
2.2	Application à un écoulement multi-fluide [8]	15
2.3	Un écoulement multi-fluide turbulent [4]	16
2.4	Application à un modèle de combustion [3]	17
2.5	Solutions multiples pour des modèles de turbulence [13]	19
3	Quelques applications des schémas de relaxation [5, 7, 9, 16, 22, 24]	23
3.1	Le modèle aux 10 moments [9, 16]	23
3.2	La dynamique des gaz sans pression [7]	28
3.3	Ecoulements pétroliers [5]	31
3.4	Ecoulements multi-fluides [22, 24]	34
4	Autres schémas [1, 14, 17]	35
4.1	Un schéma HLLC 2D pour le transfert radiatif [14, 17]	35
4.2	Schéma VF-Roe pour le modèle R_{ij} [1]	41
5	Robustesse des schémas du second ordre de type MUSCL [6, 10, 11]	43
5.1	Stabilité des schémas MUSCL [6]	46
5.2	Stabilité L^1 du schémas MUSCL-Hancock [11]	48
5.3	Schéma MUSCL pour des maillages 2D non-structurés [10]	51
6	Conclusion et perspectives	55
7	Travaux de l’auteur	57
	Références	59

1 Introduction

L'ensemble des travaux de recherche présentés dans ce document est essentiellement dédié à l'approximation numérique de systèmes hyperboliques. Deux thèmes principaux peuvent être distingués. Dans la première thématique, des systèmes hyperboliques non conservatifs ont été considérés. Ces systèmes sont issus d'un modèle multi-entropie à partir duquel des modèles d'écoulement turbulent de gaz compressibles ou des modèles multi-fluides peuvent être dérivés. La seconde thématique abordée concerne l'approximation numérique de systèmes hyperboliques de lois de conservation. Des schémas de relaxation sont proposés pour plusieurs modèles et une analyse des schémas du second ordre de type MUSCL est proposée. La plupart de ces études ont été réalisées dans le cadre d'une collaboration entre l'Université Bordeaux 1 et le CEA-CESTA. Ces travaux sont répartis en quatre parties.

La première partie est dédiée au modèle multi-entropie ainsi qu'à plusieurs dérivations possibles. Ces modèles, présentés dans la thèse de doctorat de l'auteur, peuvent être compris comme des extensions des équations de Navier-Stokes où le gaz compressible est modélisé par $N \geq 2$ entropies indépendantes. Ce modèle joue un rôle prépondérant dans les simulations numériques d'écoulements compressibles turbulents. Il permet également la dérivation de modèles pour des écoulements multi-fluides turbulents. L'approximation numérique des solutions des systèmes d'EDP gouvernant ces modèles soulève des difficultés majeures relatives à la présence de produits non conservatifs. En effet, par opposition avec les systèmes sous forme conservative, les solutions de type choc visqueux (solutions onde progressive) sont étroitement liées à l'opérateur de diffusion. D'un point de vue numérique, cela sous-entend la nécessité de résoudre finement la couche de choc. Ceci est, bien entendu, hors de portée pour les tailles de maillage habituellement considérées. Une méthode numérique permettant de pallier ce problème est introduite : *le schéma par projection nonlinéaire*. Cette méthode repose sur l'existence d'une relation supplémentaire satisfaite par les solutions régulières du système. Cette relation exprime une dépendance entre les différents taux de dissipation d'entropie. La forme discrète de cette nouvelle relation peut être comprise comme une étape de projection nonlinéaire qui doit compléter les schémas standards par projection L^2 . Les résultats numériques obtenus illustrent l'intérêt de la méthode. Celle-ci est ensuite étendue à plusieurs applications physiques. Des écoulements multifluides turbulents ont ainsi été simulés. Au cours du post-doctorat de D. Reignier, des extensions ont été proposées pour prendre en compte des phénomènes de combustion. Enfin, dans le cadre d'une application à des modèles de turbulence, il est établi l'existence de solutions multiples pour le modèle multi-entropie en présence de terme de relaxation, sous des hypothèses préconisées par la physique.

La seconde partie traite des schémas de relaxation à travers plusieurs applications. Ces schémas permettent d'approcher les solutions faibles de systèmes de lois de conservation. Ces solutions sont approchées par les solutions faibles d'un système, judicieusement

choisi, du premier ordre avec perturbation singulière : le système de relaxation. Suivant les modèles considérés, une des principales difficultés réside dans le choix du modèle de relaxation. En effet, de celui-ci dépendent non seulement la précision de la méthode (bien que du premier ordre) mais aussi la stabilité et la robustesse. La connaissance et l'utilisation d'un système d'EDP sous-jacent au schéma permet également d'obtenir des inégalités discrètes d'entropie ainsi que des principes du maximum. De tels développements sont proposés dans le cadre de la dynamique des gaz sans pression (étude réalisée au cours du post-doctorat de M. Breuss) et pour le modèle aux 10 moments de Levermore. Un autre avantage des schémas de relaxation est la relative simplicité de l'évaluation des flux numériques aux interfaces. Dans la thèse de doctorat de M. Baudin, cet avantage est utilisé pour approcher les solutions d'un modèle d'écoulement pétrolier. Enfin, pour réaliser des simulations d'écoulements multifluides, dans sa thèse de doctorat, B. Braconnier propose des extensions des schémas de relaxation afin d'approcher les solutions faibles de systèmes hyperboliques non conservatifs.

La troisième partie concerne des développements des schémas HLLC et VF-Roe. Dans un premier temps, un schéma HLLC est proposé pour approcher les solutions faibles du modèle M_1 pour le transfert radiatif en deux dimensions d'espace. Dans la dérivation du schéma, une attention particulière est portée sur les propriétés de stabilité tout en assurant une précision de la méthode qui soit suffisante. De plus, dans la limite d'un petit paramètre qui tend vers zéro, il est établi que le comportement asymptotique de la méthode numérique coïncide avec un régime de diffusion satisfait par le modèle. Dans un second temps, un schéma de type VF-Roe est étendu pour l'approximation d'un système hyperbolique non conservatif issu d'un modèle de turbulence.

Dans la dernière partie, les schémas du second ordre de type MUSCL sont étudiés. Afin d'augmenter l'ordre de précision des schémas conservatifs pour des systèmes hyperboliques, une approximation affine par morceaux est considérée. La procédure proposée par van Leer consiste à introduire une reconstruction de pente pour évaluer les inconnues aux interfaces avec un ordre de précision plus élevé. Ces nouvelles approximations sont ensuite utilisées pour calculer les flux numériques aux interfaces. Cette procédure est largement utilisée dans la littérature même si très peu de résultats de stabilité ont été proposés. Dans cette étude, une technique de limitation de pente est introduite et une restriction CFL adéquate est proposée, de sorte à assurer tout un ensemble de propriétés de stabilité pour le schéma MUSCL. Ces résultats sont ensuite étendus à un schéma du second ordre en temps et en espace : le schéma MUSCL-Hancock. Enfin, les schémas MUSCL sont analysés pour des applications bidimensionnelles sur des maillages non structurés. Une fois encore, par le biais d'une restriction CFL et d'une limitation de pente correctes, toute la robustesse nécessaire peut être établie.

2 Modèle multi-entropie et applications [2, 3, 4, 8, 12, 13, 15]

Les systèmes non conservatifs de la forme :

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

soulèvent de nombreuses difficultés tant théoriques que numériques dès lors que la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ ne coïncide pas avec la jacobienne $\nabla \mathbf{f}$ d'une certaine fonction flux $\mathbf{f}(\mathbf{w})$. En effet, le produit non conservatif $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}$ interdit alors toute formulation affaiblie usuelle. En conséquence, le cadre mathématique habituellement considéré pour les systèmes hyperboliques sous forme conservative devient inopérant. Pour les mêmes raisons, le produit non conservatif rend a priori inadéquates les méthodes classiques d'approximations numériques.

Dès lors que la solution présente une discontinuité, ce produit devient ambigu au sens des distributions. Dans la présente étude, les systèmes hyperboliques considérés pourront admettre deux types de discontinuités distinctes : des ondes de choc associées à des champs vraiment non linéaires et des discontinuités de contact associées à des champs linéairement dégénérés. Avec un certain abus de langage, les produits non conservatifs seront supposés ne pas être ambigus pour les discontinuités de contact. Cette hypothèse sera, en fait, systématiquement vérifiée par l'ensemble des applications physiques qui suivent.

Dans le cas de discontinuités de type choc, les produits non conservatifs n'admettent pas de définition unique et ce quelque soit le cadre mathématique adopté (voir LeFloch [86, 87], Dal Maso-LeFloch-Murat [58], Colombeau-LeRoux [54]). Conformément à la théorie des systèmes hyperboliques sous forme non conservative développée par LeFloch [88] (voir également Raviart-Sainsaulieu [103]), il est nécessaire de considérer une autre modélisation incluant des phénomènes dissipatifs et conduisant à une régularisation parabolique effective :

$$\partial_t \mathbf{w}^\epsilon + \mathbf{A}(\mathbf{w}^\epsilon) \partial_x \mathbf{w}^\epsilon = \epsilon \mathbf{R}(\mathbf{w}^\epsilon, \partial_{xx} \mathbf{w}^\epsilon). \quad (2)$$

Plus précisément, des *relations cinétiques* (voir [72, 73]) caractérisent la dynamique des chocs présents dans les solutions faibles du système (1). D'un point de vue numérique, il est immédiat que l'une des principales difficultés réside dans l'approximation de la régularisation parabolique. En effet, comme nous allons le voir dans l'exemple qui suit, la caractérisation des chocs visqueux dépend intrinsèquement du choix de cet opérateur de régularisation.

Considérons le système hyperbolique non conservatif suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x (u + v) = 0, \\ \partial_t v + v \partial_x (u + v) = 0, \end{cases}$$

défini sur $\Omega = \{\mathbf{w} = (u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v > 0\}$. Ce modèle simplifié est issu de modèles bifluïdes en eau peu profonde (cf. Castro et al. [48]). Suivant [15], la régularisation parabolique suivante est introduite :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon \partial_x (u^\epsilon + v^\epsilon) = \epsilon \delta_1 \partial_{xx} (u^\epsilon + v^\epsilon), & \delta_1 > 0, \\ \partial_t v^\epsilon + v^\epsilon \partial_x (u^\epsilon + v^\epsilon) = \epsilon \delta_2 \partial_{xx} (u^\epsilon + v^\epsilon), & \delta_2 > 0, \end{cases}$$

pour considérer les solutions onde progressive. Ce sont des solutions régulières bornées de la forme $\mathbf{w}(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}(x - \sigma t)$ où $\sigma \in \mathbb{R}$ désigne une vitesse de propagation. De plus, $\tilde{\mathbf{w}}$ vérifie : $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{w}}(\xi) = \mathbf{w}_\pm$ où $\mathbf{w}_\pm \in \Omega$. En introduisant une mise à l'échelle $\tilde{\mathbf{w}}_\epsilon(\xi) = \tilde{\mathbf{w}}(\xi/\epsilon)$, lorsque ϵ tend vers zéro, la suite $\mathbf{w}_\epsilon$ tend $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ fortement vers la fonction discontinue

$$\mathbf{w}_0(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_- & \text{si } x < \sigma t, \\ \mathbf{w}_+ & \text{si } x > \sigma t. \end{cases}$$

D'après [109], la fonction $\mathbf{w}_0$ est une solution faible de (1) compatible avec la régularisation parabolique considérée.

Sur cet exemple, il est important de remarquer que pour $\mathbf{w}_-$ et σ donnés, il est possible de déterminer analytiquement l'état $\mathbf{w}_+$:

$$\begin{aligned} v_+ &= \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} (2\sigma - u_- - v_-) + \frac{\delta_1 v_- - \delta_2 u_-}{\delta_1 + \delta_2} e^{2-2(u_-+v_-)/\sigma}, \\ u_+ &= 2\sigma - u_- - (v_- + v_+). \end{aligned}$$

Il est alors clair que le simple choix du paramètre δ_1/δ_2 peut modifier considérablement la valeur de $\mathbf{w}_+$. La capture numérique de la solution discontinue $\mathbf{w}_0$ peut devenir particulièrement délicate sauf à demander une résolution fine des profils de choc. Dans ce sens, le lecteur est renvoyé à Hou-LeFloch [75] ou à Colombeau-Noussair-Perrot [55] où plusieurs situations numériques sont proposées ou encore à Karni [79] où des schémas non conservatifs sont proposés.

Le modèle qui nous motive ici est une extension des équations de Navier-Stokes où le gaz est modélisé par $N \geq 2$ pressions indépendantes p_i . A chaque pression est associée une entropie spécifique s_i et une énergie interne e_i . Dans un souci de simplicité, N est fixé à 2. Le modèle est gouverné par le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p_1(\tau, e_1) + p_2(\tau, e_2)) = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2) \partial_x u), \\ \partial_t \rho e_j + \partial_x \rho e_j u + p_j(\tau, e_j) \partial_x u = \mu_j (\partial_x u)^2, \quad j = 1, 2, \end{cases} \quad (3)$$

avec $\tau = 1/\rho$ et où l'espace des états est donné par

$$\Omega = \{\mathbf{w} := (\rho, \rho u, \rho e_1, \rho e_2)^T \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho e_1 > 0, \rho e_2 > 0\}.$$

Chaque pression p_j est supposée vérifier la seconde loi de la thermodynamique. En conséquence, il existe une entropie spécifique s_j et une température T_j telles que

$$-T_j ds_j = de_j + p_j d\tau, \quad j = 1, 2.$$

L'application $(\tau, e_j) \rightarrow s_j(\tau, e_j)$, $1 \leq j \leq 2$, est supposée convexe. De plus et comme il est d'usage pour les gaz mono-pressions, nous imposons pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_j}{\partial \tau}(\tau, e_j) &= -\frac{p_j(\tau, e_j)}{T_j(\tau, e_j)} < 0, & \frac{\partial s_j}{\partial e_j}(\tau, e_j) &= -\frac{1}{T_j(\tau, e_j)} < 0, \\ \lim_{e_j \rightarrow 0+} s_j(\tau, e_j) &= +\infty, & \lim_{e_j \rightarrow +\infty} s_j(\tau, e_j) &= -\infty. \end{aligned}$$

Le système (3) n'admet pas de forme conservative associée, sauf sous des hypothèses restrictives qui ne seront pas considérées ici. Cependant, une loi de conservation supplémentaire, satisfaite par les solutions régulières, peut être écrite :

$$\partial_t \rho E(\mathbf{w}) + \partial_x (\rho E(\mathbf{w}) + p_1(\tau, e_1) + p_2(\tau, e_2))u = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2)u \partial_x u).$$

Cette loi de conservation supplémentaire gouverne l'évolution de l'énergie totale ρE :

$$\rho E(\mathbf{w}) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \rho e_1 + \rho e_2.$$

Il est également possible d'établir des inégalités d'entropie :

$$\partial_t \rho s_j(\mathbf{w}) + \partial_x \rho s_j(\mathbf{w})u = -\frac{\mu_j}{T_j}(\partial_x u)^2 \leq 0, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Il en résulte que les solutions régulières de (3) vérifient la relation suivante :

$$\mu_2 T_1 (\partial_t \rho s_1(\mathbf{w}) + \partial_x \rho s_1(\mathbf{w})u) - \mu_1 T_2 (\partial_t \rho s_2(\mathbf{w}) + \partial_x \rho s_2(\mathbf{w})u) = 0. \quad (5)$$

Cette dernière relation exprime clairement que les taux de dissipation d'entropie ne sont pas indépendants les uns des autres. Cette relation joue un rôle prépondérant lors de l'approximation numérique des solutions de (3).

Pour conclure cette brève présentation du modèle multi-entropie, notons que l'existence et l'unicité des solutions onde progressive peuvent être prouvées.

2.1 Schéma par projection nonlinéaire [2, 12]

Ce travail a été réalisé pendant la thèse de doctorat de l'auteur. L'article [12] reprend et détaille l'article [2] publié en l'honneur du 60^{ième} anniversaire de Phil Roe.

Une méthode est ici proposée pour approcher les solutions de (3). Le principal objectif est de pouvoir approcher les couches de choc sur un maillage grossier, i.e. sans résoudre

finement la régularisation parabolique. Le schéma qui va être proposé repose sur le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p_1 + p_2) = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p_1 + p_2) u = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2) u \partial_x u), \\ \mu_1 T_2 \left\{ \partial_t \rho s_2 + \partial_x \rho s_2 u \right\} - \mu_2 T_1 \left\{ \partial_t \rho s_1 + \partial_x \rho s_1 u \right\} = 0. \end{cases}$$

Dans le souci de simplifier les notations, nous posons $\mathbf{v} = (\rho, \rho u, \rho E, \rho s_2)$. Il est important de souligner qu'ici l'entropie s_1 doit être comprise comme une fonction de $\mathbf{v}$.

En considérant un maillage uniforme de pas Δx , la solution à la date t^n est approchée par une fonction constante par morceaux : $\mathbf{v}^h(x, t^n) = \mathbf{v}_i^n$ pour $x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$. Pour faire évoluer en temps cette approximation, une méthode à trois pas est adoptée.

Lors du premier pas ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$), le système hyperbolique suivant est considéré :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p_1 + p_2) = 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p_1 + p_2) u = 0, \\ \partial_t \rho s_2 + \partial_x \rho s_2 u = 0, \end{cases} \quad (6)$$

complété par l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \{\rho s_1\}(\mathbf{v}) + \partial_x \{\rho s_1 u\}(\mathbf{v}) \leq 0.$$

Un schéma volume fini est alors considéré. Ce schéma doit être entropique et vérifier un principe du maximum sur l'entropie spécifique (cf. Tadmor [115]). Différents schémas vérifient de telles propriétés, certains schémas de relaxation par exemple (voir Bouchut [37]). Nous considérons ici le schéma de Godunov (voir Godlewski-Raviart [67], Leveque [85], Toro [116]) :

$$\mathbf{v}_i^{n+1,=} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \mathbf{f}(\omega(0^+; \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)) - \mathbf{f}(\omega(0^+; \mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) \right\},$$

où $\mathbf{f}$ désigne la fonction flux de (6) et $\omega(\cdot; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ la solution exacte du problème de Riemann pour le système (6). Le pas de temps Δt est restreint à la condition CFL suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_j(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}, \quad (7)$$

pour tous les états $\mathbf{v}$ en considération, et où λ_j désignent les valeurs propres de la jacobienne du flux $\mathbf{f}$.

Lors du second pas ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$), l'opérateur du second ordre est pris en compte. Le système suivant est alors approché :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E = \partial_x ((\mu_1 + \mu_2) u \partial_x u), \\ \partial_t \rho s_2 = -\frac{\mu_2}{T_2} (\partial_x u)^2, \end{cases}$$

avec pour donnée initiale l'approximation $\mathbf{v}_i^{n+1,=}$ issue du premier pas. Les formules d'approximation suivantes sont proposées :

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1,-} &= \rho_i^{n+1,=}, \\ (\rho u)_i^{n+1,-} &= (\rho u)_i^{n+1,=} + \Delta t \overline{\partial_x((\mu_1 + \mu_2)\partial_x u)_i}^{n+1,-}, \\ (\rho E)_i^{n+1,-} &= (\rho E)_i^{n+1,=} + \Delta t \overline{\partial_x((\mu_1 + \mu_2)u\partial_x u)_i}^{n+1,-}, \\ (\rho s_2)_i^{n+1,-} &= (\rho s_2)_i^{n+1,=} - \Delta t \overline{\frac{\mu_2}{T_2}(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-},\end{aligned}$$

où les opérateurs de discrétisation de la diffusion trouvent les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{\partial_x((\mu_1 + \mu_2)\partial_x u)_i}^{n+1,-} &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\Delta x^2} (M^n u_{i+1} - 2M^n u_i + M^n u_{i-1}), \\ \overline{\partial_x(\mu_1 + \mu_2)u\partial_x u_i}^{n+1,-} &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\Delta x^2} ((M^n u_{i+1})^2 - 2(M^n u_i)^2 + (M^n u_{i-1})^2), \\ \overline{\frac{\mu_2}{T_2}(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} &= \frac{\mu_2}{2\overline{T_2}_i^{n+1,-} \Delta x^2} ((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2),\end{aligned}\tag{8}$$

avec $M^n u_i = (u_i^{n+1,-} + u_i^{n+1,=})/2$. La discrétisation suivante est adoptée pour la température :

$$\overline{T_2}_i^{n+1,-} = \begin{cases} T_2 \left(\frac{1}{\rho_i^{n+1,-}}, (s_2)_i^{n+1,-} \right), & \text{si } (s_2)_i^{n+1,-} = (s_2)_i^{n+1,=}, \\ -\frac{\epsilon_2 \left(\frac{1}{\rho_i^{n+1,-}}, (s_2)_i^{n+1,-} \right) - \epsilon_2 \left(\frac{1}{\rho_i^{n+1,=}}, (s_2)_i^{n+1,=} \right)}{(s_2)_i^{n+1,-} - (s_2)_i^{n+1,=}}, & \text{sinon.} \end{cases}\tag{9}$$

Les fonctions viscosités μ_1 et μ_2 ont, ici, été supposées constantes. L'extension à des viscosités variables ne soulève pas de difficulté majeure.

