

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Analyse Numérique

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité: **Analyse Numérique**

présentée par

Christophe BERTHON

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse:

**Contribution à l'analyse numérique
des équations de Navier-Stokes compressibles
à deux entropies spécifiques.
Applications à la turbulence compressible.**

Soutenue le 22 janvier 1999, devant le jury composé de:

Frédéric COQUEL	
Thierry GALLOUET	(Rapporteur)
Philippe LE FLOCH	(Rapporteur)
Benoit PERTHAME	(Président)
Lionel SAINSAULIEU	(Directeur de thèse)
Jean Pierre VEUILLOT	

à mon père
à Sophie et Sébastien

Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Lionel SAINSAULIEU et Frédéric COQUEL qui ont su me communiquer leur intérêt pour les systèmes hyperboliques et les problèmes numériques qui leurs sont liés. Tous deux ont su orienter mes études dans ce sens et c'est tout naturellement que j'ai souhaité réaliser une thèse sur ce sujet. Lionel SAINSAULIEU a accepté de diriger ce travail. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance pour leur intérêt et leur bienveillance qu'ils m'ont témoigné. Les encouragements et les conseils, toujours très fructueux, qu'ils m'ont prodigués m'ont été précieux. L'occasion m'est donc offerte de leur exprimer mon admiration pour leurs grandes qualités scientifiques et humaines.

Mes plus vifs remerciements sont aussi adressés à messieurs Thierry GALLOUET et Philippe LEFLOCH qui ont bien voulu rédiger un rapport sur ce travail. Je remercie monsieur Benoit PERTHAME d'avoir accepté de présider le jury et je suis heureux que monsieur Jean-Pierre VEUILLOT ait accepté de participer au jury.

Je remercie chaleureusement Jean-Pierre VEUILLOT, Laurent CAMBIER, Claude MARMIGNON et Isabelle CHOQUET qui m'ont accueilli au sein de leur équipe au département DSNA de l'ONERA et qui ont toujours porté le plus vif intérêt sur mon travail.

Je remercie l'Aérospatiale en la personne de François CORON qui a suivi, tout au long de cette thèse, l'avancement des travaux et y a porté le plus vif intérêt.

Je tiens, également, à remercier vivement monsieur Jean-Marc HERARD. Ses connaissances tant en mécanique de fluides compressibles qu'en analyse numérique ainsi que son enthousiasme m'ont été d'un grand recours.

Enfin et pour conclure, j'exprime ma profonde reconnaissance à tous les thésards et ex-thésards sans qui ma thèse aurait été un long fleuve tranquille : Christophe DROZO, Christophe BENOIT, Alain BROU, Vincent GLEIZE, Olivier ROUZAUD, Frédéric LECHUITON, Valérie NASTASI, Pascal LARRIEU, Guillaume THIERRY, Nicolas HURE et tous les autres ...

J'ajoute un grand merci à Vincent GLEIZE qui a bien voulu se plier aux règles du jeu et n'a utilisé que 2936 jokers sur les 3000 qui lui avaient été impartis pour ne pas répondre à mes questions. Toutefois, les réponses qu'il a bien voulu m'accorder ont toujours été d'une grande pertinence et m'ont permis de comprendre la signification de ce qui n'était, à mes yeux, que de "simples" équations.

Les travaux réunis dans cette thèse traitent de l’approximation numérique des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles à plusieurs températures, ou encore suivant le contexte, à plusieurs lois de pressions.

Par plusieurs températures ou plusieurs lois de pression, il faut entendre ici que les solutions régulières des systèmes considérés vérifient simultanément et sans condition supplémentaire des lois d’évolution gouvernant autant d’entropies spécifiques indépendantes que de températures ou de lois de pression.

Ces systèmes constituent des extensions naturelles des équations de Navier-Stokes à une seule loi de pression. La pression totale apparaît comme la somme de plusieurs pressions indépendantes; chacune étant associée à une loi d’évolution formellement analogue à celle gouvernant la pression dans le cadre 3×3 usuel.

Les systèmes ainsi obtenus répondent à de nombreuses modélisations complexes. Ils sont par exemple rencontrés dans la physique des plasmas où la température des électrons doit être distinguée de la température de mélange des autres espèces. Ils peuvent également être identifiés en tant que tels dans de nombreux modèles de turbulence compressible où il faut distinguer la température thermodynamique (moyennée) de la température d’agitation turbulente.

Par opposition aux équations de Navier-Stokes à une seule loi de pression, les systèmes considérés n’admettent pas, sauf hypothèse de modélisation restrictive, de formulation conservative équivalente pour les solutions régulières. Des produits non conservatifs, de nature différente, persisteront lors de changements de variable licites.

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie, nous nous consacrons à l’analyse de ces systèmes lorsque deux entropies spécifiques sont impliquées, en étudiant l’existence des solutions onde progressive sous diverses hypothèses de modélisation relatives aux phénomènes de dissipation et de diffusion. Cette étude inclut en particulier des modèles de turbulence compressible homogène et isotrope.

Dans la seconde partie, nous étudions l’approximation numérique des solutions onde progressive associées à une classe générique de systèmes à deux entropies spécifiques. Nous introduisons des méthodes de type Godunov dites par projection nonlinéaire par opposition aux méthodes de type Godunov par projection L^2 , *i.e.* purement linéaire, telles que traditionnellement invoquées dans le contexte d’un système conservatif. La technique de projection nonlinéaire, que nous proposons, est directement motivée par le respect d’une condition de saut généralisée que nous exhiberons. Nous montrons qu’une telle condition de saut généralisée ne peut pas être satisfaite, en un sens à préciser, par une méthode par projection L^2 .