Notons qu'à la fin du second pas, les propriétés de stabilité imposées à la fin du premier pas (inégalités d'entropie et principe du maximum sur l'entropie spécifique) sont préservées.

Cette formulation à deux pas constitue le schéma par projection L^2 . Les résultats numériques obtenus avec ce schéma se sont révélés très décevants et un troisième pas correctif a donc été ajouté.

L'étape de projection nonlinéaire ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$) a pour objectif de forcer le bilan d'entropie (5) au niveau discret. Au cours de ce pas, les variables conservatives sont préservées :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-}, \quad (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1,-}, \quad (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^{n+1,-}.$$

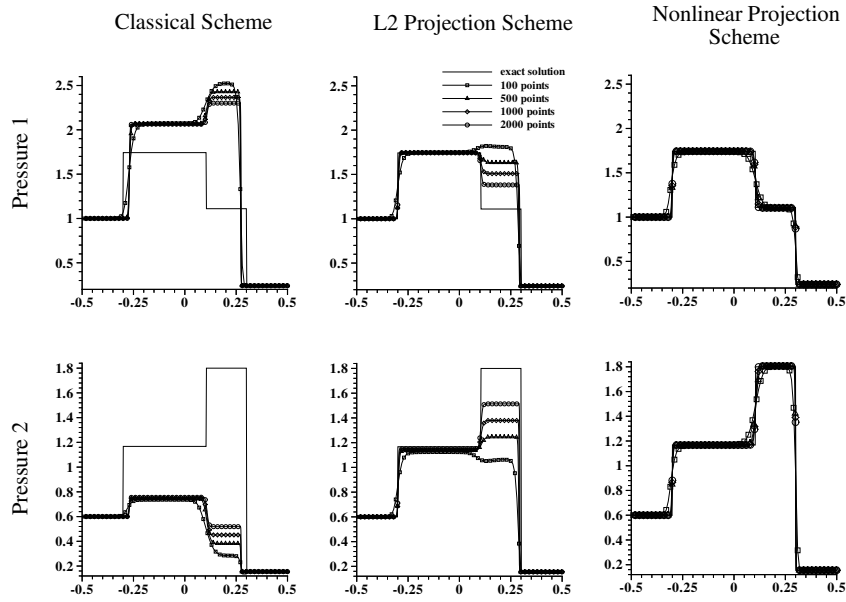


FIG. 1 – Comparaison entre un schéma classique, un schéma par projection L^2 et un schéma par projection nonlinéaire lors de l'approximation de couche de choc.

Concernant la variable $(\rho s_2)_i^{n+1}$, elle est solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mu_2 \overline{T_1}_i^{n+1,-} \left(\{\rho s_1\}(\mathbf{v}_i^{n+1}) - (\rho s_1)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \{\rho s_1 u\}_{i+1/2}^n - \{\rho s_1 u\}_{i-1/2}^n \right\} \right) - \\ \mu_1 \overline{T_2}_i^{n+1,-} \left((\rho s_2)_i^{n+1} - (\rho s_2)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \{\rho s_2 u\}_{i+1/2}^n - \{\rho s_2 u\}_{i-1/2}^n \right\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

où $\{\rho s_2 u\}_{i+\frac{1}{2}}^n$ est la fonction flux numérique pour la variable ρs_2 issue du premier pas et $\{\rho s_1 u\}_{i+\frac{1}{2}}^n$ est le flux d'entropie numérique issu, également, de la première étape. Il est possible d'établir l'existence et l'unicité de $(\rho s_2)_i^{n+1}$ solution de (10).

Le schéma par projection nonlinéaire, constitué des trois pas, préserve toutes les propriétés de stabilité satisfaites lors du premier pas : inégalités d'entropie et principe du maximum sur l'entropie spécifique.

Pour illustrer la méthode, la figure 1 présente les résultats obtenus avec les schémas par projection L^2 et par projection nonlinéaire. Notons que les solutions numériques ont été comparées à la solution exacte obtenue par l'intégration numérique des solutions onde progressive de (1).

2.2 Application à un écoulement multi-fluide [8]

Le modèle multi-entropie (1) est à présent étendu pour la simulation d'écoulements multi-fluides. Suivant [26, 28, 77, 78, 25, 81], travaux dédiés à la simulation de tels écoulements, on note n_p le nombre de constituants dans l'écoulement. A chaque composant est associée une densité partielle ρ_j , une fraction volumique spécifique v_j , une fraction massique Y_j vérifiant $\sum_j Y_j = 1$. L'énergie interne de chaque composant est notée $e_j := e_j(v_j, p_j)$ où p_j est la pression du constituant j . On note μ_j la viscosité de chaque composant et on pose

$$\tilde{\mu}_j = \mu_j Y_j \quad \text{et} \quad \mu = \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{\mu}_j.$$

On introduit alors le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_t Y_j + u \partial_x Y_j = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = \partial_x(\mu \partial_x u), \\ \partial_t(\rho_j e_j) + \partial_x(\rho_j e_j u) + p_j \partial_x u = \tilde{\mu}_j (\partial_x u)^2, \quad 1 \leq j \leq n_p, \end{cases} \quad (11)$$

où $p = \sum_j p_j$ et où la densité totale est définie par $1/\rho = \sum_j Y_j v_j$. Chaque composant est supposé vérifier une loi de gaz parfait, de sorte qu'une entropie spécifique $s_j = \log(\rho^{\gamma_j}/p_j)$ puisse être obtenue pour chaque gaz avec γ_j le coefficient adiabatique du gaz j . Le système (11) peut alors se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho Y_j + \partial_x \rho Y_j u = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p) = \partial_x(\mu \partial_x u), \\ \partial_t E + \partial_x(E + p)u = \partial_x(\mu u \partial_x u), \\ \frac{\beta_{n_p}}{T_{n_p}} \{ \partial_t \rho s_j + \partial_x \rho s_j u \} - \frac{\beta_j}{T_j} \{ \partial_t \rho s_{n_p} + \partial_x \rho s_{n_p} u \} = 0, \quad 1 \leq j \leq n_p - 1, \end{cases} \quad (12)$$

où $E = \rho u^2/2 + \sum_j \rho_j e_j$ désigne l'énergie totale. Notons également que l'entropie s_{n_p} est une fonction des autres variables et trouve la définition suivante :

$$s_{n_p} = -\log \left(\frac{\gamma_{n_p} - 1}{\rho^{\gamma_{n_p}}} \left(E - \rho \frac{u^2}{2} - \sum_{j=1}^{n_p-1} \frac{\rho^{\gamma_j}}{\gamma_j - 1} e^{-s_j} \right) \right).$$

Les paramètres β_j sont alors définis par $\beta_j = \mu_j / \sum_j \mu_j$.

On reconnaît immédiatement dans le système (12), un modèle multi-entropie de la forme (1) complété par des lois de conservation gouvernant Y_j . En conséquence, un schéma par projection nonlinéaire est adopté pour l'approximation des solutions du système (12).

Une des originalités de ce modèle réside dans la possibilité de choisir arbitrairement les fonctions viscosités afin d'obtenir une caractérisation adéquate de l'interface entre deux

fluides. A titre d'exemple, dans la simulation bifluide présentée ci-après, le choix suivant a été adopté :

$$\mu_j = (Y_j T_j)^{m_j} \bar{\mu}_j,$$

où $m_j > 0$ est une constante fixée et $\bar{\mu}_j > 0$ reste à déterminer (par exemple une constante proche de la viscosité physique du gaz considéré).

Ce modèle a été utilisé pour réaliser une simulation d'interaction choc-bulle proposé par Quirk-Karni [102]. Un choc se propage initialement dans un gaz de densité $\rho = 1$, puis percute une bulle de réfrigérant R22 dont la densité est $\rho = 3.154$. Les résultats numériques obtenus, présentés dans la figure 2, sont en accord avec les expérimentations physiques réalisées par Haas-Sturtevant [71].

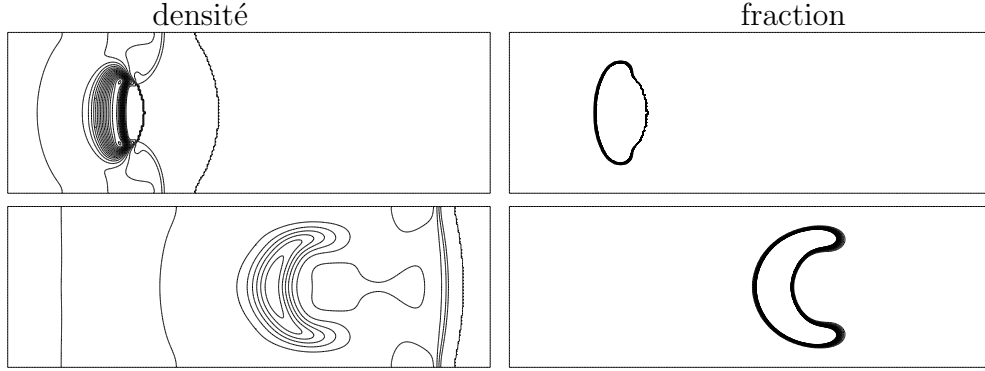


FIG. 2 – Densité et interface au cours de l'interaction entre un choc de vitesse 1.22 et une bulle de gaz R22 [102]. Solution aux dates $47\mu s$ et $94\mu s$.

2.3 Un écoulement multi-fluide turbulent [4]

Le modèle multi-fluide précédent (11) est étendu pour des écoulements turbulents. Le modèle suivant est alors considéré :

$$\begin{cases} \partial_t Y_j + u \partial_x Y_j = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t (\rho_j e_j) + \partial_x (\rho_j e_j u) + p_j \partial_x u = \tilde{\mu}_j (\partial_x u)^2 + \rho_j \epsilon, \quad 1 \leq j \leq n_p, \\ \partial_t \rho k + \partial_x \rho k u + \frac{2}{3} \rho k \partial_x u = \mu_\tau (\partial_x u)^2 - \rho \epsilon, \\ \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u + \frac{2}{3} C_1 \rho \epsilon \partial_x u = C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2 - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes du modèle et $\mu_\tau = C_\mu \rho k^2 / \epsilon$ désigne la viscosité turbulente (voir Mohammadi-Pironneau [96]). Après calcul, ce modèle peut s'écrire sous la forme d'un

modèle multi-entropie en présence de termes sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho Y_j + \partial_x \rho Y_j u = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = \partial_x (\mu \partial_x u), \\ \partial_t E + \partial_x (E + p)u = \partial_x (\mu u \partial_x u), \\ \frac{\beta_{n_p}}{T_{n_p}} \{ \partial_t \rho s_j + \partial_x \rho s_j u \} - \frac{\beta_j}{T_j} \{ \partial_t \rho s_{n_p} + \partial_x \rho s_{n_p} u \} = 0, \quad 1 \leq j \leq n_p - 1, \\ \frac{\mu_{n_p}}{T_{n_p}} \{ \partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u \} - Y_{n_p} \mu_\tau \frac{2/3}{\rho^{2/3}} \{ \partial_t \rho s_{n_p} + \partial_x \rho s_{n_p} u \} = \frac{\rho \epsilon}{T_{n_p}} \frac{2/3}{\rho^{2/3}} (\mu_{n_p} - Y_{n_p} \mu_\tau), \\ \partial_t \rho^{\frac{k C_1}{\epsilon}} + \partial_x \rho^{\frac{k C_1}{\epsilon}} u = (C_2 - C_1) \rho k^{C_1 - 1}, \end{array} \right.$$

où l'entropie turbulente s_τ trouve la définition suivante : $s_\tau = \frac{2}{3} \frac{\rho k}{\rho^{5/3}}$.

On reconnaît une fois encore le modèle multi-entropie (1) mais cette fois en présence de termes sources. Le schéma par projection non linéaire est appliqué et complété par une discrétisation explicite standard des termes sources.

Afin d'illustrer la méthode, une instabilité de Richtmeyer-Meshkov a été simulée. Initialement, deux fluides sont séparés par une interface présentant une petite oscillation. Cette interface est ensuite perturbée par une onde de choc. Les résultats numériques sont présentés dans la figure 3. La comparaison entre le modèle laminaire et le modèle turbulent montre que le développement de l'instabilité est plus rapide en présence de turbulence.

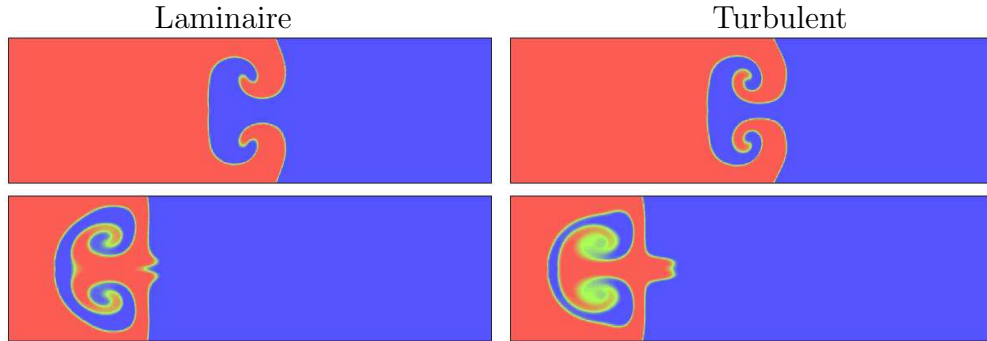


FIG. 3 – Influence de la turbulence sur le comportement d'une instabilité de Richtmeyer-Meshkov. Solutions aux dates $t = 1.05 \text{ ms}$ et $t = 2.33 \text{ ms}$.

2.4 Application à un modèle de combustion [3]

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Post-doc de D. Reignier (financement CEA). Dans cette étude, un écoulement turbulent réactif (voir Baurle-Girimaji [33]) est consi-

déré. Avec des notations standards, le modèle est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho C_j + \partial_x \rho C_j u = \partial_x ((\rho D + \rho D_t) \partial_x C_j), & 1 \leq j \leq N, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + \frac{2}{3} \rho k) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t E + \partial_x (E + p + \frac{2}{3} \rho k) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t \rho k + \partial_x \rho k u + \frac{2}{3} \rho k \partial_x u = \mu_\tau (\partial_x u)^2, \\ \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u + \frac{2}{3} C_{\epsilon 1} \rho \epsilon \partial_x u = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho k_h + \partial_x \rho k_h u = \partial_x (\frac{\lambda_t}{C_p} \partial_x k_h) + 2 \frac{\lambda_t}{C_p} (\partial_x p^*)^2, \\ \partial_t \rho Q + \partial_x \rho Q u = \partial_x (\rho D_t \partial_x Q) + 2 \frac{\lambda_t}{S_{ct}} \sum_{1 \leq j \leq N} (\partial_x C_j)^2, \end{cases} \quad (14)$$

où la pression vérifie une loi de gaz parfait

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2}{2} - \rho k \right), \quad \gamma \in (1, 3],$$

et où la définition $p^* = p + \frac{2}{3} \rho k$ a été considérée. Les quantités C_j désignent les fractions massiques de chaque constituant tandis que k_h désigne la variance de l'enthalpie et Q la variance de fraction massique. Ici, notons qu'aucun terme source n'a été pris en compte; termes sources relatifs à la turbulence mais aussi à la combustion (voir Baurle-Girimaji [33] pour de plus amples détails sur les modèles de PDF). Dans la continuité des sections précédentes, notre objectif est ici de proposer une méthode d'approximation capable de prendre en compte l'opérateur parabolique sans avoir recours à un maillage fin.

Afin de proposer un schéma de discrétisation adéquat, il est important de noter que le système (13) est indépendant du système (14). De plus, le système (13) entre clairement dans le cadre du modèle multi-entropie (voir les sections précédentes). En conséquence, une méthode par projection nonlinéaire est adoptée pour la discrétisation de (13).

Concernant le système (14), seuls les termes de production $(\partial_x p^*)^2$ et $(\partial_x C_j)^2$ soulèvent une réelle difficulté d'approximation. Les termes modélisant le transport sont discrétisés par une méthode volume fini de Godunov, au même titre que l'opérateur hyperbolique extrait de (13). Dans un premier temps, on remarque l'identité suivante :

$$(\partial_x C_j)^2 = -\frac{1}{\rho D + \rho D_t} \left\{ \left(\partial_t \rho \frac{C_j^2}{2} + \partial_x \rho \frac{C_j^2}{2} u \right) - \partial_x ((\rho D + \rho D_t) C_j \partial_x C_j) \right\}.$$

Cette identité établit clairement que la diffusion de Q est directement issue de la production d'entropie $\rho C_j^2/2$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} & (\rho D + \rho D_t) \{ \partial_t \rho Q + \partial_x \rho Q u - \partial_x (\rho D_t \partial_x Q) \} + \\ & 2 \frac{\lambda_t}{S_{ct}} \sum_{1 \leq j \leq N} \left\{ \partial_t \rho \frac{C_j^2}{2} + \partial_x \rho \frac{C_j^2}{2} u - \partial_x ((\rho D + \rho D_t) C_j \partial_x C_j) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

identité en étroite corrélation avec (5). La méthode par projection nonlinéaire est alors aisément étendue pour discrétiser (15) où la forme discrète des opérateurs de diffusion

trouve une formule similaire à celle proposée dans (8). Dans un second temps, nous notons une relation formelle de proportionnalité, valide dans les couches de choc, entre $(\partial_x p^\star)^2$, taux de production de k_h , et $(\partial_x u)^2$, taux de production d'entropie. En effet, il est possible d'établir l'existence d'une fonction Θ des inconnues telle que, dans une couche de choc, la relation suivante soit satisfaite :

$$\begin{aligned} (\partial_x p^\star)^2 &= \Theta(\mathbf{w})(\partial_x u)^2, \\ &= \Theta(\mathbf{w}) \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{\mu} \left\{ \partial_t \rho \frac{p}{\rho^\gamma} + \partial_x \rho \frac{p}{\rho^\gamma} u \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Cette dernière identité permet de proposer une formule de discrétisation adéquate pour $(\partial_x p^\star)^2$ en invoquant les mêmes arguments que ceux utilisés pour discrétiser $(\partial_x C_j)^2$.

2.5 Solutions multiples pour des modèles de turbulence [13]

Ce travail a été réalisé pendant la thèse de doctorat de l'auteur.

Cette étude, concernant le modèle multi-entropie, porte sur le comportement des solutions onde progressive lorsque les termes sources du modèle sont pris en compte. Le modèle ici considéré s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p_1 + p_2) = \partial_x ((\mu_1(\rho, T_1) + \mu_2(\rho, T_2)) \partial_x u), \\ \partial_t p_1 + \partial_x p_1 u + (\gamma_1 - 1) p_1 \partial_x u = (\gamma_1 - 1) \mu_1(\rho, T_1) (\partial_x u)^2 + (\gamma_1 - 1) \rho \epsilon(T_2), \\ \partial_t p_2 + \partial_x p_2 u + (\gamma_2 - 1) p_2 \partial_x u = (\gamma_2 - 1) \mu_2(\rho, T_2) (\partial_x u)^2 - (\gamma_2 - 1) \rho \epsilon(T_2). \end{cases} \quad (17)$$

Les températures vérifient $p_i = (\gamma_i - 1) \rho T_i$ où les coefficients adiabatiques satisfont $1 < \gamma_1 < \gamma_2$. Le terme source doit satisfaire

$$\begin{aligned} \epsilon(T_2) &> 0 \text{ pour tout } T_2 > 0 \text{ avec } \lim_{T_2 \rightarrow 0^+} \epsilon(T_2) = 0, \\ \epsilon &\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \text{ avec } \lim_{T_2 \rightarrow 0^+} \frac{d}{dT_2} \epsilon(T_2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Le rôle de ce terme source est de relaxer la pression p_2 vers 0. Sur ces considérations, l'espace des phases suivant est introduit :

$$\Omega = \left\{ \mathbf{w} = {}^t(\rho, \rho u, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 / \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, p_1 > 0, p_2 \geq 0 \right\}.$$

De plus, les viscosités sont supposées vérifier $\mu_1 + \mu_2 > 0$.

Notons dès à présent que ce modèle entre dans le cadre des modèles de turbulence à une équation de transport où μ_1 désigne la viscosité laminaire et μ_2 la viscosité turbulente. On retrouve alors les modèles dits de longueur de mélange (cf. Mohammadi-Pironneau [96], Hirsh [74]) dès que la température T_2 coïncide avec l'énergie cinétique turbulente k

pour $\gamma_2 = 5/3$. Le terme source de relaxation trouve alors la forme suivante : $\epsilon(k) = \mathcal{L}k^{3/2}$, $\mathcal{L} > 0$, qui désigne le taux de dissipation de k .

Dans cette étude, la viscosité μ_1 est supposée régulière et appartenir à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. En général, les viscosités μ_2 préconisées par la physique ne vérifient pas une telle propriété de régularité mais satisfont la limite suivante :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \mu_2(\rho, y) = 0. \quad (19)$$

Les choix de viscosité μ_2 proposés dans la littérature sont différentiables sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$ mais pas pour $y = 0$. Pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ fixé, μ_2 admet un comportement en $\mathcal{O}(y^\alpha)$ pour $y > 0$ assez petit. Si la régularité de μ_2 ne peut pas être satisfaite au voisinage de $y = 0$, μ_2 vérifie les trois propriétés suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\mu_2(\rho, y)}{y^\alpha} = h(\rho) > 0, \quad \rho > 0, \quad (20)$$

$$(\rho, z) \in (0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \Phi(\rho, z) = \mu_2(\rho, z^{\frac{1}{1-\alpha}}) \in \mathbb{R}^+ \text{ est Lipschitz continue,} \quad (21)$$

$$(\rho, z) \in (0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \Psi(\rho, z) = \frac{\mu_2(\rho, z^{\frac{1}{1-\alpha}})}{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \in \mathbb{R}^+ \text{ est Lipschitz continue.} \quad (22)$$

Sous ces hypothèses satisfaites par μ_2 , le terme de relaxation est supposé vérifier :

$$\begin{aligned} \epsilon(y) > 0 \quad \text{pour tout } y > 0 \quad \text{avec} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon(y)}{y^\alpha} = 0, \\ y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \frac{\epsilon(y)}{y^\alpha} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{est Lipschitz continue.} \end{aligned} \quad (23)$$

Nous nous intéressons à présent aux solutions onde progressive qui sont, rappelons le, des solutions régulières dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \Omega)$ de la forme $\mathbf{w}(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}(x - \sigma t)$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$ et qui vérifient

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{\mathbf{w}}(\xi) = \mathbf{v}_L, & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{w}}(\xi) = \mathbf{v}_R, & \xi = x - \sigma t, \\ \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{w}}'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{w}}''(\xi) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

avec $\mathbf{w}_L$ et $\mathbf{w}_R$ dans Ω . Il est important de souligner que la condition (24) ne peut être satisfaite que si les termes sources s'annulent aux infinis, ce qui revient à imposer $(p_2)_L = 0$ et $(p_2)_R = 0$. Le résultat suivant est alors établi

Theorem 2.1. *Soit $\mathbf{w}_L \in \Omega$ avec $(p_2)_L = 0$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ la vitesse de propagation de l'onde progressive, supposée vérifier la condition de Lax :*

$$u_L - \sqrt{\frac{\gamma_1(p_1)_L}{\rho_L}} > \sigma.$$

- i) Supposons que les viscosités μ_1 et μ_2 appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et que le terme de relaxation $\epsilon(T_2)$ vérifie (18). Alors il existe une unique solution onde progressive (définie à une translation près) qui connecte $\mathbf{w}_L$ à un état $\mathbf{w}_R \in \Omega$ avec $(p_2)_R = 0$.
- ii) Supposons que seule la viscosité μ_1 soit dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tandis que μ_2 vérifie (19)-(22), et supposons que $\epsilon(T_2)$ vérifie (23). Alors il existe une infinité de solutions onde progressive qui connectent $\mathbf{w}_L$ à un état $\mathbf{w}_R \in \Omega$ avec $(p_2)_R = 0$.

A titre d'exemple, le choix le plus usuellement considéré, $\mu_2(\rho, y) = C\rho y^{\frac{1}{2}}$, satisfait (19)-(22) pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Le taux de dissipation de la turbulence donné par $\epsilon(T_2) = \mathcal{L}y^{3/2}$, vérifie (23) avec, une fois encore, $\alpha = \frac{1}{2}$. En conséquence, ce modèle standard admet une infinité de solutions onde progressive.

3 Quelques applications des schémas de relaxation [5, 7, 9, 16, 22, 24]

Les schémas de relaxation sont des méthodes numériques récentes qui ont été introduites sous cette terminologie par Jin-Xin [76]. Cependant, il ne faut pas omettre certains articles antérieurs invoquant des idées similaires (Suliciu [113, 114] par exemple).

Motivé par les travaux de Liu [94] et Chen-Levermore-Liu [50], l'idée de base de la construction de ces schémas repose sur l'introduction d'un système d'équations aux dérivées partielles adéquat avec perturbation singulière : *le modèle de relaxation*. Les solutions de ce modèle doivent approcher, dans un sens à préciser, les solutions du système de lois de conservation initial, souvent appelé *système à l'équilibre*. Le lecteur est renvoyé à Aregba-Natalini [30] et Natalini [97] où une analyse de ce problème est proposée dans le cas des équations scalaires.

Le choix du modèle de relaxation est particulièrement important puisque de celui-ci dépendent la précision, la robustesse et la stabilité de la méthode (cf. Jin-Xin [76], Bouchut [37], Coquel-Perthame [57]). Certains choix de modèles de relaxation permettent de retrouver des méthodes volume fini plus standard telles que le schéma de Lax-Friedrichs ou encore le schéma HLLC (voir Bouchut [37] où les correspondances entre les schémas de relaxation et d'autres méthodes sont proposées). Notons que la connaissance du modèle de relaxation sous-jacent à un schéma numérique s'avère très utile pour établir des propriétés de stabilité telles que la préservation numérique de l'invariance de l'espace des états admissibles ou encore pour établir des inégalités discrètes d'entropie. Pour les équations d'Euler 3×3 , Bouchut [36] puis Chalons [52], avec des extensions au modèle multi-entropie, établissent des propriétés de stabilité en invoquant deux approches distinctes. Ces résultats sont ici étendus à d'autres modèles.

3.1 Le modèle aux 10 moments [9, 16]

La note [16] est une annonce de [9].

Lorsque l'équilibre cinétique local n'est plus vérifié, les équations d'Euler ne sont pas valides et d'autres alternatives doivent être proposées. Récemment, Levermore [92] a développé une hiérarchie de modèles aux moments. Le modèle le plus simple de cette hiérarchie correspond, bien entendu, aux équations d'Euler. Un second modèle, formé de dix équations, a ensuite été étudié par Levermore-Morokoff [93] : *le modèle aux 10 moments*.

Ecrit en une dimension d'espace, le modèle aux 10 moments est gouverné par le système

suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u_1) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t(\rho u_1) + \partial_x(\rho u_1^2 + p_{11}) = 0, \\ \partial_t(\rho u_2) + \partial_x(\rho u_1 u_2 + p_{12}) = 0, \\ \partial_t E_{11} + \partial_x((E_{11} + p_{11})u_1) = 0, \\ \partial_t E_{22} + \partial_x(E_{22}u_1 + p_{12}u_2) = 0, \\ \partial_t E_{12} + \partial_x(E_{12}u_1 + \frac{1}{2}(p_{11}u_2 + p_{12}u_1)) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

où les équations d'état s'écrivent

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\rho u_i u_j + \frac{1}{2}p_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 2.$$

Dans un souci de simplicité et avec des notations claires, la forme condensée suivante est introduite :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) &= 0, \\ \mathbf{w} &= {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, E_{11}, E_{22}, E_{12}). \end{aligned}$$

où $\mathbf{w} \in \Omega$ avec

$$\Omega = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^6; \rho > 0, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, p_{11} > 0, p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \}.$$

Le système qui nous motive ici est hyperbolique sur Ω . De plus, les solutions faibles de (25) vérifient les inégalités d'entropie suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \mathcal{F}(\ln s) + \partial_x \rho \mathcal{F}(\ln s) u_1 &= 0, \quad s := s(\mathbf{w}) = \frac{p_{11}}{\rho^3}, \\ \partial_t \rho \mathcal{G}(\ln \sigma) + \partial_x \rho \mathcal{G}(\ln \sigma) u_1 &= 0, \quad \sigma := \sigma(\mathbf{w}) = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}{\rho^4}, \end{aligned}$$

où les fonctions $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(y) &< 0, \quad \frac{\mathcal{F}''(y)}{\mathcal{F}'(y)} < \frac{1}{3}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{G}'(y) &< 0, \quad \frac{\mathcal{G}''(y)}{\mathcal{G}'(y)} < \frac{1}{4}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (26)$$

afin de satisfaire la convexité des applications $\mathbf{w} \rightarrow \rho \mathcal{F}(\ln s(\mathbf{w}))$ et $\mathbf{w} \rightarrow \rho \mathcal{G}(\ln \sigma(\mathbf{w}))$.

En développant un schéma de relaxation, nous proposons une méthode numérique robuste (qui préserve l'invariance de Ω) et stable (qui vérifie l'ensemble des inégalités discrètes d'entropie). Un modèle de relaxation est alors considéré où les deux pressions à

l'équilibre, p_{11} et p_{12} , sont approchées par deux nouvelles variables π_{11} et π_{12} destinées à être relaxées vers les pressions à l'équilibre. Le modèle de relaxation qui nous motive ici s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u_1) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t(\rho u_1) + \partial_x(\rho u_1^2 + \pi_{11}) = 0, \\ \partial_t(\rho u_2) + \partial_x(\rho u_1 u_2 + \pi_{12}) = 0, \\ \partial_t E_{11} + \partial_x((E_{11} + \pi_{11})u_1) = 0, \\ \partial_t E_{22} + \partial_x(E_{22}u_1 + \pi_{12}u_2) = 0, \\ \partial_t E_{12} + \partial_x(E_{12}u_1 + \frac{1}{2}(\pi_{11}u_2 + \pi_{12}u_1)) = 0, \\ \partial_t \rho \pi_{11} + \partial_x(\rho \pi_{11}u_1 + a^2 u_1) = \mu \rho(p_{11} - \pi_{11}), \\ \partial_t \rho \pi_{12} + \partial_x(\rho \pi_{12}u_1 + a^2 u_2) = \mu \rho(p_{12} - \pi_{12}), \end{array} \right. \quad (27)$$

où le paramètre de relaxation $a > 0$ est assujetti à vérifier la condition sous-caractéristique de Whitham [121]

$$\frac{a^2}{\rho} > 3p_{11}. \quad (28)$$

Formellement, notons que pour μ qui tend vers l'infini, le système (27) permet de retrouver le système à l'équilibre (25). En effet, dans la limite de μ vers l'infini, nous avons formellement $\pi_{11} = p_{11}$ et $\pi_{12} = p_{12}$. En conséquence, les lois de conservation des moments (ρu_1 et ρu_2) ainsi que les lois de conservation des énergies (E_{11} , E_{22} et E_{12}) du modèle de relaxation (27) redonnent celles constituant le système à l'équilibre (25).

Avec des notations claires, nous introduisons la forme condensée suivante pour le système (27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}_a(\mathbf{W}) = \mu \mathcal{R}(\mathbf{W}), \\ \mathbf{W} = {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, E_{11}, E_{22}, E_{12}, \rho \pi_{11}, \rho \pi_{12}), \end{array} \right. \quad (29)$$

où $\mathbf{W}$ appartient à $\mathcal{V} = \{\mathbf{W} \in \mathbb{R}^8; \rho > 0\}$.

Le schéma de relaxation qui va suivre repose essentiellement sur une propriété de linéaire dégénérescence de tous les champs du système (27). Ceci rend la résolution du problème de Riemann associé à (27) aisée.

Lemma 3.1. *Avec $a > 0$ et $\mu = 0$, le système du premier ordre extrait de (27) est hyperbolique avec pour valeur propre $\lambda_1 = u_1 - a/\rho$, $\lambda_2 = u_1$ et $\lambda_3 = u_1 + a/\rho$. Il n'admet que des champs linéairement dégénérés. De plus, si a vérifie*

$$\begin{aligned} (u_1)_L - \frac{a}{\rho_L} < u_1^* < (u_1)_R + \frac{a}{\rho_R}, \\ u_1^* = \frac{(u_1)_L + (u_1)_R}{2} + \frac{(\pi_{11})_L - (\pi_{11})_R}{2a}, \end{aligned} \quad (30)$$

où $\mathbf{W}_L$ et $\mathbf{W}_R$ sont des états constants de $\mathcal{V}$ définissant la donnée initiale d'un problème de Riemann :

$$\mathbf{W}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (31)$$

alors la solution de (27)-(31) avec $\mu = 0$ est donnée par

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \\ \mathbf{W}_1 & \text{si } \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \frac{x}{t} < \lambda_2(\mathbf{W}_1), \\ \mathbf{W}_2 & \text{si } \lambda_2(\mathbf{W}_2) < \frac{x}{t} < \lambda_3(\mathbf{W}_R), \\ \mathbf{W}_R & \text{si } \lambda_3(\mathbf{W}_R) < \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (32)$$

où $\lambda_2(\mathbf{W}_1) = \lambda_2(\mathbf{W}_2) = u_1^*$. Pour $1 \leq i \leq j \leq 2$, nous introduisons

$$\begin{aligned} u_i^* &= \frac{(u_i)_L + (u_i)_R}{2} + \frac{(\pi_{1i})_L - (\pi_{1i})_R}{2a}, \\ \pi_{1i}^* &= \frac{(\pi_{1i})_L + (\pi_{1i})_R}{2} + \frac{a}{2}((u_i)_L - (u_i)_R), \\ \frac{1}{\rho^1} &= \frac{1}{\rho_L} + \frac{u_1^* - (u_1)_L}{a}, \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_R} + \frac{(u_1)_R - u_1^*}{a} \\ e_{ij}^1 &= \left(\frac{(E_{ij})_L}{\rho_L} - \frac{(u_i)_L(u_j)_L}{2} \right) - \frac{1}{2a^2} ((\pi_{1i})_L(\pi_{1j})_L - \pi_{1i}^*\pi_{1j}^*), \\ e_{ij}^2 &= \left(\frac{(E_{ij})_R}{\rho_R} - \frac{(u_i)_R(u_j)_R}{2} \right) - \frac{1}{2a^2} ((\pi_{1i})_R(\pi_{1j})_R - \pi_{1i}^*\pi_{1j}^*), \\ E_{ij}^1 &= \rho^1 \frac{u_i^* u_j^*}{2} + \rho^1 e_{ij}^1, \quad E_{ij}^2 = \rho^2 \frac{u_i^* u_j^*}{2} + \rho^2 e_{ij}^2. \end{aligned}$$

Les états constants $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ dans $\mathcal{V}$ trouvent alors la définition suivante :

$$\mathbf{W}_i = {}^t(\rho^i, \rho^i u_1^*, \rho^i u_2^*, E_{11}^i, E_{22}^i, E_{12}^i, \rho^i \pi_{11}^*, \rho^i \pi_{12}^*), \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Fort du modèle de relaxation, la méthode numérique est, à présent, brièvement décrite sur un maillage uniforme de pas de maille Δx . A la date t^n , on suppose connue une approximation $\mathbf{w}^h$ de la solution de (25). Cette approximation est constante par morceaux :

$$\mathbf{w}^h(x, t^n) = \mathbf{w}_i^n = {}^t(\rho_i^n, (\rho u_1)_i^n, (\rho u_2)_i^n, (E_{11})_i^n, (E_{22})_i^n, (E_{12})_i^n),$$

pour tout $x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$. Afin de faire évoluer en temps cette approximation, une méthode à deux pas est considérée.

Evolution : $t^n \rightarrow t^{n+1,-}$

Pour $0 < t < \Delta t$, le problème de Cauchy pour (27) avec $\mu = 0$, est résolu avec la donnée initiale à l'équilibre suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^h(x, t^n) &= \mathbf{W}_i^n \\ &= {}^t(\rho_i^n, (\rho u_1)_i^n, (\rho u_2)_i^n, (E_{11})_i^n, (E_{22})_i^n, (E_{12})_i^n, (\rho \pi_{11})_i^n, (\rho \pi_{12})_i^n), \end{aligned}$$

où $(\pi_{11})_i^n = (p_{11})_i^n$ et $(\pi_{12})_i^n = (p_{12})_i^n$.

Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max (|\lambda_i(\mathbf{W}^h(x, t^n))|) \leq \frac{1}{2}, \quad (33)$$

où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 3}$ désigne les valeurs propres définies dans le lemme 3.1, la solution $\mathbf{W}^h$ à la date $t^n + \Delta t$ est constituée de la juxtaposition sans interaction de la solution des problèmes de Riemann posés à chaque interface $x_{i+\frac{1}{2}}$. En vertu du lemme 3.1, la solution de chacun des problèmes de Riemann mis en jeu est analytiquement connue. Sur chaque interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, le paramètre $a_{i+\frac{1}{2}}$ est choisi afin de satisfaire la condition de Whitham (28) et la condition d'ordre (30) avec $\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_i^n$ et $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_{i+1}^n$. On pose alors

$$\mathbf{W}_i^{n+1,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{W}^h(x, t^n + \Delta t) dx.$$

Relaxation : $t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$

Le vecteur $\mathbf{W}_i^{n+1,-}$ est projeté sur la variété d'équilibre $\{\mathbf{W} \in \mathcal{V}; \Pi_{11} = p_{11}, \Pi_{12} = p_{12}\}$. Ceci revient à résoudre

$$\partial_t \mathbf{W} = \mu \mathcal{R}(\mathbf{W}),$$

avec $\mathbf{W}_i^{n+1,-}$ pour donnée initiale, puis à faire tendre μ vers l'infini. Après calcul, on en déduit aisément la mise à jour suivante du vecteur des états :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{n+1}(x) = & {}^t \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u_1)_i^{n+1,-}, (\rho u_2)_i^{n+1,-}, \right. \\ & \left. (E_{11})_i^{n+1,-}, (E_{22})_i^{n+1,-}, (E_{12})_i^{n+1,-} \right), \quad x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

avec $(\pi_{11})_i^{n+1} = (p_{11})_i^{n+1}$ et $(\pi_{12})_i^{n+1} = (p_{12})_i^{n+1}$.