Nous appliquons ensuite cette méthode par projection nonlinéaire à l’approximation numérique des solutions de trois classes de modèles de turbulence compressible dits à “deux équations de transport”.

Sont comparées numériquement à la méthode par projection nonlinéaire, la méthode la plus couramment mise en oeuvre et reposant sur une approche pseudo-conservative ainsi que la méthode de type Godunov par projection L^2 respectant, elle, l'intégrité de l'opérateur du premier ordre extrait. Nous donnons de nombreuses applications numériques, impliquant systématiquement une comparaison des solutions discrètes à des solutions exactes, afin d'illustrer l'intérêt de cette nouvelle approche.

La troisième partie est complètement indépendante. Elle peut être comprise comme un exercice académique permettant d'exhiber un formalisme cinétique de type B.G.K. pour un système incluant le système Euler 3×3 usuel. Il s'agit en l'occurrence du système pseudo-conservatif tel que considéré classiquement pour le modèle de turbulence (k, ϵ) . Un tel formalisme est ensuite appliqué à la construction de schémas cinétiques.

1 Motivations générales des travaux

Ce travail est dédié à l'approximation numérique d'une classe de solutions des équations de Navier-Stokes compressibles à deux lois de pression :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1) p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2 + (\gamma - 1) (\partial_x \kappa \partial_x T), \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1) p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\gamma_\tau - 1) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau), \end{cases} \quad (1)$$

où les températures impliquées trouvent les définitions suivantes : $T = p/\rho$ et $T_\tau = p_\tau/\rho$. Les exposants adiabatiques γ et γ_τ sont supposés dans toute la suite désigner des constantes réelles supérieures à 1.

Les équations considérées seront toujours supposées être sous forme adimensionnée. Il s'ensuit donc que les notations μ , μ_τ , κ et κ_τ désignent respectivement des nombres de Reynolds et des nombres de Prandtl. Par abus de langage nous continuerons à appeler ces fonctions des inconnues : viscosités et conductivités thermiques, puisque nous continuerons à appeler les inconnues par leur dénomination dimensionnée (*i.e.* densité, pressions, etc). Ces équations sont formulées ici en se plaçant sous l'hypothèse simplificatrice mais non restrictive d'une seule dimension d'espace.

Notons que les solutions régulières du système (1) satisfont simultanément et sans condition supplémentaire sauf à se placer loin du vide, hypothèse que nous ferons toujours, les deux lois d'évolution suivantes en complète symétrie :

$$\partial_t s + u \partial_x s = \frac{(\gamma - 1)}{\rho^\gamma} \left\{ \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \kappa \partial_x T) \right\}, \quad (2.i)$$

$$\partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau = \frac{(\gamma_\tau - 1)}{\rho^{\gamma_\tau}} \left\{ \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau)) \right\}. \quad (2.ii)$$

Ici, les deux entropies spécifiques impliquées trouvent la définition suivante :

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad \text{et} \quad s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}.$$

L'existence de ces deux lois nous conduit à appeler le système (1) : équations de Navier-Stokes compressibles à deux entropies spécifiques.

Notons de même que ces deux lois coexistent avec la (seule) loi de conservation supplémentaire suivante, encore vérifiée par les solutions régulières de (1) :

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \quad (3)$$

où ρE , énergie totale du gaz, est définie par la loi d'état :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} + \frac{(\rho u)^2}{2\rho}. \quad (4)$$

Suivant le choix des fonctions viscosités et des fonctions conductivités thermiques, ce système d'équations correspond en réalité à plusieurs modèles de la mécanique des gaz compressibles. Avant de les préciser succinctement, il importe de noter dès maintenant que contrairement aux équations de Navier-Stokes à une seule entropie thermodynamique, les équations considérées forment un système sous forme non conservative. Ainsi que nous le verrons et sans hypothèse de modélisation restrictive (par exemple, $\gamma = \gamma_\tau$), il n'est pas possible d'exhiber un système équivalent pour les solutions régulières sous forme complètement conservative. En effet, subsisteront généralement des produits non conservatifs du premier ordre : *i.e.* impliquant des produits entre les inconnues et leurs dérivées premières, et/ou des produits non conservatifs du second ordre : *i.e.* entre les inconnues et leurs dérivées secondes. Notons que, bien entendu, le produit non conservatif $\mu(\partial_x u)^2$ est bien du second ordre puisqu'il s'écrit en variables u :

$$\mu(\partial_x u)^2 = \partial_x (\mu u \partial_x u) - u \times \partial_x (\mu \partial_x u).$$

L'origine de tels produits résulte communément d'une hypothèse de modélisation visant à éviter la description explicite de petites échelles pour en restituer, localement, un effet moyen.

Mais en retour, l'existence de tels produits interdit les formulations affaiblies usuelles pour le système d'équations (1) et pour les mêmes raisons rend inopérante *a priori* les théories les plus classiques d'approximation numérique puisqu'ils interdisent toute formulation variationnelle et donc une formulation faible au sens des distributions.

Il pourrait paraître surprenant d'invoquer la théorie des distributions. Soulignons que notre propos réside bien dans l'approximation d'une classe de solutions du système complet (1) : *i.e.* de la régularisation parabolique d'un opérateur du premier ordre que nous verrons être hyperbolique.

Nous soulignons ici la difficulté qu'induit l'absence de formulation faible classique pour trois raisons. Nous détaillons ci-dessous ces trois raisons afin d'éclairer la principale motivation de ce travail.

Les raisons, explicitées ci-dessous, sont connues du lecteur averti de la théorie des produits non conservatifs ainsi que des difficultés numériques qu'ils induisent. Leurs discussions ne lui sont pas destinées. Ces raisons s'appuient fortement sur différents travaux que nous rapporterons succinctement à l'occasion de quelques paragraphes. Toutefois et en aucun cas, ceux-ci ne peuvent constituer une introduction aux problématiques discutées. Le lecteur est systématiquement renvoyé dans ce but aux travaux des auteurs que nous citons.

1.1 Absence de formulation faible classique et conséquences

La première raison tient précisément de ce que le système (1) admet des solutions naturellement discontinues : en un point x_0 , la densité ρ ainsi que les pressions p et p_τ peuvent présenter un saut arbitraire (en l'absence de conduction thermique), la vitesse u ainsi que la somme des pressions $p + p_\tau$ étant continues. Nous appellerons, avec un certain abus de langage, de telles fonctions discontinues : discontinuités de contact. Cette constatation motivera l'introduction d'une classe de fonctions, certes restrictives, puisque $\mathcal{C}^2$ par morceaux mais qui est précisément celle attendue dans le calcul. Du moins, celui qui nous préoccupe ici. Bien que la théorie classique des distributions soit inopérante, nous constaterons que les discontinuités de contact, comprises comme fonctions $\mathcal{C}^2$ par morceaux, ne conduisent qu'à devoir toujours multiplier deux fonctions (possiblement discontinues) dans chacun des produits non conservatifs impliqués. Il n'y a donc pas d'ambiguïté et nous parlerons dans toute la suite de solutions discontinuité de contact.

La seconde raison tient de ce qu'il est impératif, avant tout calcul sur ordinateur, de s'assurer qu'il n'existe pas d'autres fonctions discontinues, candidates à être solutions naturelles : *i.e.* il s'agit de garantir que le choix des fonctions viscosités et des fonctions conductivités thermiques conduit effectivement à une régularisation parabolique. Ce choix doit interdire à la vitesse u de devenir discontinue en un point x_0 . En d'autres termes, les solutions onde de choc du système hyperbolique extrait (fonctions discontinues) doivent être régularisées, et ce globalement, pour conduire à des solutions onde progressive du système complet (1) (fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sous des hypothèses de régularité *ad hoc* sur μ , μ_τ , κ et κ_τ). Cette fois et par opposition aux solutions discontinuité de contact, les produits non conservatifs deviendraient ambigus au sens des distributions. De cette ambiguïté résulterait que les fonctions discontinues devant être considérées ne sont pas définies de manière unique et ce quelque soit le cadre mathématique adopté (voir par exemple P.G. Le Floch [44], Dal Maso-Le Floch-Murat [20] et également J.F. Colombeau et A.Y. Leroux [9]). On ne peut donc en aucun cas parler de solution et il est dès lors illusoire de chercher à approcher de telles fonctions discontinues. Conformément à la théorie des systèmes hyperboliques sous forme non conservative développée par Le Floch [44] (voir également

Raviart-Sainsaulieu [58]), il est indispensable de considérer une autre modélisation des phénomènes dissipatifs conduisant à une régularisation parabolique effective.

La troisième raison est exclusivement d'ordre numérique. L'existence des solutions onde progressive ayant été acquise pour un choix adéquat de fonctions viscosités et de fonctions conductivités thermiques, il reste la difficulté de les approcher numériquement sans devoir recourir à un niveau de raffinement en espace rédhibitoire dans la pratique. Notons, en effet, que l'hypothèse d'un nombre de Reynolds grand devant 1, incontournable dans les modèles qui nous préoccupent dans ce mémoire, conduit les profils discrets approchant les solutions onde progressive à tenir bien plus de profils discrets pour les solutions onde de choc sous-jacentes. Le gradient de la solution discrète étant largement sous-résolu pour un niveau de raffinement réaliste, l'approximation numérique des solutions onde progressive relève de la même difficulté que celle induite par la capture des solutions onde de choc associées. L'examen de la figure suivante suffit à en attester et convaincra le lecteur que la méthode des volumes finis est adaptée à notre propos puisqu'il s'agit dans les faits de solutions discrètes discontinues. Le problème numérique, rapporté ci-dessous, correspond aux équations de Navier-Stokes compressibles usuelles pour un nombre de Mach et un nombre de Reynolds respectivement égaux à 7 et 10^3 . Soulignons que cette dernière valeur est de deux ou trois ordres de grandeur inférieure aux nombres de Reynolds typiquement rencontrés en aérodynamique.