Le schéma de relaxation peut se résumer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1} &= \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \mathbf{F}_{a_{i+\frac{1}{2}}} \left(\mathbf{W}^h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n + \Delta t) \right) |_{[\rho, \rho u_1, \rho u_2, E_{11}, E_{22}, E_{12}]}. \end{aligned} \quad (34)$$

Notons qu'il s'agit, ici, d'un schéma conservatif à 3 points. En effet, par définition de $\mathbf{W}^h$, le vecteur $\mathbf{W}^h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n + \Delta t)$ ne dépend que de $\mathbf{W}_i^n$ et $\mathbf{W}_{i+1}^n$. Or $\mathbf{W}_i^n$ définit un état à l'équilibre qui ne dépend que de $\mathbf{w}_i^n$.

Il est alors possible d'établir un résultat de stabilité pour ce schéma :

Theorem 3.2. *Considérons le schéma de relaxation (34) avec la condition CFL (33). Supposons la condition sous-caractéristique de Whitham (28) et la condition d'ordre (30) satisfaites.*

- i) Si $\mathbf{w}_i^n \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
ii) Pour toutes fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ vérifiant (26), les inégalités d'entropie suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} \mathcal{F}(\ln s_i^{n+1}) - \rho_i^n \mathcal{F}(\ln s_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\{\rho \mathcal{F}(\ln s) u_1\}_{i+\frac{1}{2}}^n - \{\rho \mathcal{F}(\ln s) u_1\}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) &\leq 0, \\ \rho_i^{n+1} \mathcal{G}(\ln \sigma_i^{n+1}) - \rho_i^n \mathcal{G}(\ln \sigma_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\{\rho \mathcal{G}(\ln \sigma) u_1\}_{i+\frac{1}{2}}^n - \{\rho \mathcal{G}(\ln \sigma) u_1\}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) &\leq 0, \end{aligned}$$

avec

$$s_i^n = \frac{(p_{11})_i^n}{(\rho_i^n)^3}, \quad \sigma_i^n = \frac{(p_{11})_i^n (p_{22})_i^n - ((p_{12})_i^n)^2}{(\rho_i^n)^4}.$$

Les flux numériques d'entropie sont définis par

$$\begin{aligned} \{\rho \mathcal{F}(\ln s) u_1\}_{i+\frac{1}{2}}^n &= (\mathbf{f}_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n \times \begin{cases} \mathcal{F}(\ln s_i^n) & \text{si } (\mathbf{f}_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n > 0, \\ \mathcal{F}(\ln s_{i+1}^n) & \text{sinon,} \end{cases} \\ \{\rho \mathcal{G}(\ln \sigma) u_1\}_{i+\frac{1}{2}}^n &= (\mathbf{f}_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n \times \begin{cases} \mathcal{G}(\ln \sigma_i^n) & \text{si } (\mathbf{f}_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n > 0, \\ \mathcal{G}(\ln \sigma_{i+1}^n) & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où $(\mathbf{f}_\rho)_{i+\frac{1}{2}}^n$ désigne la première composante du flux numérique de (34).

iii) Le principe du minimum suivant est vérifié (cf. Tadmor [115]) :

$$s_i^{n+1} \geq \min(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n), \quad \sigma_i^{n+1} \geq \min(\sigma_{i-1}^n, \sigma_i^n, \sigma_{i+1}^n),$$

3.2 La dynamique des gaz sans pression [7]

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Post-doc de M. Breuss (financement DFG).

Le schéma de relaxation est, à présent, appliqué à un système faiblement hyperbolique : la dynamique des gaz sans pression (voir Bouchut et al. [38, 41, 42]). En une dimension d'espace, ce modèle est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x \rho u^2 = 0, \end{cases} \quad (35)$$

avec $\rho > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Soulignons que le système (35) n'est que faiblement hyperbolique puisqu'il admet u pour valeur propre double mais qu'il n'existe pas de base de diagonalisation dans $\mathbb{R}$. En conséquence, les solutions naturelles de (35) ne sont pas L^2 -stable [38, 41, 42, 110]. Un tel système est utilisé dans certains modèles de plasma [39] ou dans certains modèles de cosmologie [122].

Un schéma de relaxation est proposé afin d'approcher les solutions faibles de (35). En accord avec la solution exacte, il est établi un principe du maximum ainsi qu'une propriété

TVD satisfaits par l'approximation de la vitesse. Des inégalités discrètes d'entropie sont également données. Notons qu'une attention particulière doit être portée dans l'approximation du vide, solution naturelle de (35) (voir, par exemple, Bouchut et al. [38, 41, 42] ou encore Chen-Liu [51]).

Le modèle de relaxation suivant est proposé :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t \rho \Pi + \partial_x (\rho \Pi u + a^2 u) = -\mu \rho \Pi. \end{cases} \quad (36)$$

Pour $\mu = 0$, le système (36) est hyperbolique sur

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho \Pi) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, u \in \mathbb{R}, \Pi \in \mathbb{R} \}.$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = u - a/\rho$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + a/\rho$ et elles sont toutes associées à des champs linéairement dégénérés.

Dans ce modèle, il est important de noter que la condition sous-caractéristique de Whitham s'écrit : $a > 0$. Cependant, elle n'est pas suffisante pour assurer l'ensemble des propriétés de stabilité requises.

Sur un maillage uniforme de taille Δx , en posant $\mathbf{w}_i^n = (\rho_i^n, (\rho u)_i^n)$, le schéma de relaxation trouve la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1} &= \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \mathbf{F}_{a_{i+\frac{1}{2}}} \left(\mathbf{W}^h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n + \Delta t) \right) |_{[\rho, \rho u]}, \end{aligned} \quad (37)$$

où $\mathbf{F}_{a_{i+\frac{1}{2}}}$ est la fonction flux du système (36) avec un paramètre de relaxation $a_{i+\frac{1}{2}}$. Le vecteur $\mathbf{W}^h(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n + \Delta t)$ est alors la solution du problème de Riemann pour (36) avec $\mu = 0$ et où les états gauche et droit de la donnée initiale sont fixés par les états à l'équilibre $\mathbf{W}_i^n$ et $\mathbf{W}_{i+1}^n$ avec $\mathbf{W}_i^n = (\rho_i^n, (\rho u)_i^n, \Pi_i^n = 0)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Le pas de temps est restreint par la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(|u_i^n| + \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_i^n} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Soulignons que la solution de (36), avec $\mu = 0$, pour le problème de Riemann suivant :

$$\mathbf{W}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{W}_L$ et $\mathbf{W}_R$ sont à l'équilibre, i.e. $\Pi_L = \Pi_R = 0$, est connue dès que le paramètre de relaxation vérifie

$$a > \max \left(0, \rho_L \frac{u_L - u_R}{2}, \rho_R \frac{u_L - u_R}{2} \right). \quad (39)$$

En effet, puisque tous les champs de (36) sont linéairement dégénérés, la solution du problème de Riemann est aisément obtenue.

De plus, sous cette restriction (39), la densité ρ reste positive en tout point de la solution du problème de Riemann dès que $\rho_L > 0$ et $\rho_R > 0$. Le résultat de stabilité suivant peut alors être établi :

Theorem 3.3. *On considère le schéma de relaxation (37) où le paramètre de relaxation $a_{i+\frac{1}{2}}$, défini sur chaque interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, vérifie (39). Sous la condition CFL (38), la vitesse $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie les propriétés suivantes :*
i) un principe du maximum

$$u_i^{n+1} \leq \max(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n),$$

ii) la décroissance de la variation totale de la vitesse :

$$\text{TV}(\mathbf{u}^n) \leq \text{TV}(\mathbf{u}^0),$$

iii) des inégalités discrètes d'entropie

$$\frac{S(u_i^{n+1}) - S(u_i^n)}{\Delta t} + \frac{U(u_i^n, u_{i+1}^n) - U(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \leq 0,$$

pour toute fonction convexe S , où $U(.,.)$ désigne la fonction flux d'entropie numérique.

Concernant le traitement des solutions en présence du vide, solution naturelle de (35), la principale difficulté est relative au pas de temps Δt qui ne doit pas tendre vers 0 comme semble l'indiquer la condition CFL (38). Il est clair qu'un choix adéquat du paramètre a permet de lever cette difficulté. C'est en substance le résultat suivant :

Theorem 3.4. *Considérons le schéma de relaxation (37) sous la condition CFL (38). Supposons que $a_{i+\frac{1}{2}}$ vérifie*

$$\begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2}} &\geq \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{2} \max(\rho_i^n, \rho_{i+1}^n) \quad \text{si} \quad u_i^n \geq u_{i+1}^n, \\ 0 < a_{i+\frac{1}{2}} &< \min \left(\epsilon, \frac{1}{2} \min(\rho_i, \rho_{i+1})(C + u_i - u_{i+1}) \right) \quad \text{si} \quad u_i^n < u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Si $\rho_i^n > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\rho_i^{n+1} > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. De plus, l'estimation suivante est obtenue :

$$\max \left(\left| u_i^n - \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_i^n} \right|, \left| u_{i+1}^n + \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_{i+1}^n} \right| \right) \leq \left| \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \right| + \frac{1}{2} \text{TV}(\mathbf{u}^0).$$

En conséquence, Δt ne tend pas vers zéro lorsque la densité tend vers zéro.

Cette méthode numérique a été adoptée pour réaliser une simulation 2D sur un maillage cartésien. Cette simulation est réalisée sur un domaine carré borné avec conditions aux limites périodiques. Elle est directement issue de la simulation des grandes échelles de l'univers [122]. Elle repose sur l'approximation numérique de l'extension 2D du système (35) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) + \partial_y (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) + \partial_y (\rho uv) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho uv) + \partial_y (\rho v^2) = 0. \end{cases}$$

La donnée initiale est *bien préparée* où ρ^0 est donnée par un champ gaussien (voir figure 4) et le vecteur vitesse initial est solution de

$$u = -\partial_x \phi, \quad v = -\partial_y \phi, \quad \Delta \phi = 4\pi G(\rho - \rho_b) \quad \text{sur } \Omega,$$

avec $G > 0$ une constante et $\rho_b = \int_{\Omega} \rho \, dx dy$. La solution numérique obtenue pour un temps long est donnée figure 4 et montre l'évolution des grandes structures.

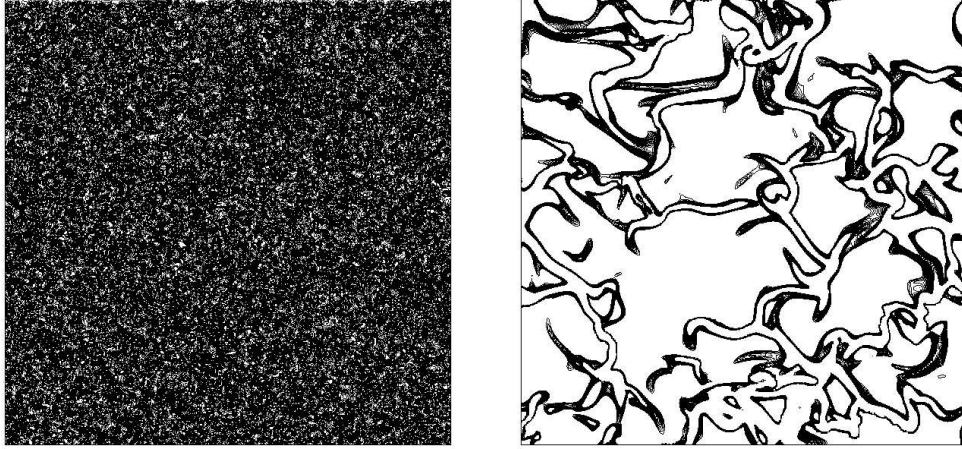


FIG. 4 – *Distribution initiale de la densité et évolution en grand temps.*

3.3 Ecoulements pétroliers [5]

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de doctorat de M. Baudin (financement IFP).

La simulation de certains écoulements pétroliers en pipeline soulève de larges difficultés numériques en raison de la complexité du mélange mis en jeu (pétrole-eau-gaz). Le modèle ici considéré, le *Drift-flux model*, est caractérisé par une seule pression et une seule équation

de conservation de la quantité de mouvement. En posant ρ la densité du mélange, ρv la quantité de mouvement totale du mélange et $Y \in [0, 1]$ la fraction massique, le modèle est gouverné par le système de loi de conservation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0, \\ \partial_t \rho v + \partial_x (\rho v^2 + P(\mathbf{w})) = 0, \\ \partial_t \rho Y + \partial_x (\rho Y v - \sigma(\mathbf{w})) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

où $\mathbf{w} = (\rho, \rho v, \rho Y)$ désigne le vecteur des inconnues défini sur l'espace des phases :

$$\Omega = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1]\}.$$

Une des originalités de ce modèle réside dans le choix de la pression $P(\mathbf{w})$ et de la fonction $\sigma(\mathbf{w})$. En effet, le choix de ces deux fonctions permet de prendre en compte le comportement hydrodynamique de l'écoulement [123]. Cependant, la forme très nonlinéaire du système (40) résulte des fonctions P et σ . Entre autre, il n'est pas possible d'établir l'hyperbolicité du système, ni d'exhiber des couples d'entropie (cf. Benzoni-Gavache [35]) sauf sous des hypothèses restrictives qui sont hors de notre propos.

Comme conséquences immédiates de ces différentes remarques, la dérivation d'une méthode numérique s'avère particulièrement délicate. Elle peut devenir très coûteuse en raison de la technicité nécessaire pour déterminer la jacobienne du flux (voir Faille-Heintzé [61], Flatten-Munkejord [62]) ce qui, dans le cas présent, écarte les solveurs de Riemann plus classiques (cf. Godlewski-Raviart [67], Toro [116], Gallouët-Masella [65]). Afin de pallier ces difficultés, un schéma de relaxation est proposé. Notons dès à présent que ces difficultés se répercutent quant à l'établissement de la condition sous-caractéristique de Whitham. Le modèle de relaxation suivant est considéré :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0, \\ \partial_t \rho v + \partial_x (\rho v^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t \rho \Pi + \partial_x (\rho \Pi v + a^2 v) = \mu \rho (P(\mathbf{w}) - \Pi), \\ \partial_t \rho Y + \partial_x (\rho Y v - \Sigma) = 0, \\ \partial_t \rho \Sigma + \partial_x (\rho \Sigma v - b^2 Y) = \mu \rho (\sigma(\mathbf{w}) - \Sigma), \end{cases} \quad (41)$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont des paramètres de relaxation. Ce système, avec $\mu = 0$, est hyperbolique sur l'espace des états

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{W} = (\rho, \rho v, \rho \Pi, \rho Y, \rho \Sigma) \in \mathbb{R}^5; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, \Pi \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1], \Sigma \in \mathbb{R}\}.$$

Il admet les valeurs propres v , $v \pm a/\rho$ et $v \pm b/\rho$ qui sont toutes associées à des champs linéairement dégénérés, propriété qui assure une résolution aisée du problème de Riemann associé.

Pour établir des conditions de type Whitham, satisfaites par le couple de paramètres (a, b) , une étude utilisant le développement formel de Chapmann-Enskog est ici proposée.

Les conditions de stabilité devant être satisfaites par (a, b) peuvent être obtenues de différentes façons. En particulier, dans Chen-Levermore-Liu [50], les entropies de Lax sont considérées. Cependant, de telles entropies ne peuvent pas être obtenues, en général, pour le système (40).

Dans un voisinage de l'équilibre, le développement suivant est considéré :

$$\begin{aligned}\Pi &= P(\mathbf{w}) + \mu^{-1}\Pi^1 + O(\mu^{-2}), \\ \Sigma &= \sigma(\mathbf{w}) + \mu^{-1}\Sigma^1 + O(\mu^{-2}).\end{aligned}$$

En introduisant ce développement dans (41), un calcul formel conduit à :

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mu^{-1} \partial_x (\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}), \quad (42)$$

où $\mathbf{f}$ coïncide avec la fonction flux du système (40). Le couple (a, b) est alors choisi de telle sorte que $\mathcal{D}_{(a,b)}$ ait toutes ses valeurs propres positives. En un sens à préciser, (42) doit avoir une propriété de dissipation. Une condition suffisante assurant cette propriété peut être établie. Sans en donner ici la forme analytique, en raison de sa longueur, cette condition sur (a, b) sera notée (C) dans la suite.

Un schéma de relaxation est à présent proposé sur la base du système (41). En notant $\mathbf{w}_i^n = (\rho_i^n, (\rho v)_i^n, (\rho Y)_i^n)$, le schéma considéré trouve la forme abstraite (37). Sous la condition CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\left| v_i^n \pm \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_i^n} \right| \left| v_i^n \pm \frac{b_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_i^n} \right| \right) \leq \frac{1}{2},$$

où $(a_{i+\frac{1}{2}}, b_{i+\frac{1}{2}})$ désigne le couple de paramètres de relaxation sur l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, il est possible d'établir les propriétés de stabilité suivante :

- i) si $\rho_i^n > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\rho_i^{n+1} > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
- ii) si $Y_i^n \in [0, 1]$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $Y_i^{n+1} \in [0, 1]$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Ces propriétés sont obtenues dès que le couple (a, b) vérifie, en plus de la condition (C), les restrictions suivantes :

$$\begin{aligned}a_{i+\frac{1}{2}} &\geq \frac{\langle v_{i+\frac{1}{2}} \rangle + \sqrt{\langle v_{i+\frac{1}{2}} \rangle^2 + 4 \langle \Pi_{i+\frac{1}{2}} \rangle \max(1/\rho_i^n, 1/\rho_{i+1}^n)}}{2 \min(1/\rho_i^n, 1/\rho_{i+1}^n)}, \\ b_{i+\frac{1}{2}} &\geq \frac{|\rho_i^n \Phi(\mathbf{w}_i^n) + \rho_{i+1}^n \Phi(\mathbf{w}_i^n)|}{2} + \frac{|\rho_i^n \Phi(\mathbf{w}_i^n) - \rho_{i+1}^n \Phi(\mathbf{w}_i^n)|}{2},\end{aligned}$$

avec $\langle \varphi_{i+\frac{1}{2}} \rangle = (\varphi_i^n - \varphi_{i+1}^n)/2$. La fonction $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la loi de fermeture hydrodynamique préconisée par la physique et vérifie $\sigma(\mathbf{w}) = \rho Y(1 - Y)\Phi(\mathbf{w})$. Notons que la positivité des densités partielles est obtenue par une extension naturelle des idées proposées par Larrouturou [82].

Comparé à d'autres méthodes numériques [61, 62] approchant les solutions faibles de (40), en plus de sa robustesse, le schéma de relaxation, ici proposé, jouit d'un très faible coût de calcul. Dans un contexte industriel, cette remarque est tout autant cruciale que les propriétés de stabilité établies.

3.4 Écoulements multi-fluides [22, 24]

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de doctorat de B. Braconnier (financement CEA).

Des systèmes non conservatifs sont ici envisagés pour modéliser des écoulements compressibles multi-fluides. Un des modèles étudiés est le modèle de Baer-Nunziato [31]. Chaque composant est caractérisé par une fraction de vide $\alpha_k \in (0, 1)$, une densité $\rho_k > 0$, une vitesse $u_k \in \mathbb{R}$ et une pression $p_k(\rho_k) > 0$. Le modèle est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 = 0, & \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 u_1 = 0, \\ \partial_t \alpha_1 \rho_1 u_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_I \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x \alpha_2 \rho_2 u_2 = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 u_2 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_I \partial_x \alpha_1 = 0, \end{cases} \quad (43)$$

où u_I et p_I désignent respectivement la vitesse et la pression d'interface. Suivant [31], nous imposons $u_I = u_1$ et $p_I = p_2$.

Ce système soulève deux difficultés majeures. En effet, (43) n'est pas inconditionnellement hyperbolique. Lorsque $\alpha_1 = 0$ ou $u_1 = u_2 \pm \sqrt{p'_2(\rho_2)/\rho_2}$, le système n'est plus diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La seconde difficulté issue de ce système est relative à sa forme non conservative. Toutefois, il est possible de montrer que les produits non conservatifs n'impliquent pas d'ambiguïté (cf. Bouchut [37]).