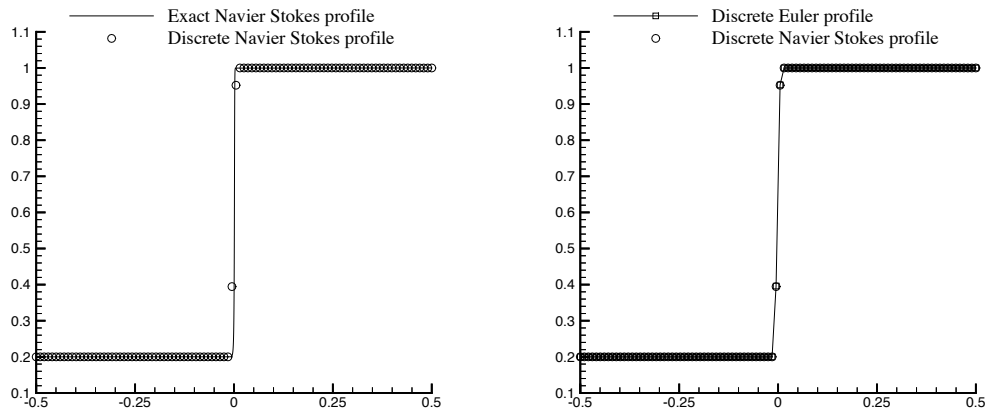


FIG. 1 - *Density profile for Navier-Stokes and Euler equations*

Ce résultat numérique, ici rapporté au titre de troisième raison, implique une nouvelle difficulté exclusivement liée à la nature non conservative du système (1). Les méthodes de volumes finis qui pourront lui être associées seront en effet *ipso facto* sous forme non conservative. Ces méthodes sortent donc du cadre classique du Théorème de Lax-Wendroff

(voir par exemple Godlewski-Raviart [25], [26]). Il importe dès lors de souligner qu'en conséquence, si la famille de solutions discrètes converge pour une topologie convenable vers une limite, alors nous ne sommes plus assurés que cette limite est solution, en un sens adéquat, du système (1). Ce résultat négatif est, bien entendu, en complète opposition avec celui positif établi au titre d'équations purement conservatives. Nous reviendrons sur ce point à l'occasion de cette introduction générale en rapportant trois contributions à l'analyse numérique des systèmes hyperboliques sous forme non conservative. De manière à illustrer la précédente affirmation, nous proposons au lecteur d'examiner les résultats numériques suivants :

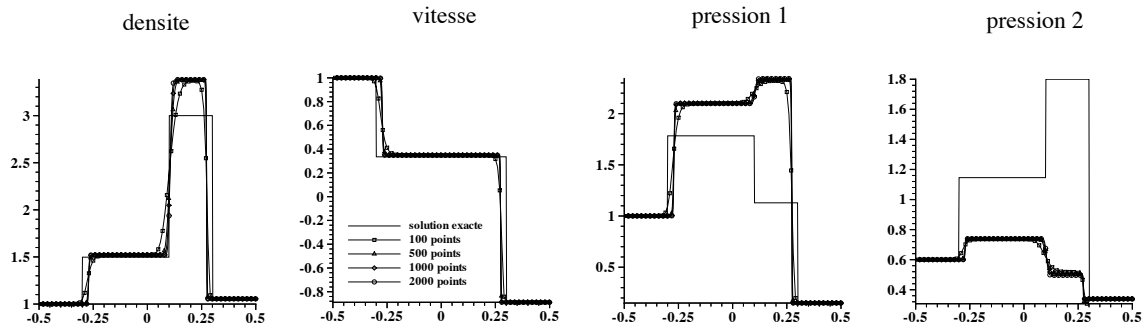


FIG. 2 - *Contre exemple à la validité du Théorème de Lax Wendroff dans le cadre non conservatif*

Le problème considéré est construit sur le système non conservatif (1) pour un choix très simple de deux viscosités constantes et strictement positives, les conductivités thermiques étant choisies toutes deux nulles. Ce problème correspond au cas D décrit en détail à la section 7 du chapitre 4. Les solutions discrètes présentées ont été obtenues en utilisant la méthode d'approximation que nous qualifierons dans la suite de classique pour quatre niveaux de raffinements impliquant de 100 à 2000 points. Les solutions discrètes semblent coïncider avec une fonction, en restant insensibles aux niveaux de raffinement proposés. Cette fonction est toutefois très éloignée de la solution exacte attendue, figurée ici en trait plein.

L'objet de cette thèse consiste donc à étudier le système (1) pour différents choix de fonctions viscosités et de fonctions conductivités pour ensuite en proposer une approximation numérique adéquate dans le contexte des méthodes de volumes finis.

1.2 Quelques modèles physiques répondant au système (1)

Au titre des modèles physiques répondant au système considéré, nous mentionnons dans un premier temps certains modèles de turbulence compressible : le modèle de lon-

gueur de mélange turbulent imposée ainsi que les modèles dits à “deux équations de transport”. Nous verrons que de tels modèles s’inscrivent bien dans le cadre des équations ici considérées. Ces modèles sont caractérisés par un nombre de Reynolds grand devant 1 (typiquement de l’ordre de 10^6) ainsi qu’un rapport de viscosités μ_τ/μ variant de très petit devant 1 à très grand devant 1, la viscosité turbulente μ_τ étant une fonction fortement nonlinéaire des inconnues. Un résultat d’existence globale des solutions onde progressive sera donné dans ce mémoire sous différentes hypothèses de modélisation.

Un autre modèle, très éloigné, est motivé par la physique des plasmas lorsque la longueur de Debye est supposée être très petite devant une échelle de longueur de référence. Pour certains régimes d’écoulement, l’une des viscosités et la conductivité thermique associée peuvent être négligées (pour fixer les idées μ_τ et κ_τ) en conduisant le système (1) à devenir équivalent pour les solutions régulières à un système sous forme complètement conservative. Les solutions onde progressive associées existent globalement et les approximations numériques reposent sur les méthodes de volumes finis habituels (voir par exemple [13]). Pour un autre régime d’écoulement, l’une des conductivités thermiques devient très grande, pour fixer les idées κ_τ , devant μ , μ_τ et κ . L’hypothèse de modélisation consistant à mettre ces dernières formellement à zéro, conduit le système résultant à être sous forme non conservative et les solutions onde progressive à développer généralement des discontinuités dites de choc isotherme (cf. Zel’Dovich [74]). En conséquence, nous rappelons que de telles solutions ne sont pas définies de manière unique et qu’il est dès lors illusoire de vouloir en approcher l’une d’entre elles numériquement.

Nous aurions pu considérer des extensions immédiates du système (1) en considérant plus de deux lois de pressions. Nous ignorons toutefois à quel type de modélisation un tel système pourrait répondre. Nous nous en sommes donc tenu à exposer le cas de deux lois de pressions. Soulignons toutefois que l’extension de la méthode numérique que nous associerons à ce dernier cas, trouve une extension claire et immédiate.

1.3 Forme conservative versus forme non conservative

Il est utile de rappeler pour ne plus y revenir la différence distinguant de manière essentielle un système sous forme conservative d’un système sous forme non conservative. Cette distinction est à la base de récents travaux consacrés aux systèmes hyperboliques sous forme non conservative. Nous renvoyons par exemple le lecteur à P.G. Le Floch [44], Dal Maso-Le Floch-Murat [20] pour la définition de produits non conservatifs et son application à la définition de solutions onde de choc. Nous renvoyons à Sainsaulieu [61] et Raviart-Sainsaulieu [58] pour leurs travaux consacrés à des systèmes de type convectif-diffusif impliquant des produits non conservatifs du premier ordre et répondant à la modélisation des écoulements diphasiques.

Nous renvoyons également le lecteur pour une autre approche à J.F. Colombeau et A.Y. Leroux [9], Colombeau-Leroux-Noussair-Perrot [10] qui bien qu’équivalente (en un sens à

préciser, voir A. Heibig [8]) ne sera pas celle adoptée dans le présent travail. La première approche se révèle parfaitement adaptée à notre contexte pour les raisons détaillées ci-dessous.

Bien que le système (1) ne soit pas un système hyperbolique, nous rappelons ci-dessous ces travaux pour les conséquences centrales qu'ils trouveront lors l'approximation numérique des solutions de (1), motivation première du présent mémoire.

Un système hyperbolique, dans le contexte de la dynamique des gaz compressibles, peut être compris comme la simplification d'un système de type Navier-Stokes pour lequel les petites échelles liées à la dissipation sont délibérément négligées. Une solution onde de choc d'un tel système hyperbolique doit en conséquence être comprise comme limite de solutions onde progressive, dès qu'elles existent, du système Navier-Stokes sous-jacent lorsque les phénomènes de dissipation tendent vers zéro. Ainsi que soulignés par P.G. Le Floch [44] puis Raviart-Sainsaulieu [58], la solution onde de choc comme les solutions onde progressive qui la définissent par passage à la limite, partagent toutes la même vitesse de propagation ainsi que le même saut $\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$. Cette propriété d'indépendance relativement à l'amplitude des phénomènes de dissipation est centrale aux travaux [44], [58].

Par opposition à cette propriété d'indépendance, il ressort de ces travaux que la vitesse de propagation et le saut associé dépendent intrinsèquement de la forme du tenseur de dissipation lorsque le système d'équations est sous forme non conservative et ce contrairement à un système sous forme conservative. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement mais il importait de souligner cette distinction essentielle.

Rapportons pour conclure ce paragraphe, que V. Vatel [69] et indépendamment Forestier-Hérard-Louis [22] ont proposé l'étude d'une variante du système (1) telle qu'obtenue dans le contexte d'un modèle de turbulence compressible. Substituant la loi de conservation sur l'énergie totale à l'une des équations régissant les pressions, ces auteurs proposent de fermer les produits non conservatifs impliqués dans la seule équation non conservative restante en faisant choix de la théorie de superposition de fonctions due à Volpert (voir P.G. Le Floch [44] pour le lien avec la famille des chemins dite des lignes droites). Dans [13], Coquel-Marmignon montrent que les solutions onde de choc étant ainsi définies, cette définition n'est compatible que pour un choix de tenseur exigeant $\mu = \mu_\tau$ avec $\kappa = \kappa_\tau = 0$ et ce sous l'hypothèse $\gamma = \gamma_\tau$.

1.4 Méthodes d'approximation numériques et systèmes non conservatifs

Le système (1) étant vraiment sous forme non conservative, les méthodes d'approximation numériques qui pourront lui être associées sont elles-mêmes sous forme non conservative. Ainsi que nous l'avons déjà illustré, la famille de solutions discrètes n'a aucune raison de converger, si tant est qu'elle converge, vers une solution de (1).

Cette distinction à opérer par opposition au cadre purement conservatif est de toute première importance. Il est indispensable de rapporter ici trois contributions à l'analyse numérique des problèmes hyperboliques. Bien que le système (1) ne soit pas hyperbolique, nous rappelons que les difficultés numériques restent étroitement liées, sinon les mêmes.

Dans la première contribution, T. Hou et P.G. Le Floch [33] analysent la convergence d'une méthode aux différences finies, consistante avec une loi de conservation scalaire, mais ne répondant pas à l'hypothèse de méthode d'approximation sous forme conservative telle qu'exigée par le Théorème de Lax-Wendroff. Ils prouvent la convergence des familles de solutions approchées, ainsi construites, vers des fonctions limites mais qui ne sont pas solutions faibles de la loi de conservation considérée.