Afin de proposer une méthode d'approximation adéquate, un schéma de relaxation est adopté. Ce schéma repose sur un système de relaxation obtenu en substituant les pressions p_k par de nouvelles inconnues Π_k gouvernées par :

$$\partial_t \Pi_k + u_k \partial_x \Pi_k + \frac{a_k^2}{\rho_k} \partial_x u_k = \mu(p_k - \Pi_k).$$

Les paramètres de relaxation a_k doivent satisfaire la condition sous-caractéristique de Whitham : $a_k^2 > \rho_k p'_k(\rho_k)$.

Le système de relaxation est hyperbolique et tous ses champs sont linéairement dégénérés. Le problème de Riemann associé peut aisément être résolu et ce, même si le système de relaxation ne trouve pas de formulation conservative. Une procédure standard (voir les sections précédentes) permet la dérivation d'un schéma de relaxation pour lequel des propriétés de robustesse peuvent être assurées. Le schéma obtenu est, bien entendu, non conservatif.

Dans sa thèse de doctorat, B. Braconnier étend cette approche à d'autres modèles impliquant différents phénomènes physiques.

4 Autres schémas [1, 14, 17]

Dans la présente section, nous nous intéressons à l'approximation numérique des solutions de systèmes hyperboliques par d'autres méthodes que les schémas de relaxation : les schéma HLLC et VF-Roe. Ces schémas sont ici appliqués à des modèles physiques très distincts. En effet, le schéma HLLC est utilisé pour approcher les solutions d'un modèle de transfert radiatif en assurant un comportement asymptotique adéquat. Le schéma VF-Roe est considéré pour approcher les solutions du modèle de turbulence R_{ij} .

4.1 Un schéma HLLC 2D pour le transfert radiatif [14, 17]

La note [17] est une annonce de [14].

Le transfert radiatif est un phénomène physique intervenant dans de nombreuses applications telles que la fusion par confinement inertiel. Lors des simulations, ce phénomène reste extrêmement coûteux. Pour pallier une telle difficulté, Dubroca-Feugeas [59] ont établi le modèle M_1 qui est actuellement largement utilisé (par exemple, voir Turpault [118, 119], Charrier et al. [49], Ripoll [104, 105], Buet-Cordier [44] ou encore Buet-Despres [45, 46]). Ce modèle est gouverné par le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = c\sigma(aT^4 - E), \\ \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{F} + c \nabla \cdot \mathbf{P} = -\sigma \mathbf{F}, \\ \partial_t(\rho C_v T) = -c\sigma(aT^4 - E), \end{cases} \quad (44)$$

où $E \geq 0$ désigne l'énergie, $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ le flux radiatif et T la température. La vitesse de la lumière c est constante tout comme ρ , C_v et a . Le paramètre $\sigma \geq 0$ représente l'opacité.

La pression radiative est donnée par

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \left((1 - \chi(f))\mathbf{I} + (3\chi(f) - 1) \frac{\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}}{\|\mathbf{F}\|^2} \right) E, \quad (45)$$

$$\chi(f) = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}} \quad \text{avec} \quad f = \frac{F}{cE}. \quad (46)$$

Notons que ce modèle est hyperbolique symétrisable et que les valeurs propres des jacobienes dans chaque direction de la fonction flux sont analytiquement connues.

Ce modèle, en plus de satisfaire la positivité de l'énergie, vérifie la limitation du flux :

$$-cE \leq F \leq cE,$$

et la conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(E + \rho C_v T) + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0.$$

Ce modèle permet également de retrouver le régime de diffusion asymptotique (voir Mihalas-Mihalas [95] ou Pomraming [101]). En effet, lorsque l'opacité devient suffisamment grande, le modèle M_1 peut être remis à l'échelle par l'introduction du nombre de Knudsen, ici noté ϵ , pour obtenir :

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\sigma c}{\epsilon} (aT^4 - E), \\ \epsilon \partial_t \mathbf{F} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\sigma c}{\epsilon} \sigma \mathbf{F}, \\ \epsilon \partial_t (\rho C_v T) = -\frac{\sigma c}{\epsilon} (aT^4 - E). \end{cases} \quad (47)$$

Formellement, dans la limite de ϵ vers zéro, une équation de diffusion à l'équilibre est obtenue :

$$\partial_t (\rho C_v T_0 + aT_0^4) - \nabla \cdot \left(\frac{c}{3\sigma} \nabla (aT_0^4) \right) = 0. \quad (48)$$

Plusieurs approches numériques ont récemment été proposées dans le cas du modèle M_1 (par exemple, voir Buet-Cordier [44] ou Buet-Despres [45, 46] ou encore Gosse-Toscani [68]). Cependant, la précision numérique de ces nouvelles méthodes est parfois insuffisante pour la réalisation de certaines simulations bidimensionnelles.

Nous proposons ici, un schéma prédicteur-correcteur utilisant un solveur de Riemann approché de type HLLC (voir Batten et al. [32], Bouchut [37], Toro et al. [116, 117] pour de plus amples détails). Cette méthode numérique préserve toutes les propriétés du modèle tout en assurant la précision requise.

Dans un premier temps, une méthode d'approximation des solutions faibles du modèle 1D est proposée. Une technique de décomposition en opérateur a été adoptée. Lors de l'étape de prédiction le système suivant est résolu :

$$\begin{cases} \partial_t E + \partial_x F = c\sigma (aT^4 - E), \\ \frac{1}{c} \partial_t F + \partial_x (cP) = -\sigma F, \\ \partial_t (\rho C_v T) = -c\sigma (aT^4 - E). \end{cases} \quad (49)$$

Suivant Bouchut [37], l'opacité est réécrite de la façon suivante : $\sigma(x) = \partial_x \Sigma(x)$ et ce afin de prendre en compte le terme source dans le solveur de Riemann approché. Puisque $\partial_t \Sigma = 0$, il en résulte que ce premier pas est dédié à l'approximation numérique du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \frac{1}{c} \partial_t F + \partial_x (cP) + F \partial_x \Sigma = 0, \\ \partial_t (\rho C_v T) = 0, \\ \partial_t \Sigma = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Un schéma HLLC est proposé sur la base d'un solveur de Riemann approché. Ce solveur est, ensuite, corrigé au cours d'un second pas afin de prendre en compte les termes sources

de relaxation relatifs à la température. Le système suivant est alors considéré :

$$\begin{cases} \partial_t E = c\sigma(aT^4 - E), \\ \partial_t F = 0, \\ \partial_t(\rho C_v T) = -c\sigma(aT^4 - E). \end{cases}$$

Pour un maillage uniforme dont le pas de maille est Δx , le schéma résultant trouve la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_i^{n+1} = E_i^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{HLL} \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) b_L^{i+\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{L,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_L^{i+\frac{1}{2}}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}) b_R^{i-\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{R,i-\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_R^{i-\frac{1}{2}}} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} = F_i^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x} c^2 \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \tilde{P}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \tilde{P}_{i-\frac{1}{2}}^{HLL} + (\alpha_{i-\frac{1}{2}} - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) P_i^n \right) + \\ &\frac{\Delta t}{\Delta x} \left((1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) b_L^{i+\frac{1}{2}} - (1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}) b_R^{i-\frac{1}{2}} \right) F_i^n, \end{aligned} \quad (51b)$$

$$\begin{aligned} (\rho C_v T)_i^{n+1} = (\rho C_v T)_i^n &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) b_L^{i+\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{L,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_L^{i+\frac{1}{2}}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}) b_R^{i-\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{R,i-\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_R^{i-\frac{1}{2}}} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (51c)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}}}{b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}} + c\sigma_{i+\frac{1}{2}} \Delta x} \\ b_L^{i+\frac{1}{2}} &\leq \min \left(0, cf_i^n, c \frac{f_i^n - \chi_i^n}{1 - f_i^n}, c \frac{f_i^n + \chi_i^n}{1 + f_i^n}, \lambda^-(E_i^n, F_i^n) \right), \\ b_R^{i-\frac{1}{2}} &\geq \max \left(0, cf_i^n, c \frac{f_i^n - \chi_i^n}{1 - f_i^n}, c \frac{f_i^n + \chi_i^n}{1 + f_i^n}, \lambda^+(E_i^n, F_i^n) \right), \end{aligned}$$

avec

$$f_i^n = \frac{F_i^n}{cE_i^n} \quad \text{et} \quad \chi_i^n = \chi(f_i^n).$$

Les quantités $\lambda^\pm$ désignent les valeurs propres extrêmes de la jacobienne du flux. Les flux

numériques $\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL}$ et $\tilde{P}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL}$ sont définis par

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} &= \frac{b_R^{i+\frac{1}{2}} F_i^n - b_L^{i+\frac{1}{2}} F_{i+1}^n - b_L^{i+\frac{1}{2}} b_R^{i+\frac{1}{2}} (E_i^n - E_{i+1}^n)}{b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}}}, \\ \tilde{P}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} &= \frac{b_R^{i+\frac{1}{2}} P_i^n - b_L^{i+\frac{1}{2}} P_{i+1}^n - b_L^{i+\frac{1}{2}} b_R^{i+\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i+1}^n)}{b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Enfin, la température $T_{K,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC}$, avec $K = L$ ou R , est solution de l'équation

$$\rho C_v T_{K,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} + (1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) a (T_{K,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC})^4 = \rho C_v T_{K,i+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) E_K^0$$

avec

$$E_L^0 = E_i^n - \frac{F_i^n}{b_L^{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad E_R^0 = E_{i+1}^n - \frac{F_{i+1}^n}{b_R^{i+\frac{1}{2}}}. \quad (52)$$

Ce schéma vérifie toutes les propriétés du modèle. En effet, nous avons

Theorem 4.1. *A la date t^n , supposons que $E_i^n \geq 0$, $-cE_i^n \leq F_i^n \leq cE_i^n$ et $T_i^n > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Sous la condition CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|b_L^{i+\frac{1}{2}}|, |b_R^{i+\frac{1}{2}}|) \leq \frac{1}{2},$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

- i) positivité de l'énergie radiative : $E_i^{n+1} \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
- ii) limitation du flux radiatif : $-cE_i^{n+1} \leq F_i^{n+1} \leq cE_i^{n+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
- iii) conservation de l'énergie totale $(E + \rho C_v T)_i^{n+1}$.

De plus, le schéma (51) est *asymptotic preserving*. En effet, en introduisant le nombre

de Knudsen dans le schéma (51), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{HLL} \right) = \\ - \left(\frac{1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_L^{i+\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{L,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_L^{i+\frac{1}{2}}} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_R^{i-\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{R,i-\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_R^{i-\frac{1}{2}}} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (53a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + \frac{c^2}{\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \tilde{P}_{i+\frac{1}{2}}^{HLL} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \tilde{P}_{i-\frac{1}{2}}^{HLL} + (\alpha_{i-\frac{1}{2}} - \alpha_{i+\frac{1}{2}}) P_i^n \right) = \\ - \left(\frac{1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_L^{i+\frac{1}{2}} - \frac{1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_R^{i-\frac{1}{2}} \right) F_i^n, \end{aligned} \quad (53b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{(\rho C_v T)_i^{n+1} - (\rho C_v T)_i^n}{\Delta t} = \frac{1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_L^{i+\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{L,i+\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_L^{i+\frac{1}{2}}} \right) \right) \\ - \frac{1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} b_R^{i-\frac{1}{2}} \left(a \left(T_{R,i-\frac{1}{2}}^{\star,HLLC} \right)^4 - \left(E_i^n - \frac{F_i^n}{b_R^{i-\frac{1}{2}}} \right) \right), \end{aligned} \quad (53c)$$

où $\alpha_{i+\frac{1}{2}}$ trouve, à présent, la définition suivante :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon(b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}})}{\epsilon(b_R^{i+\frac{1}{2}} - b_L^{i+\frac{1}{2}}) + c\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Delta x}. \quad (54)$$

Le résultat suivant atteste la satisfaction d'un régime asymptotique limite :

Theorem 4.2. *Supposons que les vitesses $b_L^{i+\frac{1}{2}}$ et $b_R^{i+\frac{1}{2}}$ soient données par*

$$\begin{aligned} b_L^{i+\frac{1}{2}} &= \min \left(0, cf_i^n, c \frac{f_i^n - \chi_i^n}{1 - f_i^n}, c \frac{f_i^n + \chi_i^n}{1 + f_i^n}, \lambda^-(E_i^n, F_i^n) \right), \\ b_R^{i-\frac{1}{2}} &= \max \left(0, cf_i^n, c \frac{f_i^n - \chi_i^n}{1 - f_i^n}, c \frac{f_i^n + \chi_i^n}{1 + f_i^n}, \lambda^+(E_i^n, F_i^n) \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Pour ϵ assez petit, la limite de diffusion de (53)-(54) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^n = a(T_i^n)^4, \\ F_i^n = 0, \\ \frac{(E + \rho C_v T)_i^{n+1} - (E + \rho C_v T)_i^n}{\Delta t} = \\ \frac{c}{3\Delta x^2} \left(\frac{1}{\sigma_{i+\frac{1}{2}}} (E_{i+1}^n - E_i^n) + \frac{1}{\sigma_{i-\frac{1}{2}}} (E_{i-1}^n - E_i^n) \right). \end{array} \right.$$

Le schéma 1D (51) est ensuite étendu pour discrétiser le modèle M_1 bidimensionnel sur un maillage cartésien. Le schéma 2D complet n'est pas détaillé ici en raison de sa longueur. Toutefois, il est important de noter que ce schéma 2D vérifie également l'ensemble des propriétés satisfaites par le modèle : positivité de l'énergie radiative, limitation du flux radiatif, conservation de l'énergie totale et obtention du régime asymptotique. Pour conclure, il faut remarquer que la précision de la méthode est une conséquence du choix des vitesses d'onde $b_L^{i+\frac{1}{2}}$ et $b_R^{i+\frac{1}{2}}$ qui sont ici indépendantes l'une de l'autre. D'autres travaux (cf. Buet-Cordier [44] ou Buet-Despres [45, 46]) mettent en jeu des vitesses d'onde numériques symétriques de la forme $b_R^{i+\frac{1}{2}} = b_L^{i+\frac{1}{2}}$. Un tel choix est, en général, la cause d'une forte diffusion numérique comme l'atteste la simulation numérique suivante.

La méthode est illustrée par un cas test pour lequel une trop grande diffusion numérique peut dégrader fortement la qualité des résultats. Une section opaque, $\sigma = 2 \cdot 10^5$, est adjacente à une zone transparente où $\sigma = 0$ (voir la figure 5). Une température de $5Kev$

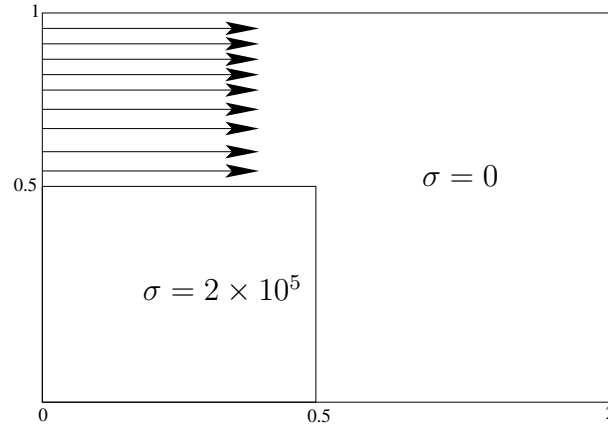


FIG. 5 – Géométrie d'un cas test 2D pour le transfert radiatif.

est appliquée sur la frontière gauche de la zone transparente. La température initiale est fixée à $T = 50000K$ dans la zone dense et $T = 300K$ dans la zone transparente. La solution attendue admet une structure *simple* puisque la zone dense crée un cône d'ombre. La figure 6 représente la solution approchée pour 2 choix distincts de l'évaluation de $b_{L,R}^{i+\frac{1}{2}}$. La figure de gauche (HLLC-var) présente la solution obtenue lorsque $b_{L,R}^{i+\frac{1}{2}}$ sont donnés par (55). Dans la figure de droite (HLLC-c), la solution est obtenue avec une variante du schéma (51) vérifiant toutes les propriétés de stabilité, mais pour laquelle $b_R^{i+\frac{1}{2}} = c = -b_L^{i+\frac{1}{2}}$. Il est clair, à la vue de ce résultat, que le choix des vitesses d'onde numériques $b_{L,R}^{i+\frac{1}{2}}$ joue un rôle prépondérant. Seul le schéma (51) permet une approximation correcte du cône d'ombre en donnant une très bonne estimation de l'onde de contact.

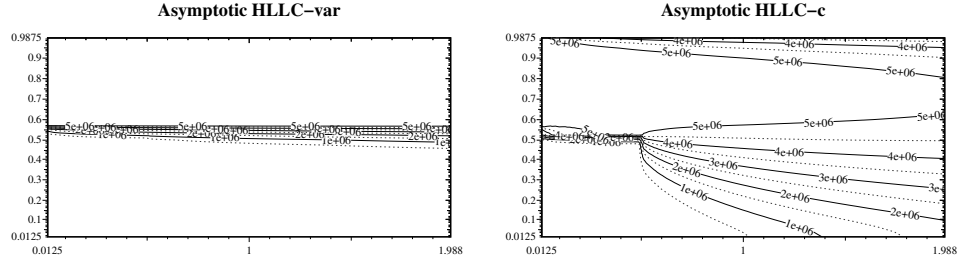


FIG. 6 – Température radiative à la date $t = 5 * 10^{-8}$ obtenue avec les schémas HLLC-c et HLLC-var.

4.2 Schéma VF-Roe pour le modèle R_{ij} [1]

Afin de simuler des écoulements turbulents compressibles, de nombreux modèles sont proposés dans la littérature (par exemple, voir [74]). Le modèle (k, ϵ) , plusieurs fois cité dans les sections précédentes, est certainement l'un des modèles les plus célèbres. La prise en compte de fermetures du second ordre permet la dérivation de modèles de turbulence plus sophistiqués. Dans la présente étude, le modèle R_{ij} est considéré. Ce modèle est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + R_{11}) = 0, \\ \partial_t \rho v + \partial_x(\rho uv + R_{12}) = 0, \\ \partial_t E + \partial_x((E + p + R_{11}) + v R_{12}) = 0, \\ \partial_t R_{11} + \partial_x(R_{11}u) + 2R_{11}\partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{22} + \partial_x(R_{22}u) + 2R_{12}\partial_x v = 0, \\ \partial_t R_{12} + \partial_x(R_{12}u) + R_{11}\partial_x v + R_{12}\partial_x u = 0, \\ \partial_t R_{33} + \partial_x(R_{33}u) = 0, \end{cases} \quad (56)$$

où R_{ij} désignent les composantes du tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$. La pression p est définie par une loi de gaz parfait :

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33}}{2} \right).$$

En notant $\mathbf{w}$ le vecteur des inconnues, l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^8; \rho > 0, p > 0, \mathbf{R} \text{ défini positif}\}.$$

Le système (56) est hyperbolique non conservatif sur Ω .

Dans un souci de simplicité et avec des notations claires, le système (56) est réécrit sous la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = 0.$$

Notre objectif est ici de proposer un schéma numérique *simple* malgré la forme non conservative du système considéré. En effet, celle-ci interdit l'obtention d'un solveur classique (voir Godlewski-Raviart [67], Toro [116], Roe [107]). Suivant les travaux de Buffard et al. [47], Gallouët [63, 64], un schéma VF-Roe non conservatif est proposé. Cette approche n'est certainement pas la plus adéquate en raison de la présence de produits non conservatifs. En effet, de tels produits impliquent l'utilisation de méthodes numériques plus élaborées pour approcher les solutions discontinues conformément à la théorie des systèmes hyperboliques non conservatifs (cf. LeFloch [86], Dal Maso-LeFloch-Murat [58], LeFloch-Liu [89], voir également la section 2 dédiée au modèle multi-entropie). Cependant, la dérivation d'un schéma VF-Roe dans ce contexte permet de mettre l'accent sur la possibilité de développer des schémas numériques capables d'approcher des solutions discontinues, en un sens à préciser, pour de tels modèles.

Le schéma VF-Roe repose, dans un premier temps, sur l'introduction d'un changement de variable $\mathbf{W}(\mathbf{w}) = (1/\rho, u, v, p, R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{33})$, pour réécrire (56) sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{C}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = 0.$$

Ce système est alors linéarisé. En considérant la donnée initiale suivante :

$$\mathbf{W}^0(x) = \begin{cases} \mathbf{W}(\mathbf{w}_L) & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}(\mathbf{w}_R) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

on introduit le problème linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}}) \partial_x \mathbf{W} = 0.$$

avec $\bar{\mathbf{W}} = (\mathbf{W}(\mathbf{w}_L) + \mathbf{W}(\mathbf{w}_R))/2$. Nous définissons alors $\mathbf{W}^*(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ la solution en $x = 0$ du problème de Riemann précédent. On note $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^*(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n))$ pour proposer le schéma suivant :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{S}_i^n,$$

où $\mathbf{S}_i^n$ est la forme discrète de $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}$:

$$\mathbf{S}_i^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(R_{11})_i^n (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}) \\ 2(R_{12})_i^n (\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i-\frac{1}{2}}) \\ (R_{11})_i^n (\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i-\frac{1}{2}}) + (R_{12})_i^n (\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où la formule centrée $\tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}} = (\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n)/2$ a été adoptée.

Pour conclure, il est important de noter que la positivité du tenseur de Reynolds a toujours été préservée dans tous les cas tests numériques réalisés.

5 Robustesse des schémas du second ordre de type MUSCL [6, 10, 11]

Lors de l'approximation numérique des solutions de systèmes hyperboliques par des méthodes de type volume fini, le problème de la montée en ordre d'approximation reste, en général, une question délicate. Une très large littérature est dédiée à ce problème, proposant diverses approches. A titre d'exemple, il faut souligner l'importance des méthodes de type Godunov utilisant la solution de problèmes de Riemann généralisés (voir Ben-Artzi-Falcovitz [34]). Cette approche permet de développer des schémas numériques du second ordre (Bourgeade et al. [43] ou Coquel-LeFloch [56]). Cependant, la détermination des solutions exactes du problème de Riemann généralisé reste particulièrement délicate. Cela rend de telles méthodes peu attractives et ce malgré des résultats de stabilité [56] assurant la robustesse de ces schémas.

D'autres procédures, *plus simples*, ont été développées pour augmenter l'ordre d'approximation. L'une des plus célèbres est le schéma MUSCL proposé par van Leer [90]. Ce schéma est le sujet de la présente analyse et a déjà été utilisé dans de nombreuses applications (par exemple, voir Colella [53], Durofsky et al. [60], Sander-Wieser [108]). D'autres schémas plus récents ont aussi été proposés : extensions des schémas cinétiques [98], schémas à distribution de résidu [27, 30, 106], méthodes ENO et WENO ou encore les méthodes de type Galerkin discontinu [69, 111, 112] par exemple.

La relative simplicité de ces méthodes, qui ne font plus appel aux solutions exactes d'un problème de Riemann généralisé, se fait au détriment des propriétés de stabilité qui ne sont, en général, plus assurées. Dans le cadre du schéma MUSCL, par exemple, la restriction du pas de temps par une condition de type CFL n'est, en général, pas rigoureusement établie, sauf sous des hypothèses particulières (par exemple, voir Khobalatte-Perthame [80] ou Perthame-Qiu [99] ou encore Bouchut [37], Bouchut et al. [40]). Dans l'étude qui nous motive ici, une telle condition CFL est donnée dans le cadre le plus général possible pour des schémas MUSCL. Cependant, dans un souci de clarté, cette analyse est ici proposée dans le cadre des équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u = 0, \end{cases} \quad (57)$$

où la loi de pression vérifie :

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2}{2} \right), \quad \gamma \in (1, 3]. \quad (58)$$

Avec des notations claires, nous introduisons la forme abstraite suivante :

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0,$$

où $\mathbf{w} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ désigne le vecteur des états et $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction flux. L'ensemble des états admissibles Ω est défini par

$$\Omega = \left\{ \mathbf{w} = (\rho, \rho u, \rho E) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, u \in \mathbb{R}, e(\mathbf{W}) = E - \frac{u^2}{2} > 0 \right\}.$$

Puisque le système (57) peut admettre des solutions discontinues de type onde de choc, il doit être complété par un ensemble d'inégalités d'entropie (voir Lax [83, 84]) satisfaites par les solutions faibles de (57) :

$$\partial_t \rho \mathcal{F}(\ln s) + \partial_x \rho \mathcal{F}(\ln s) u \leq 0, \quad s := s(\mathbf{w}) = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (59)$$

où la fonction $\mathcal{F}$ vérifie

$$\mathcal{F}'(y) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{F}''(y)}{\mathcal{F}'(y)} < \frac{1}{\gamma}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (60)$$

de sorte que l'application $\mathbf{w} \rightarrow \mathcal{F}(\ln s)$ soit convexe.

De plus, Tadmor [115] établit un principe du minimum satisfait par l'entropie spécifique s :

$$s(x, t + h) \geq \min \{s(y, t); |y - x| \leq \|u\|_\infty h\}. \quad (61)$$

Les solutions faibles de (57)-(59)-(61) sont alors approchées en utilisant des schémas MUSCL. Afin de faciliter la description de ces méthodes, nous rappelons brièvement le principe d'approximation par un schéma conservatif d'ordre un. Celui-ci repose sur une approximation constante par morceaux de la solution à la date t^n :

$$\mathbf{w}^h(x, t^n) = \mathbf{w}_i^n, \quad x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}),$$

où $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + (x_{i+1} - x_i)/2$ avec $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ les points du maillage. Afin de simplifier les notations, le maillage est supposé uniforme de taille $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. La suite $(\mathbf{w}_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$, approchant la solution de (57) à la date $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, est alors obtenue par le schéma conservatif suivant (cf. Harten-Lax-van Leer [70], Godlewski-Raviart [67], Toro [116], Leveque [85]) :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n) \right), \quad (62)$$

où $\mathbf{F} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ désigne la fonction flux numérique supposée Lipschitz consistante. Le pas de temps Δt est restreint en accord avec la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)|) \leq \frac{1}{2}, \quad (63)$$

où $\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)$ sont les vitesses numériques des ondes acoustiques associées aux flux numériques $\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)$.

Dans toute la suite, le schéma (62) d'ordre 1 est supposé vérifier l'invariance de Ω ainsi que des inégalités discrètes d'entropie et un principe du minimum sur l'entropie spécifique :

P1: Si $\rho_i^n > 0$ et $e_i^n > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\rho_i^{n+1} > 0$ et $e_i^{n+1} > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

P2: Pour toute fonction $\mathcal{F}$ satisfaisant les conditions (60), la suite $(\mathbf{w}_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$$\rho_i^{n+1} \mathcal{F}(\ln s_i^{n+1}) - \rho_i^n \mathcal{F}(\ln s_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\{\rho \mathcal{F}(\ln s) u\}(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) - \{\rho \mathcal{F}(\ln s) u\}(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n) \right) \leq 0,$$

où $\{\rho \mathcal{F}(\ln s) u\}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ désigne la fonction flux d'entropie numérique.

P3: La suite $(\mathbf{w}_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie le principe du minimum suivant :

$$s_i^{n+1} \geq \min(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n).$$

A titre d'exemple, le schéma de relaxation [57, 76] ou le schéma HLLC [32, 116, 117] vérifient l'ensemble de ces propriétés de stabilité (voir Bouchut [37]).

Le schéma MUSCL repose sur une approximation linéaire par morceaux de la forme :

$$\mathbf{w}^h(x, t^n) = \mathbf{w}_i^n + \sigma_i^n(x - x_i), \quad x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}),$$

où σ_i^n désigne la pente. Le choix de cette pente est crucial. Une importante bibliographie [66, 67, 85, 116] lui est consacrée. En fait, de nombreux auteurs préconisent une reconstruction linéaire non pas sur $(\mathbf{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ mais sur un changement de variables adéquat :

$$\kappa(\mathbf{w}^n(x, t^n)) = \kappa(\mathbf{w}_i^n) + \sigma_i^n(x - x_i), \quad x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}),$$

où κ désigne le changement de variable. A titre d'exemple, les variables primitives (ρ, u, p) sont un choix largement utilisé.

Dans la cellule $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, les approximations situées aux points $x_{i \pm \frac{1}{2}}$ sont alors considérées :

$$\mathbf{w}_i^{n, \pm} = \mathbf{w}^h(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t^n).$$

Deux cas seront distingués. La reconstruction sera dite *conservative* si

$$\mathbf{w}_i^n = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i^{n, -} + \mathbf{w}_i^{n, +}),$$

autrement elle sera dite *non conservative* :

$$\mathbf{w}_i^n \neq \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i^{n, -} + \mathbf{w}_i^{n, +}).$$

Utilisant ces approximations $\mathbf{w}_i^{n, \pm}$, différentes variantes des schémas MUSCL peuvent être proposées et étudiées.

5.1 Stabilité des schémas MUSCL [6]

Fort des notations précédentes, le schéma du second ordre en espace MUSCL s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^{n,+}, \mathbf{w}_i^{n,-}) \right), \quad (64)$$

où $\mathbf{F}$ est la fonction flux numérique introduite dans (62).

D'après un idée introduite par Perthame-Shu [100], la stabilité du schéma (64) est ici considérée dans le cadre d'une reconstruction non conservative. Bien entendu, l'ensemble des résultats détaillés ci-après s'étend sans difficulté pour une reconstruction conservative. Le lecteur est également renvoyé à Bouchut [37], Leveque [85], Khobalatte-Perthame [80].

La preuve de la stabilité du schéma repose principalement sur l'introduction d'un état *fantôme*, noté $\mathbf{w}_i^{n,*}$, défini par

$$\alpha_i^- \mathbf{w}_i^{n,-} + \alpha_i^* \mathbf{w}_i^{n,*} + \alpha_i^+ \mathbf{w}_i^{n,+} = \mathbf{w}_i^n.$$

où les coefficients positifs $\alpha_i^{\pm,*}$ sont fixés de sorte à satisfaire

$$\alpha_i^- + \alpha_i^* + \alpha_i^+ = 1.$$

Un maillage est ainsi reconstruit, où chaque cellule $I_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ est décomposée en trois sous-cellules : $I_i^- = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} + \alpha_i^- \Delta x)$, $I_i^* = (x_{i-\frac{1}{2}} + \alpha_i^- \Delta x, x_{i-\frac{1}{2}} + (\alpha_i^- + \alpha_i^*) \Delta x)$ et $I_i^+ = (x_{i-\frac{1}{2}} + (\alpha_i^- + \alpha_i^*) \Delta x, x_{i+\frac{1}{2}})$. A chaque sous-cellule $I_i^{\pm,*}$ est associée la valeur $\mathbf{w}_i^{n,\pm,*}$. Le schéma (62) du premier ordre est alors appliqué sur le sous-maillage pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1,-} &= \mathbf{w}_i^{n,-} - \frac{\Delta t}{\alpha_i^- \Delta x} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,-}, \mathbf{w}_i^{n,*}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^{n,+}, \mathbf{w}_i^{n,-}) \right), \\ \mathbf{w}_i^{n+1,*} &= \mathbf{w}_i^{n,*} - \frac{\Delta t}{\alpha_i^* \Delta x} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,*}, \mathbf{w}_i^{n,+}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,-}, \mathbf{w}_i^{n,*}) \right), \\ \mathbf{w}_i^{n+1,+} &= \mathbf{w}_i^{n,+} - \frac{\Delta t}{\alpha_i^+ \Delta x} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n,*}, \mathbf{w}_i^{n,+}) \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que la solution approchée par (64) se réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \alpha_i^- \mathbf{w}_i^{n+1,-} + \alpha_i^* \mathbf{w}_i^{n+1,*} + \alpha_i^+ \mathbf{w}_i^{n+1,+}.$$

Puisque $\mathbf{w}_i^{n+1,\pm,*}$ sont obtenus par un schéma du premier ordre vérifiant les propriétés de stabilité P1, P2 et P3, le résultat suivant est alors obtenu :

Theorem 5.1. *Supposons que le schéma du premier ordre (62) vérifie les propriétés P1, P2 et P3. Supposons que $\mathbf{w}_i^n \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et imposons $\mathbf{w}_i^{n,\pm,*} \in \Omega$. Considérons la condition CFL suivante :*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n,-}, \mathbf{w}_i^{n,*})|, |\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n,*}, \mathbf{w}_i^{n,+})|, |\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n,+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n,-})|) \leq \frac{1}{2} \min(\alpha_i^-, \alpha_i^*, \alpha_i^+).$$

- i) Si $\mathbf{w}_i^n \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
ii) Pour toute fonction $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions (60), la séquence $(\mathbf{w}_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie les inégalités discrètes d'entropie suivantes :

$$\rho_i^{n+1} \mathcal{F}(\ln s_i^{n+1}) - \overline{\rho \mathcal{F}(\ln s)}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\{\rho \mathcal{F}(\ln s) u\}(\mathbf{w}_i^{n,+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n,-}) - \{\rho \mathcal{F}(\ln s) u\}(\mathbf{w}_{i-1}^{n,+}, \mathbf{w}_i^{n,-}) \right) \leq 0,$$

avec

$$\overline{\rho \mathcal{F}(\ln s)}_i^n = \alpha_i^- \rho_i^{n,-} \mathcal{F}(\ln s_i^{n,-}) + \alpha_i^* \rho_i^{n,*} \mathcal{F}(\ln s_i^{n,*}) + \alpha_i^+ \rho_i^{n,+} \mathcal{F}(\ln s_i^{n,+}),$$

où $s_i^{n,\pm*} = s(\mathbf{w}_i^{n,\pm*})$.

- iii) L'entropie spécifique vérifie un principe du minimum

$$s_i^{n+1} = s(\mathbf{w}_i^{n+1}) \geq \min(s_{i-1}^{n,+}, s_i^{n,\pm*}, s_{i+1}^{n,-}).$$

Il est important de souligner que la condition $\mathbf{w}_i^{n,\pm*} \in \Omega$ constitue une nouvelle limitation. La reconstruction doit alors être modifiée en conséquence. Notons également que dans le résultat précédent, il n'est nullement besoin de spécifier une reconstruction de pente *conservative* ou *non conservative*. Cependant, dans le cas d'une reconstruction conservative, la condition CFL proposée dans [37, 80] est moins restrictive que celle proposée dans la présente étude.

Un exemple de modification de la reconstruction de pente est à présent donné dans le cadre d'une reconstruction *non conservative* utilisant les variables primitives de l'écoulement (ρ, u, p) .

Dans la cellule I_i , les approximations aux points $x_{i \pm \frac{1}{2}}$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_i^{n,\pm} = \rho_i^n \pm \Delta \rho, \\ u_i^{n,\pm} = u_i^n \pm \Delta u, \\ p_i^{n,\pm} = p_i^n \pm \Delta p, \end{cases} \quad (65)$$

où $(\Delta \rho, \Delta u, \Delta p)$ désigne le vecteur des incréments qui doit satisfaire les nouvelles limitations. Les limiteurs existants sont modifiés pour forcer la condition : $\mathbf{w}_i^{n,\pm*} \in \Omega$. Les incréments obtenus par des limiteurs "usuels" (minmod, Superbee, MC... [85, 116]) sont notés δX . A titre d'exemple, une reconstruction utilisant le limiteur minmod impose un incrément de la forme suivante :

$$\delta X = \frac{1}{2} \text{minmod}(X_i - X_{i-1}, X_{i+1} - X_i).$$

Sous l'hypothèse simplificatrice :

$$\alpha_i^- = \alpha_i^* = \alpha_i^+ = \frac{1}{3},$$

le choix

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \rho_i^n \max\left(-1, \min\left(1, \frac{\delta\rho}{\rho_i^n}\right)\right), \\ \Delta u &= \text{sign}(\delta u) \sqrt{\min\left((\delta u)^2, \frac{p_i^n}{(\gamma-1)\rho_i^n\left(1+2\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_i^n}\right)^2\right)}\right)} \\ \Delta p &= p_i^n \max\left(-1, \min\left(1, \frac{\delta p}{p_i^n}\right)\right),\end{aligned}$$

assure toutes les conditions escomptées.

5.2 Stabilité L^1 du schémas MUSCL-Hancock [11]

Le schéma (64), pour lequel la stabilité est à présent assurée, est un schéma du second ordre en espace mais qui reste du premier ordre en temps. Dans [91], van Leer introduit le schéma MUSCL-Hancock d'ordre deux en temps et en espace. C'est un schéma à deux pas qui trouve la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} = \mathbf{w}_i^{n,\pm} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,+}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,-})), \\ \mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n+\frac{1}{2},-}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-})), \end{cases} \quad (66)$$

L'objectif est ici d'établir une condition CFL accompagnée d'une limitation adéquate sur $\mathbf{w}_i^{n,\pm}$ afin d'assurer la robustesse de la méthode; i.e. $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Par l'introduction d'états *fantômes* pertinents, les états obtenus à la fin de chaque pas sont montrés appartenir à Ω .

Pour établir $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} \in \Omega$, des états fantômes $\mathbf{w}_i^{*,\pm}$ sont introduits de la façon suivante :

$$\frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n,-} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_i^{*,\pm} + \frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n,+} = \mathbf{w}_i^{n,\pm}.$$

Sur la cellule $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, on note alors $\mathbf{w}^{h,\pm}(x, t)$ la solution faible du problème de Cauchy (57) pour la donnée initiale suivante :

$$\mathbf{w}^{h,\pm}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_i^{n,-}, & \text{if } x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{4}}), \\ \mathbf{w}_i^{*,\pm}, & \text{if } x \in (x_{i-\frac{1}{4}}, x_{i+\frac{1}{4}}), \\ \mathbf{w}_i^{n,+}, & \text{if } x \in (x_{i+\frac{1}{4}}, x_{i+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t/2}{\Delta x/4} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_e^\pm(\mathbf{w}_i^{n,-}, \mathbf{w}_i^{*,\pm})|, |\lambda_e^\pm(\mathbf{w}_i^{*,\pm}, \mathbf{w}_i^{n,+})|) \leq \frac{1}{2}, \quad (67)$$

où $\lambda_e^\pm(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ désignent les vitesses exactes des ondes acoustiques associées au système (57), la fonction $\mathbf{w}^{h,\pm}$ n'est autre que la juxtaposition sans interaction des solutions des problèmes de Riemann posés sur les interfaces $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ et $x_{i\pm\frac{1}{4}}$. Un rapide calcul permet alors d'établir la relation suivante :

$$\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{w}^{h,\pm}(x, \frac{\Delta t}{2}) dx.$$

Il en résulte que $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} \in \Omega$ dès que $\mathbf{w}^{h,\pm}(x, \frac{\Delta t}{2}) \in \Omega$. Ceci revient à imposer que les états $\mathbf{w}_i^{n,\pm}$ et $\mathbf{w}_i^{*,\pm}$ soient dans Ω .

Fort de cette première propriété, il reste à établir $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. L'approche utilisée dans la section précédente est alors considérée avec $\alpha_i^\pm = 1/4$ et $\alpha_i^* = 1/2$, de sorte à définir un état $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}$ de la façon suivante :

$$\frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*} + \frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+} = \mathbf{w}_i^n.$$

En appliquant le schéma (62) du premier ordre sur les états $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm,*}$, on définit :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1,-} &= \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-} - \frac{\Delta t}{\Delta x/4} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-}) \right), \\ \mathbf{w}_i^{n+1,*} &= \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*} - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}) \right), \\ \mathbf{w}_i^{n+1,+} &= \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+} - \frac{\Delta t}{\Delta x/4} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n+\frac{1}{2},-}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}) \right), \end{aligned}$$

pour en déduire immédiatement la formule suivante permettant l'évaluation de $\mathbf{w}_i^{n+1}$:

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n+1,-} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_i^{n+1,*} + \frac{1}{4}\mathbf{w}_i^{n+1,+}.$$

Puisque le schéma (62) vérifie la propriété P1 d'invariance de Ω sous la condition (63), il apparaît clairement que si les états $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm,*}$ sont dans Ω et sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x/4} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(|\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*})|, |\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},*}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+})|, |\lambda^\pm(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n+\frac{1}{2},-})| \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (68)$$

alors $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$.