Dans la seconde contribution, P.G. Le Floch et T.P. Liu [46] établissent la convergence d'une méthode d'approximation numérique, la méthode de Glimm, lorsque appliquée à un système hyperbolique sous forme non conservative (les solutions onde de choc étant définies au sens de la théorie des produits non conservatifs proposée dans [20]). Notons que par opposition à la précédente contribution, les fonctions limites coïncident bien avec les solutions faibles attendues.

Dans la troisième contribution, A.Y. Leroux et A. Noussair [29] proposent délibérément une méthode aux différences finies sous forme non conservative pour l'approximation des solutions faibles des équations d'Euler isentropiques et garantir en supplément d'un bénéfice substantiel lié à leur loi de pression, la capture des solutions onde de choc attendues.

Il n'y a bien entendu aucune contradiction entre ces trois travaux : dans le premier [33], la méthode aux différences finies peut être comprise comme une méthode de projection L^2 (*i.e.* **projection linéaire**); dans le second [46], la méthode de Glimm n'invoque **aucune opération de projection**; enfin, dans le troisième [29], la méthode aux différences proposées peut être comprise comme une méthode de **projection nonlinéaire** restaurant la conservation des quantités requises.

Il s'agit donc en définitive d'une question de nature de projection, si projection il y a.

Une interprétation heuristique de l'influence de la nature de la projection sur l'aptitude d'une méthode numérique à capturer les solutions onde de choc et donc les solutions onde progressive les ayant définies, peut être proposée comme suit. Nous avons rapporté que la vitesse de propagation ainsi que l'amplitude d'une solution onde progressive dépend intrinsèquement de la forme du tenseur de dissipation ayant conduit à l'existence de cette solution. Sur le plan numérique, une méthode du premier ordre d'approximation construite sur une technique de projection s'accompagne d'un tenseur de dissipation numérique, responsable entre autres de la stabilité de la méthode. Ce tenseur n'a toutefois aucune raison d'entretenir une relation de proportionnalité avec le tenseur de dissipation exact. Il suffit en particulier de noter dans le contexte des équations de Navier-Stokes à une seule entropie thermodynamique, qu'une méthode de type Godunov dissipe la densité ρ lors de son évolution en temps et ce contrairement aux équations exactes. Cette absence

de proportionnalité entre tenseur de dissipation numérique et tenseur exact ne porte pas (trop) à conséquence dans le contexte d'un système sous forme conservative et d'une méthode de volumes finis **sous forme conservative** en vertu du Théorème de Lax-Wendroff.

La situation est radicalement différente lorsque le système est sous forme non conservative puisque cette fois, les solutions onde progressive, dès qu'elles existent pour le choix d'un tenseur exact adéquat, admettent des vitesses de propagation ainsi que des sauts $\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$ dépendant intrinsèquement de la forme du tenseur choisi. Il s'agit donc heuristiquement de forcer le tenseur de dissipation numérique, dans le contexte d'un système sous forme non conservative, à être proportionnel **en un sens à préciser** avec le tenseur exact. A défaut d'assurer cette condition de proportionnalité, on s'expose à exhiber par le calcul des solutions discrètes donnant toutes les assurances de converger vers une fonction qui n'a toutefois rien de commun avec la solution attendue. Il est possible que cette limite soit solution du système du premier ordre extrait mais pour un **autre choix** de tenseur exact, lui proportionnel au tenseur de dissipation numérique. En d'autres termes, la fonction exhibée par le calcul peut être solution d'un **tout autre** problème et seule la méthode numérique aura décidée lequel. Ceci ne peut pas être accepté.

Il faut prendre garde à ce que cette interprétation n'est qu'une heuristique. En particulier, elle ne prétend en aucun cas que corriger une méthode de volumes finis au forçant le tenseur de dissipation numérique à ressembler au tenseur exact, ce au sens des différences finies et donc à un ordre d'approximation près, soit suffisant pour assurer la capture des solutions onde progressive requises. Une telle approche a par exemple été suggérée par S. Karni [34] et se révèle insuffisante dans la pratique (voir par exemple [33] pour une discussion et des illustrations convaincantes ainsi que [21]).

1.5 Autres contributions

Ainsi que l'ont clairement montré A.Y. Leroux et A. Noussair [29], il est possible de retirer un bénéfice substantiel de l'utilisation d'une méthode de volumes finis sous forme non conservative dans le contexte d'un système d'équations sous forme conservative mais à la condition d'utiliser un opérateur de projection adaptée.

Dans cette même optique, F. DeVuyst [21] a récemment proposé d'approcher numériquement le système Euler pour un mélange de gaz en substituant aux équations de conservation gouvernant les densités partielles, les équations de transport relatives aux fractions massiques. Ces équations, certes sous forme non conservative, n'exhibent toutefois pas de produits ambigus puisque les fractions massiques ne peuvent être discontinues qu'à la traversée d'une discontinuité de contact, précisément là où la vitesse de transport est nécessairement continue. F. DeVuyst montre que l'opération de projection L^2 est autorisée dans ce contexte.

D'autres contributions, relevant de la philosophie des techniques de *shock-fitting* par

opposition aux méthodes de *shock-capturing*, peuvent également être rapportées. Il s’agit, après avoir défini un censeur localisant les discontinuités éventuelles de la solution discrète, d’appliquer une méthode non conservative (“synonyme” de moins coûteuse) en dehors des discontinuités pour privilégier à l’emplacement des discontinuités une méthode conservative. Citons par exemple Moretti [54], Zwas-Roseman [75] et DeVuyst [21]. Une telle stratégie n’est bien entendue envisageable que pour des systèmes de lois de conservation.

Dans T. Hou et P.G. Le Floch [33], les auteurs proposent une technique d’hybridation plus séduisante car potentiellement applicable à un système sous forme vraiment non conservative. En effet, à une méthode non conservative qui peut être comprise comme résultant d’opérations de projection L^2 , ils associent pour l’approximation des discontinuités la méthode de Glimm dont nous rappelons qu’elle est exempte d’opération de projection (ce que nous avons rapproché du résultat de convergence établi dans [46]). Toutefois, une telle hybridation semble ici difficile puisque nous ne connaissons pas la solution du problème de Riemann, indispensable à la méthode de Glimm, sauf à intégrer numériquement les EDO gouvernant les solutions onde progressive. Nous avons du adopter un tel principe à des fins numériques, de manière à exhiber une classe de solutions exactes (en l’occurrence, des solutions de problèmes de Riemann). Le coût ainsi que la complexité numérique requise rendent rédhitoire une telle approche.

Dans le présent travail, nous introduirons un opérateur de projection nonlinéaire forçant la compatibilité discrète avec une relation de saut généralisée que nous exhiberons. Soulignons que nous prouverons qu’en un sens à préciser, cette relation de saut sera violée par une méthode de projection linéaire de type L^2 .

2 Plan général des travaux

2.1 Étude des solutions onde progressive

Dans cette première partie, nous étudions l’existence de solutions onde progressive du système convectif-dissipatif (1). Quelques propriétés sont mises en avant pour les conséquences qu’elles trouvent dans les divers chapitres constituant ce mémoire. Le système considéré lors de cette analyse est en fait associé au modèle (k, ϵ) compressible régissant l’écoulement turbulent de fluides compressibles qui, sous les hypothèses de modélisation : termes de conduction et termes de relaxation nuls, trouve une forme analogue aux équations de Navier-Stokes à deux lois de pression complétées d’une loi d’évolution précisée en temps utile. Notons toutefois que ce choix est en réalité relatif au choix des fonctions viscosités et que les extensions au cas d’autres fonctions viscosités plus simples (constantes par exemple) sont immédiates.

Ce modèle est associé à un système d’EDP de type convection-dissipation où les opérateurs du premier et du second ordre sont sous forme non conservative et n’admettent pas de forme conservative équivalente pour les solutions régulières. L’étude du système

du premier ordre extrait a récemment été proposée par Forestier-Hérard-Louis [22], Louis [48] et Vatel [69]. Ils montrent que ce système extrait est hyperbolique sur l'espace des états admissibles et qu'en conséquence ses solutions peuvent développer des discontinuités. Deux types de discontinuité doivent être distingués.

Les discontinuités de type onde de contact, associées aux champs linéairement dégénérés du système du premier ordre extrait, possèdent une formulation faible au sens usuel des distributions à la différence des solutions discontinues de type onde de choc, associées aux champs vraiment nonlinéaires, qui ne sont pas définies de manière unique ainsi que nous l'avons déjà souligné (cf. LeFloch [44], Dal Maso-LeFloch-Murat [20] ou encore Colombeau-LeRoux [9]).

Nous adoptons ici le formalisme proposé par LeFloch [44] (cf. également Raviart-Sainsaulieu [58], Sainsaulieu [64] dans le contexte d'un opérateur de dissipation sous forme conservative) en étudiant l'existence et l'unicité de solutions régulières de type onde progressive pour le système complet, *i.e.* de convection-dissipation. Ces solutions régulières trouve la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{u}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ désignent deux états et σ une constante réelle. Ces fonctions conduisent LeFloch [44] puis Sainsaulieu [62] à définir les solutions onde de choc du système hyperbolique extrait par le triplet $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$.

Dans le premier chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité, à une translation près, des solutions onde progressive du modèle (k, ϵ) . Cependant, la forme non conservative de l'opérateur de dissipation conduit à une difficulté supplémentaire par rapport au cas d'un opérateur sous forme conservative.

Nous montrons l'existence d'une mesure positive bornée $\mathcal{M}(\mathbf{D}_1)$ dépendant de l'opérateur non conservatif de dissipation telle que le triplet $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ définisse une solution onde de choc du système suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathcal{M}(\mathbf{D}_1) \delta_{\{x=\sigma t\}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

où le triplet $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ est caractérisé par une relation de saut généralisée. Notons que si l'opérateur de dissipation avait été conservatif, la mesure $\mathcal{M}$ serait identiquement nulle.

Nous montrons que ce triplet $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ dépend uniquement du rapport des viscosités laminaire et turbulente. Nous introduisons donc un système équivalent au système convectif-dissipatif initial pour les solutions onde progressive qui met en avant le rôle prépondérant joué par le rapport des viscosités. Ce système trouve la forme condensée suivante :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{v}) \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{C}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

où cette fois l'opérateur du second ordre trouve une forme complètement conservative, le nouveau produit non conservatif impliquant la dérivée en temps étant pondéré par le rapport des viscosités.

Ce système joue un rôle crucial dans l'étude du système (1) tant d'un point de vue continu que d'un point de vue numérique. En particulier il fait formellement apparaître l'existence de deux régimes limites pour lesquels la turbulence est respectivement évanescence ($\mu_\tau/\mu \rightarrow 0$) ou pleinement développée ($\mu/\mu_\tau \rightarrow 0$). Ces régimes limites sont tous deux gouvernés par un système de lois de conservation où cette fois les relations de saut sont bien sûr explicites.