En conséquence, il reste à établir que $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\star}$ appartient à Ω , où

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\star} &= \mathbf{w}_i^{\star,\star} - \frac{\Delta t/2}{\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,-}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,+})), \\ \mathbf{w}_i^{\star,\star} &= 2\mathbf{w}_i^n - \frac{1}{2} (\mathbf{w}_i^{n,-} + \mathbf{w}_i^{n,+}).\end{aligned}$$

Etablir $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\star} \in \Omega$ est en tout point similaire à prouver $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} \in \Omega$. En effet, on montre aisément que si $\mathbf{w}_i^{n,\pm} \in \Omega$ et $\mathbf{w}_i^{\star,\star} \in \Omega$, sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t/2}{\Delta x/4} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_e^\pm(\mathbf{w}_i^{n,-}, \mathbf{w}_i^{\star,\star})|, |\lambda_e^\pm(\mathbf{w}_i^{\star,\star}, \mathbf{w}_i^{n,+})|) \leq \frac{1}{2}, \quad (69)$$

alors $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\star}$ appartient à Ω . Le théorème suivant vient d'être établi :

Theorem 5.2. *Soit $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\star} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et considérons une reconstruction, conservative ou non, vérifiant $\mathbf{w}_i^{n,\pm} \in \Omega$, $\mathbf{w}_i^{\star,\pm} \in \Omega$ et $\mathbf{w}_i^{\star,\star} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Supposons les restrictions CFL (67), (68) et (69). Alors $\mathbf{w}_i^{n+1}$, obtenu par le schéma MUSCL-Hancock (66), appartient à Ω pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Il est important de noter que la condition CFL (68) trouve, en réalité, une formulation *implicite*. En effet, cette restriction nécessite la connaissance des états $\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm\star}$ qui dépendent eux-mêmes du pas de temps Δt . Du point de vue de la mise en oeuvre informatique, cette remarque peut soulever quelques difficultés. Cependant, il est possible de modifier le schéma MUSCL-Hancock (66) afin de rendre *explicites* les restrictions CFL. Le schéma suivant est alors proposé :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},\pm} = \mathbf{w}_i^{n,\pm} - \frac{\Delta t_1/2}{\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,+}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_i^{n,-})), \\ \bar{\mathbf{w}}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-} + \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}), \\ \bar{\bar{\mathbf{w}}}_i = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t_2}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_{i+1}^{n+\frac{1}{2},-}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i-1}^{n+\frac{1}{2},+}, \mathbf{w}_i^{n+\frac{1}{2},-})), \\ \mathbf{w}_i^{n+1} = \alpha \bar{\bar{\mathbf{w}}}_i + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{w}}_i, \end{cases} \quad (70)$$

où α trouve la définition suivante :

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\Delta t_1}{2} \frac{\frac{\Delta t_1}{2} - 2\sqrt{\Delta t_2(\Delta t_1 - \Delta t_2)}}{(\frac{\Delta t_1}{2} - \Delta t_2)^2}, & \text{if } \Delta t_2 < \Delta t_1, \\ 1, & \text{if } \Delta t_2 = \Delta t_1. \end{cases}$$

La solution approchée $\mathbf{w}_i^{n+1}$ est alors évaluée à la date $t^n + \Delta t$ avec $\Delta t = \alpha \Delta t_2 + (1 - \alpha) \frac{\Delta t_1}{2}$. Les résultats de stabilité sont préservés lorsque Δt_1 vérifie les conditions CFL (67) et (69), tandis que Δt_2 doit vérifier (68).

Pour conclure cette analyse du schéma MUSCL-Hancock, il faut noter que les limitations à apporter aux reconstructions de pente sont plus élaborées qu'à l'accoutumée. En effet, il faut imposer que $\mathbf{w}_i^{n,\pm}$, $\mathbf{w}_i^{*,\pm}$ et $\mathbf{w}_i^{*,*}$ appartiennent à Ω . Il est cependant possible de modifier les limiteurs usuels afin d'assurer toutes les conditions nécessaires. En notant δX l'incrément issu d'une reconstruction de pente standard (minmod, superbee, etc.) de la variable X , avec les notations introduites dans (65), les incréments des variables primitives sont modifiés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \max \left(-\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n}, \min \left(\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n}, \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^u \right) \right), \\
\Delta \rho &= \max \left(-\rho \sqrt{\frac{\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n} - \Delta u^2}{4\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n} - \Delta u^2}}, \right. \\
&\quad \left. \min \left(\rho \sqrt{\frac{\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n} - \Delta u^2}{4\frac{p_i^n}{\frac{3}{2}(\gamma-1)\rho_i^n} - \Delta u^2}}, \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^\rho \right) \right), \\
\Delta p &= \max \left(-\frac{1}{2} \left(p_i^n - \frac{3}{2}(\gamma-1) \frac{\Delta u^2}{\rho_i^n + 2\Delta \rho} ((\rho_i^n)^2 - \Delta \rho^2) \right), \right. \\
&\quad \left. \min \left(\frac{1}{2} \left(p_i^n - \frac{3}{2}(\gamma-1) \frac{\Delta u^2}{\rho_i^n - 2\Delta \rho} ((\rho_i^n)^2 - \Delta \rho^2) \right), \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^p \right) \right).
\end{aligned} \tag{71}$$

5.3 Schéma MUSCL pour des maillages 2D non-structurés [10]

Les résultats de stabilité des schémas MUSCL sont à présent étendus à des maillages 2D non-structurés, nécessaires pour des applications complexes. Dans un tel contexte, des résultats de stabilité ont été établis par Perthame-Qiu [99] pour une reconstruction de pente *conservative*. Ici, une restriction CFL et une limitation adéquates des pentes sont proposées afin d'assurer la robustesse des schémas MUSCL bidimensionnels et ce sans contrainte concernant le type de reconstruction (conservative ou non).

Une fois encore, le résultat de stabilité découle d'un remaillage du domaine et de l'introduction d'un état *fantôme* judicieusement choisi. Notons dès à présent, que le remaillage est un artefact de démonstration et que, lors de la mise en oeuvre informatique, il ne sera jamais nécessaire de le calculer.

Dans une cellule C_i , admettant $\Lambda(i)$ cellules adjacentes indexées $j(k)$, $1 \leq k \leq \Lambda(i)$, chaque arête séparant C_i et $C_{j(k)}$ est notée $\Gamma_{ij(k)}$ de normale unitaire sortante $\mathbf{n}_{ij(k)}$. L'état $\mathbf{w}_{ij(k)}$ désigne une approximation du second ordre de la solution dans la cellule C_i mais localisée sur l'arête $\Gamma_{ij(k)}$. Sous ces notations, le schéma MUSCL trouve la formulation

suivante :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} |\Gamma_{ij(k)}| \phi(\mathbf{n}_{ij(k)}, \mathbf{w}_{ij(k)}, \mathbf{w}_{j(k)i}), \quad (72)$$

où $\phi(\mathbf{n}, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ désigne la fonction flux numérique. Dans un souci de simplicité, l'invariance par rotation des équations d'Euler en deux dimensions d'espace permet d'écrire

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{n}, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) &= \phi\left(R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R\right), \\ &= \mathcal{R}^{-1} \mathbf{F}(\mathcal{R} \cdot \mathbf{w}_L, \mathcal{R} \cdot \mathbf{w}_R), \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}$ désigne une rotation unitaire, et

$$\mathcal{R} \cdot \mathbf{w} = (\rho, \rho \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \rho E).$$

Ici, $\mathbf{F}$ désigne la fonction flux numérique du schéma du premier ordre (62) vérifiant les propriétés P1, P2 et P3. Notons que, avec un certain abus de notation, le vecteur $\mathbf{w}$ désigne le vecteur des états pour les équations d'Euler 2D, i.e. avec vitesse tangentielle. Il en est de même pour la fonction flux numérique qui prend également en compte la vitesse tangentielle.

La cellule C_i est alors décomposée en $\Lambda(i) + 1$ sous-cellule comme présenté sur la figure 7.

Un état *fantôme* $\mathbf{w}_i^*$ est ensuite défini de la façon suivante :

$$\frac{|C_i^*|}{|C_i|} \mathbf{w}_i^* + \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} \frac{|C_{ij(k)}|}{|C_i|} \mathbf{w}_{ij(k)} = \mathbf{w}_i^n. \quad (73)$$

En calquant la démarche adoptée pour le schéma MUSCL en une dimension d'espace, un schéma d'ordre 1 de la forme :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} |\Gamma_{ij(k)}| \phi(\mathbf{n}_{ij(k)}, \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{j(k)}),$$

est appliqué sur le sous-maillage afin de faire évoluer en temps les états $\mathbf{w}_i^*$ et $\mathbf{w}_{ij(k)}$. Il apparaît alors clairement la relation suivante :

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \frac{|C_i^*|}{|C_i|} \mathbf{w}_i^{n+1,*} + \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} \frac{|C_{ij(k)}|}{|C_i|} \mathbf{w}_{ij(k)}^{n+1}, \quad (74)$$

où $\mathbf{w}_i^{n+1}$ est donné par (72).

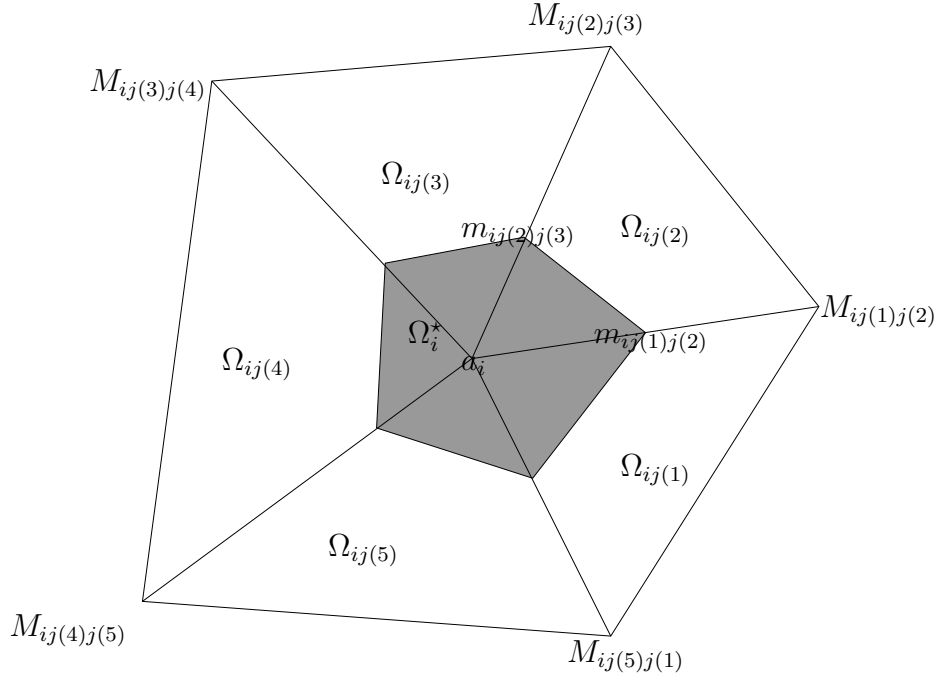


FIG. 7 – Décomposition en sous-cellules de la cellule C_i .

Il est alors possible d'établir le résultat suivant :

Theorem 5.3. Soit la suite $(\mathbf{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ donnée par (72) et supposons que les états $\mathbf{w}_i^n$, $\mathbf{w}_{ij}$ et $\mathbf{w}_i^*$ appartiennent à Ω . Pour chaque sous-cellule (C_{ij} ou C_i^*), décomposée en k triangles élémentaires T^k , on associe la restriction CFL suivante :

$$\Delta t \frac{|\Gamma^k|}{|T^k|} \max |\lambda^\pm(\mathbf{n}_{\Gamma^k}, \mathbf{w}_{\Gamma^k}^+, \mathbf{w}_{\Gamma^k}^-)| \leq 1,$$

où Γ^k est l'arête de T^k séparant deux sous-cellules distinctes et $\mathbf{w}_{\Gamma^k}^\pm$ les valeurs de part et d'autre de cette arête.

i) Si $\mathbf{w}_i^n \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors $\mathbf{w}_i^{n+1} \in \Omega$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

ii) Pour toute fonction $\mathcal{F}$ vérifiant (60), les inégalités discrètes d'entropie suivantes sont satisfaites :

$$\rho_i^{n+1} \mathcal{F}(\ln s_i^{n+1}) - \overline{\rho \mathcal{F}(\ln s)}_i^n + \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} |\Gamma_{ij(k)}| \varphi(\mathbf{n}_{ij(k)}, \mathbf{w}_{ij(k)}, \mathbf{w}_{j(k)i}) \leq 0,$$

où φ désigne la fonction flux d'entropie numérique et

$$\overline{\rho \mathcal{F}(\ln s)}_i^n = \frac{|C_i^*|}{|C_i|} \rho_i^* \mathcal{F}(\ln s_i^*) + \sum_{k=1}^{\Lambda(i)} \frac{|C_{ij(k)}|}{|C_i|} \rho_{ij(k)} \mathcal{F}(\ln s_{ij(k)}).$$

iii) L'entropie spécifique vérifie le principe du minimum suivant :

$$s_i^{n+1} \geq \min_{1 \leq k \leq \Lambda(i)} (s_i^*, s_{ij(k)}, s_{j(k)i}).$$

D'un point de vue pratique, il est important de noter que la construction des sous-cellules C_i^* et C_{ij} reste libre. Afin de faciliter la mise en oeuvre informatique, la condition suivante à été adoptée :

$$\frac{|C_i^*|}{|C_i|} = \frac{|C_{ij(k)}|}{|C_i|} = \frac{1}{\Lambda(i) + 1}.$$

A titre d'exemple, la figure 8 présente les résultats obtenus lors de la simulation de l'écoulement d'un gaz parfait à Mach 3 dans un tunnel avec une marche. Le lecteur est renvoyé à Woodward-Colella [120] pour une description complète de cette expérience numérique.

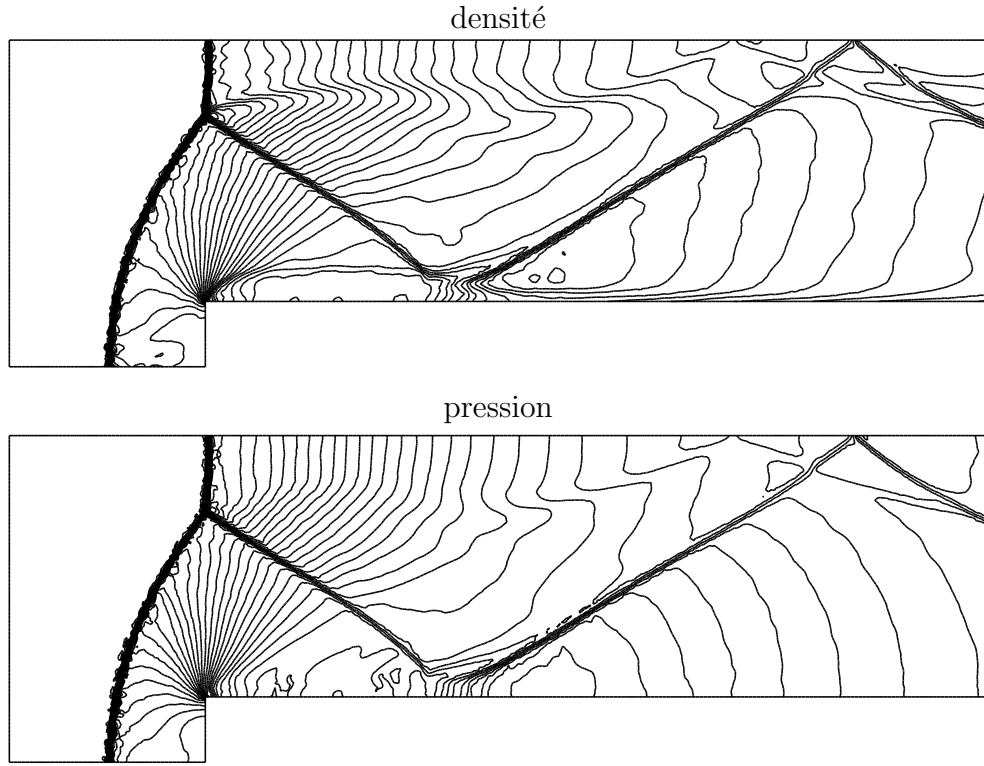


FIG. 8 – Ecoulement à Mach 3 dans un tunnel avec une marche. Densité et pression à la date $t = 4$.

6 Conclusion et perspectives

L'ensemble des travaux de recherche ayant conduit à la rédaction de ce mémoire aborde plusieurs domaines dont le thème central reste le développement et l'analyse de schémas volume fini pour des systèmes hyperboliques. Lors de la dérivation de ces méthodes numériques, une attention toute particulière a été portée sur la robustesse et la stabilité du schéma considéré. Deux axes principaux se sont dégagés.

Le premier axe concerne l'approximation numérique des solutions de systèmes non conservatifs en présence d'une régularisation parabolique. De nombreux écoulements compressibles et/ou multi-fluides reposent sur une formulation étendue des équations de Navier-Stokes : le modèle multi-entropie. Ce modèle est gouverné par un système hyperbolique non conservatif complété par une régularisation parabolique. Lorsque des profils de chocs visqueux sont étudiés, il est aisé de montrer que leur structure dépend intrinsèquement de l'opérateur de régularisation parabolique. Lors de l'approximation numérique, une prise en compte correcte de cette régularisation réclame soit l'utilisation d'un maillage d'une grande finesse, soit la mise en oeuvre d'un schéma adapté. La dérivation d'un schéma par projection nonlinéaire a conduit à une méthode numérique performante qui a trouvé plusieurs extensions et applications physiques.

Le second axe est dédié à la discrétisation de systèmes hyperboliques de lois de conservation. En développant des schémas de relaxation, plusieurs systèmes hyperboliques ont trouvé une formulation discrète robuste et stable. La robustesse de ces schémas est vérifiée même lorsque le système considéré est *faiblement stable* : faiblement hyperbolique ou raisonnant par exemple. De plus, ils sont précis ce qui les rend particulièrement attractifs pour de nombreuses applications physiques. Notons que certaines études ont mis en jeu d'autres schémas numériques que la relaxation. La simulation du transfert radiatif a nécessité le développement d'un schéma HLLC *asymptotic-preserving*. Une étude fine de la méthode a permis d'établir un ensemble de propriétés de stabilité satisfaites par la solution discrète et un comportement asymptotique adéquat. La méthode adoptée trouve une extension bidimensionnelle qui ne perturbe pas les propriétés de stabilité. Ce travail d'analyse sur les schémas conservatifs est complété par une étude des schémas du second ordre de type MUSCL. En effet, par l'introduction d'un état fantôme judicieusement choisi, les schémas MUSCL peuvent être compris comme une combinaison convexe d'états issus d'un schéma du premier ordre. Fort de cette remarque, il devient alors aisé d'étendre les propriétés de stabilité satisfaites par les schémas du premier ordre aux schémas d'ordre deux de type MUSCL. Des extensions sont ensuite proposées pour des maillages 2D non structurés ou encore pour des méthodes d'ordre deux en temps et en espace du type MUSCL-Hancock.

Toutes ces études ouvrent de nouvelles perspectives dans divers domaines d'application. A titre d'exemple, les travaux portant sur l'étude et la stabilisation des schémas MUSCL doivent être étendus à des schémas d'ordre d'approximation plus élevé. En effet,

dans certaines applications complexes, les schémas du second ordre avec limitation de pente engendrent des approximations numériques d'une précision médiocre, parfois comparable à des résultats issus de schémas du premier ordre. Depuis quelques années, de nouvelles méthodes d'ordre élevé (ENO, WENO, distribution de résidu ...) sont largement utilisées pour pallier les défauts des schémas MUSCL. Peu ou pas de résultats de stabilité sont proposés pour ces schémas. Sur la base des techniques mises en oeuvre pour prouver la robustesse des méthodes MUSCL, il faudra prouver que les approximations numériques d'ordre élevé sont robustes et stables. Les conséquences d'un tel résultat seraient nombreuses et lèveraient certaines ambiguïtés concernant les choix des paramètres utilisés dans ces méthodes.

D'autres axes de recherches doivent également être abordés. Par exemple, les schémas de relaxation ont montré leur capacité à approcher les solutions de systèmes ne vérifiant pas toutes les propriétés basiquement considérées (perte locale d'hyperbolicité, résonance ou encore faible hyperbolicité globale). Une extension naturelle est alors de considérer des systèmes hyperboliques où la fonction flux peut admettre des discontinuités. Dans le cas scalaire, de récents travaux étudient l'existence de la solution faible entropique. L'approximation numérique de ces solutions constitue un réel enjeu nécessaire à la réalisation de nombreuses simulations industrielles. En effet, certains modèles très élaborés (pour prendre en compte des physiques complexes) n'assurent pas toutes les propriétés de régularité nécessaires et entrent typiquement dans une telle analyse. Cette problématique intervient également dans les applications impliquant un couplage de modèles où la fonction flux n'est pas, en général, une fonction continue des inconnues.

Une autre extension qui doit être envisagée concerne l'approximation numérique des systèmes hyperboliques non conservatifs. En effet, le présent mémoire contient plusieurs travaux relatifs à un système non conservatif : le modèle multi-entropie. Ce système entre dans de nombreuses modélisations et le schéma par projection non linéaire lui est spécifiquement dédié. Bien entendu, beaucoup de modèles sont gouvernés par des systèmes non conservatifs pour lesquels le schéma par projection non linéaire ne peut pas être directement appliqué. De nouvelles extensions deviennent alors essentielles.

7 Travaux de l'auteur

Publications dans des revues avec comité de lecture

- [1] C. Berthon, F. Coquel, J.M. Hérard, M. Uhlmann, An approximate solution of the Riemann problem for a realisable second-moment turbulent closure, *Shock Waves*, 11, pp. 245–269 (2002).
- [2] C. Berthon, F. Coquel, Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, *Innovative methods for numerical solutions of partial differential equations (Arcachon, 1998)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, pp. 278–304 (2002).
- [3] C. Berthon, D. Reignier, A combustion model and approximate nonlinear projection scheme, *Math. Model. Numer. Anal.*, 37, pp. 451–478 (2003).
- [4] C. Berthon, B. Nkonga, Numerical model of a compressible multi-fluid fluctuating flow, *Int. J. finite volumes*, 2 (2005).
- [5] M. Baudin, C. Berthon, F. Coquel, R. Masson, Q. H. Tran, A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law, *Numer. Math.*, 99, pp. 411–440 (2005).
- [6] C. Berthon, Stability of the MUSCL schemes for the Euler equations, *Comm. Math. Sci.*, 3, pp. 133–158 (2005).
- [7] C. Berthon, M. Breuss, M.-O. Titeux, A relaxation scheme for pressureless gas dynamics, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 22, pp. 484–505 (2006).
- [8] C. Berthon, B. Nkonga, Multifluid numerical approximations based on multipressure formulation, *Comput. Fluids*, accepté.
- [9] C. Berthon, Numerical approximations of the 10-moment Gaussian closure, *Math. Comput.*, accepté.
- [10] C. Berthon, Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, accepté.
- [11] C. Berthon, Why the MUSCL-Hancock scheme is L^1 -stable, *Numer. Math.*, accepté.
- [12] C. Berthon, F. Coquel, Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, *Math. Comput.*, accepté.
- [13] C. Berthon, F. Coquel, Multiple solutions for compressible turbulent flow models, *Comm. Math. Sci.*, accepté.

- [14] C. Berthon, P. Charrier, B. Dubroca, An HLLC scheme to solve the M_1 model of radiative transfer in two space dimensions, *J. Sci. Comput.*, accepté.

Notes C.R.A.S.

- [15] C. Berthon, Schéma nonlinéaire pour l'approximation numérique d'un système hyperbolique non conservatif, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 335, pp. 1069–1072 (2002).
- [16] C. Berthon, Inégalités d'entropie pour un schéma de relaxation, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 340, pp. 63–68 (2005).
- [17] C. Berthon, P. Charrier, B. Dubroca, An asymptotic preserving relaxation scheme for a moment model of the radiative transfer, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, soumis.

Proceedings

- [18] C. Berthon, F. Coquel, Travelling wave solutions of a convective diffusive system with first and second order terms in nonconservation form, *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications, Vol. I (Zürich, 1998)*, Int. Ser. Numer. Math., 129, Birkhäuser, Basel, pp. 47–54 (1999).
- [19] C. Berthon, F. Coquel, Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, *Finite volumes for complex applications II: Problems and perspectives*, Hermes Science Publications, pp. 307–314 (1999).
- [20] C. Berthon, D. Reignier, Nonlinear projection methods to approximate combustion turbulent flows, *Comput. Fluids*, 33, pp. 679–685 (2004).
- [21] C. Berthon, B. Nkonga, Behavior of the finite volumes schemes in material and numerical interfaces, *In Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Hermes Science Publications, pp. 139–146 (2002).
- [22] C. Berthon, B. Braconnier, B. Nkonga, Numerical approximation of a degenerated non-conservative multifluid model: relaxation scheme, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 48, pp. 85–90 (2005).
- [23] C. Berthon, A stable gradient reconstruction for the MUSCL schemes applied to system of conservation laws, *J. Flow Turb. Comb.*, accepté.
- [24] B. Braconnier, C. Berthon, B. Nkonga, J. Claudel, A relaxation method based solver for multifluid flows with surface tension, *Proceedings of ENUMATH 2005*, Springer-Verlag, accepté.

Références

- [25] R. Abgrall, An extension of Roe's upwind scheme to algebraic equilibrium real gas models, *Comput. Fluids*, 19, pp. 171–182 (1991).
- [26] R. Abgrall, How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi-conservative approach *J. Comput. Phys.*, 125, pp. 150–160 (1996).
- [27] R. Abgrall, T.J. Barth, Residual distribution schemes for conservation laws via adaptive quadrature, *SIAM J. Sci. Comput.* 24, pp. 732–769 (2002).
- [28] R. Abgrall, S. Karni, Computations of compressible multifluids, *J. Comput. Phys.*, 169, pp. 594–623 (2001).
- [29] R. Abgrall, M. Mezhine, Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems, *J. Comput. Phys.*, 188, pp. 16–55 (2003).
- [30] D. Aregba-Driollet, R. Natalini, Convergence of relaxation schemes for conservation laws, *Appl. Anal.*, 61, pp. 163–190 (1996).
- [31] M. R. Baer, J. W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deagration-to-detonation transition (DTR) in reactive granular materials *International J. Multiphase Flows*, 12, pp. 861–889 (1986).
- [32] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, D. M. Causon, On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver, *SIAM J. Sci. Comput.*, 18, pp. 1553–1570 (1997).
- [33] R.A. Baurle, S.S. Girimaji, An assumed PDF Turbulence-Chemistry closure with temperature-composition correlations, 37th Aerospace Sciences Meeting (1999).
- [34] M. Ben-Artzi, J. Falcovitz, A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics, *J. Comput. Phys.*, 55, pp. 1–32 (1984).
- [35] S. Benzoni-Gavache, Analyse numérique des modèles hydrodynamiques d'écoulements diphasiques instationnaires dans les réseaux de production pétrolière, Thèse de doctorat, ENS Lyon (1991).
- [36] F. Bouchut, Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models, *Numer. Math.*, 94, pp. 623–672 (2003).
- [37] F. Bouchut, Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources, *Frontiers in Mathematics series*, Birkhäuser (2004).
- [38] F. Bouchut, On zero pressure gas dynamics, *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, World Scientific, 22, pp. 171–190 (1994).
- [39] F. Bouchut, G. Bonnaud, Numerical Simulation of Relativistic Plasmas in Hydrodynamic Regime, *ZAMM*, 76, pp. 287–290 (1996).
- [40] F. Bouchut, Ch. Bourdarias, B. Perthame, A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities, *Math. Comp.*, 65, pp. 1439–1461 (1996).
- [41] F. Bouchut, F. James, Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness, *Comm. Partial Diff. Eq.*, 24, pp. 2173–2189 (1999).

- [42] F. Bouchut, S. Jin, X. Li, Numerical approximations of pressureless and isothermal gas dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.*, 41, pp. 135–158 (2003).
- [43] A. Bourgeade, P. LeFloch, P.-A. Raviart, An asymptotic expansion for the solution of the generalized Riemann problem. II. Application to the equations of gas dynamics, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6, pp. 437–480 (1989).
- [44] C. Buet, S. Cordier, Asymptotic preserving scheme and numerical methods for radiative hydrodynamic models, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 338, pp. 951–956 (2004).
- [45] C. Buet, B. Després, Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 85, pp. 385–418 (2004).
- [46] C. Buet, B. Després, Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics, Hyke preprint (2005).
- [47] T. Buffard, T. Gallouët, J.-M. Hérard, A sequel to a rough Godunov scheme. Application to real gas flows, *Comput. Fluids*, 29, pp. 813–847 (2000).
- [48] M. Castro, J. Macas, C. Pars, A Q -scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system, *Math. Model. Numer. Anal.*, 35, pp. 107–127 (2001).
- [49] P. Charrier, B. Dubroca, G. Duffa and R. Turpault, Multigroup model for radiating flows during atmospheric hypersonic re-entry, *Proceedings of International Workshop on Radiation of High Temperature Gases in Atmospheric Entry*, Lisbonne, Portugal, pp. 103–110 (2003).
- [50] G.-Q. Chen, C.D. Levermore, T.P. Liu, Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Relaxation Terms and Entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, 47, pp. 787–830 (1995).
- [51] G.-Q. Chen, H. Liu, Formation of δ -Shocks and Vacuum States in the Vanishing Pressure Limit of Solutions to the Euler Equations for Isentropic Fluids, *SIAM J. Math. Anal.*, 34, pp. 925–938 (2003).
- [52] C. Chalons, Bilans d’entropie discrets dans l’approximation numérique des chocs non classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et quelques systèmes visco-capillaires, Thèse de l’Ecole polytechnique (Paris, France) (2002).
- [53] P. Colella, Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 87, pp. 171–200 (1990).
- [54] J. F. Colombeau, A. Y. Leroux, Nonconservative products in bounded variation functions, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, pp. 941–949 (1992).
- [55] J. F. Colombeau, A. Y. Leroux, A. Noussair and B. Perrot, Microscopic profiles of shock waves and ambiguities in multiplications of distributions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 26, pp. 871–883 (1989).
- [56] F. Coquel, P. LeFloch, An entropy satisfying MUSCL scheme for systems of conservation laws, *Numer. Math.*, 74, pp. 1–33 (1996).
- [57] F. Coquel, B. Perthame, Relaxation of Energy and Approximate Riemann Solvers for General Pressure Laws in Fluid Dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, pp. 2223–2249 (1998).

- [58] G. Dal Maso, P. LeFloch, F. Murat, Definition and weak stability of a non conservative product, *J. Math. Pures Appl.*, 74, pp. 483–548 (1995).
- [59] B. Dubroca, J.-L. Feugeas, Hierarchie de modèles aux moments pour le transfert radiatif, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 329, pp. 915–920 (1999).
- [60] L. J. Durlofsky, B. Engquist, S. Osher, Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 98, pp. 64–73 (1992).
- [61] I. Faille, E. Heintzé, A rough finite volume scheme for modeling two phase flow in a pipeline, *Comput. Fluids*, 28, pp. 213–241 (1999).
- [62] T. Flatten, T. Munkejord, the approximate Riemann solver of Roe to drift-flux two-phase flow model, preprint (2006).
- [63] T. Gallouët, J.-M. Hérard, N. Seguin, Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography, *Comput. Fluids*, 32, pp. 479–513 (2003).
- [64] T. Gallouët, J.-M. Hérard, N. Seguin, Some recent finite volume schemes to compute Euler equations using real gas EOS, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 39, pp. 1073–1138 (2002).
- [65] T. Gallouët, T. Masella, A rough Godunov scheme, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 323, pp. 77–83 (1996).
- [66] E. Godlewski, P.A. Raviart, Hyperbolic systems of conservation laws, SMAI (Eds), Ellipse (1991).
- [67] E. Godlewski, P.A. Raviart, Hyperbolic systems of conservation laws, *Applied Mathematical Sciences*, 118, Springer (1996).
- [68] L. Gosse, G. Toscani, Asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 334, pp. 337–342 (2002).
- [69] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III, *J. Comput. Phys.*, 71, pp. 231–303 (1987).
- [70] A. Harten, P.D. Lax, B. Van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Review*, 25, pp. 35–61 (1983).
- [71] J. F. Haas, B. Sturtevant, Interaction of a weak shock wave with cylindrical and spherical gas inhomogeneities, *J. Fluid Mech.*, 181, pp. 41–76 (1987).
- [72] B.T. Hayes, P.G. LeFloch, Non-classical shocks and kinetic relations: scalar conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 139, pp. 1–56 (1997).
- [73] B.T. Hayes, P.G. LeFloch, Nonclassical shocks and kinetic relations: strictly hyperbolic systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 31, pp. 941–991 (2000).
- [74] C. Hirsh, Numerical computation of internal and external flows, Ed. Wiley and Sons (1990).
- [75] T. Y. Hou, P. G. LeFloch, Why non-conservative schemes converge to wrong solutions: error analysis, *Math. Comput.*, 206, pp. 497–530 (1994).

- [76] S. Jin, Z. Xin, The Relaxation Scheme for Systems of Conservation Laws in Arbitrary Space Dimension, *Comm. Pure Appl. Math.*, 45, pp. 235–276 (1995).
- [77] S. Karni, A multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm, *J. Comput. Phys.*, 112, pp. 31–43 (1994).
- [78] S. Karni, Hybrid multifluid algorithms, *SIAM J. Sci. Comput.*, 17, pp. 1019–1039 (1996)
- [79] S. Karni, Viscous shock profiles and primitive formulations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29, pp. 1592–1609 (1992).
- [80] B. Khobalatte, B. Perthame, Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes, *Math. Comput.*, 62, pp. 119–131 (1994).
- [81] F. Lagoutière, Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants, Thèse de l’Université Paris VI (2000).
- [82] B. Larrouturou, How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows, *J. Comput. Phys.* 95, pp. 59–84 (1991).
- [83] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 11, SIAM, Philadelphia (1973).
- [84] P. D. Lax, Shock waves and entropy, *Contributions to nonlinear functional analysis*, E. H. Zarantonello, Ed., pp. 603–634 (1971).
- [85] R. J. LeVeque, Finite volume methods for hyperbolic problems, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [86] P.G. LeFloch, Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under non conservation form, *Comm. Part. Diff. Equa.*, 13, pp. 669–727 (1988).
- [87] P.G. LeFloch, Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in non-conservative form, *IMA*, preprint 593, University of Minnesota (1989).
- [88] P.G. LeFloch, Sur quelques problèmes hyperboliques nonlinéaires, Thèse d’habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie (1990).
- [89] P.G. LeFloch, T. P. Liu, Existence theory for non-linear hyperbolic systems in non-conservative form, *Forum math.*, 5, pp. 261–280 (1993).
- [90] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method, *J. Comput. Phys.*, 32, pp. 101–136 (1979).
- [91] B. van Leer, On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 5, pp. 1–20 (1984).
- [92] C.D. Levermore, Moment closure hierarchies for kinetic theory, *J. Statist.. Phys.*, 83, pp. 1021–1065 (1996).
- [93] C.D. Levermore and W.J. Morokoff The Gaussian moment closure for gas dynamics, *SIAM J. Appl. Math.*, 59, pp. 72–96 (1998).
- [94] T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation, *Comm. Math. Phys.*, 108, pp. 153–175 (1987).

- [95] D. Mihalas and G. W. Mihalas, *Foundation of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, 1984.
- [96] B. Mohammadi, O. Pironneau, Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model, *Research in Applied Mathematics*, Masson Eds (1994).
- [97] R. Natalini, Convergence to equilibrium for the relaxation approximation of conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 49, pp. 1–30 (1996).
- [98] B. Perthame, Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29, pp. 1–19 (1992).
- [99] B. Perthame, Y. Qiu, A variant of Van Leer’s method for multidimensional systems of conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 112, pp. 370–381 (1994).
- [100] B. Perthame, C.-W. Shu, On positivity preserving finite volume schemes for Euler equations, *Numer. Math.*, 73, pp. 119–130 (1996).
- [101] G.C. Pomraning, *The Equations of Radiation Hydrodynamics*, Sciences Application, 1973.
- [102] J. Quirk, S. Karni, On the dynamics of a shock-bubble interaction, *J. Fluid Mech.*, 318, pp. 129–163 (1996).
- [103] P.-A. Raviart, L. Sainsaulieu, A nonconservative hyperbolic system modeling spray dynamics. I: Solution of the Riemann problem, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5, pp. 297–333 (1995).
- [104] J.-F. Ripoll, An averaged formulation of the M1 radiation model with presumed probability density function for turbulent flows, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 83, pp. 493–517 (2004).
- [105] J.-F. Ripoll, B. Dubroca and E. Audit, A factored operator method for solving coupled radiation-hydrodynamics models, *Trans Theory and Stat Phys*, 31, pp. 531–557 (2002).
- [106] M. Ricchiuto, A. Csik, H. Deconinck, Residual distribution for general time-dependent conservation laws, *J. Comput. Phys.* 209, pp. 249–289 (2005).
- [107] P.L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 43, pp. 357–372 (1981).
- [108] R. Sanders, A. Weiser, High resolution staggered mesh approach for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 101, pp. 314–329 (1992).
- [109] L. Sainsaulieu, Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 312, pp. 491–494 (1991).
- [110] D. Serre, *Systems of conservation laws. I: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Translated from the French by I. N. Sneddon, Cambridge (1999).
- [111] C.-W. Shu, High-order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD, *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 17, pp. 107–118 (2003).

- [112] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *J. Comput. Phys.*, 77, pp. 439–471 (1988).
- [113] I. Suliciu, On modelling phase transitions by means of rate-type constitutive equations, shock wave structure, *Int. J. Engrg. Sci.*, 28, pp. 829–841 (1990).
- [114] I. Suliciu, Some stability-instability problems in phase transitions modelled by piecewise linear elastic or viscoelastic constitutive equations, *Int. J. Engrg. Sci.*, 30, pp. 483–494 (1992).
- [115] E. Tadmor, A minimum entropy principle in the gas dynamics equations, *Appl. Numer. Math.*, 2, pp. 211–219 (1986).
- [116] E. F. Toro, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction, Second edition. Springer-Verlag, Berlin (1999).
- [117] E. F. Toro, M. Spruce, W. Speare, Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver, *Shock waves*, 4, pp. 25–34 (1994).
- [118] R. Turpault, Numerical Solution of Radiative Transfer Equation with Finite Volumes, *Proceedings of Finite Volume for Complex Applications III*, Hermes Edition, pp. 695–702 (2002).
- [119] R. Turpault, A consistent multigroup model for radiative transfer and its underlying mean opacity, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 94, pp. 357–371 (2005).
- [120] P. Woodward, P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.*, 54, pp. 115–173 (1984).
- [121] J. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New-York (1974).
- [122] Ya. B. Zeldovich, Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations, *Astron. Astrophys*, 5, pp. 84–89 (1970).
- [123] N. Zuber, J. Findlay, Average volumetric concentration in two-phase flow systems, *J. Heat Transfer*, 87, pp. 453–458 (1965).