Le second chapitre est consacré à l'étude de ces régimes limites. En négligeant les termes de relaxation, nous montrons que les solutions onde progressive du modèle (k, ϵ) convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers les solutions onde progressive de systèmes convectifs-dissipatifs **complètement conservatifs** lorsque le rapport des viscosités tend vers zéro.

Ces résultats de convergence vers des systèmes de lois de conservation assurent l'existence de développements limités des relations de saut généralisé que nous exprimons en fonction d'une échelle du rapport des viscosités.

Dans les deux premiers chapitres, l'étude des solutions onde progressive est réalisée dans un espace des états admissibles imposant aux inconnues k et ϵ , pour des raisons de modélisation, d'être strictement positives. Toutefois, dans le cadre des modèles de turbulence à deux équations de "transport", la présence de termes de relaxation impose bien entendu à ces deux quantités de s'annuler aux états limites $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$. En remarquant que le système régissant les solutions onde progressive n'est pas Lipschitz au voisinage de zéro, l'unicité de ces solutions régulières n'est plus assurée.

En se plaçant dans le cadre d'un modèle simplifié, dit de longueur de mélange imposée, nous montrons dans le troisième chapitre que la régularité de la fonction viscosité turbulente dicte l'unicité ou la non-unicité des solutions onde progressive en présence des termes de relaxation. Nous donnons des conditions suffisantes, et vérifiées par un grand nombre de modèles, relatives à la régularité de la viscosité turbulente et assurant soit l'unicité soit la multiplicité des solutions onde progressive. Notons que le modèle le plus classique conduit à la multiplicité des solutions onde progressive.

Ce dernier problème met clairement en avant les difficultés numériques d'initialisation de la turbulence lorsque celle-ci doit être dans un voisinage de zéro.

2.2 Analyse numérique des équations de Navier-Stokes à deux entropies spécifiques

Cette seconde partie est consacrée à l'approximation numérique des solutions onde progressive de (1) exhibées lors de la première partie de ce mémoire et plus précisément du triplet $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ caractérisant ces solutions régulières.

Afin de motiver les problèmes numériques relatifs aux produits non conservatifs impliqués dans le système qui nous préoccupe ici, nous proposons dans un premier temps l'approximation des solutions des équations de Navier-Stokes à une loi de pression (en négligeant les termes de conduction thermique) sous forme non conservative. En effet, nous proposons d'approcher les solutions onde progressive en faisant choix de la loi d'évolution sur l'entropie spécifique, puis sur la pression, au détriment de la loi de conservation sur l'énergie totale.

Une telle approche semble bien entendu être une hérésie. Toutefois, celle-ci n'est pas si immédiate puisque nous assurons que les deux systèmes introduits sont bien équivalents au système Navier-Stokes pour une classe de solutions dite $\mathcal{C}^2$ par morceaux. Cette classe de fonctions est certes restrictive mais suffit à notre propos, les solutions onde progressive appartenant à cette classe. En conséquence, les difficultés ne peuvent survenir que lors de la discrétisation de ces systèmes **équivalents**. Il ne s'agit pas ici d'étendre la première contribution, citée dans les motivations générales, due à LeFloch-Hou [33] mais bien d'exhiber la perte d'équivalence au niveau discret des systèmes considérés. En effet, nous montrons que par l'approche (classique) de type Godunov par projection L^2 , l'énergie totale, cette fois comprise comme fonction des autres inconnues, est une fonction décroissante du temps, résultat en contradiction avec la propriété attendue de conservation de l'énergie.

Ce défaut de conservation de l'énergie totale de la solution discrète provient de deux sources d'erreurs systématiques et distinctes :

1. erreur L^2 de projection de la solution discrète,
2. erreur L^2 de représentation des dérivées de la solution discrète.

La première erreur a pour origine la projection L^2 de l'entropie spécifique (respectivement de la pression) et non de l'énergie totale. Elle est bien entendu liée au fait que les solutions onde de choc des systèmes du premier ordre extrait des systèmes équivalents sont distinctes. La seconde erreur est relative à la représentation discrète de l'opérateur du second ordre non conservatif. Toutefois cet opérateur est fondamental puisqu'il est responsable de l'équivalence des systèmes pour les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

Nous étendons l'ensemble de ces remarques au cas du système (1). Nous introduirons des formules aux différences exemptes de la seconde erreur, la première apparaissant inévitable. De plus, nous demanderons au schéma de satisfaire les conditions de stabilité habituelles et naturelles dans le contexte des équations de Navier-Stokes à une température :

- i) la préservation de la positivité de la densité et des pressions p et p_τ (dès que le vide est absent de la solution exacte),
- ii) la préservation de la loi de conservation de l'énergie totale,
- iii) la satisfaction d'un ensemble complet d'inégalités d'entropie discrètes,

iv) la satisfaction d'un principe du maximum sur les entropies spécifiques s et s_τ .

Ces conditions sont énoncées pour des conductivités thermiques identiquement nulles puisque autrement seules les entropies $\rho \log s$ et $\rho \log s_\tau$ sont compatibles avec le second principe de la thermodynamique.

Notons que de telles conditions de stabilité ne sont en général pas satisfaites par les méthodes d'approximation de (1) les plus couramment utilisées (cf. Mohammadi-Pironneau [52], Larrouturou-Olivier [39], Gleize [24]).

En utilisant une méthode de pas fractionnaires, nous proposons une méthode de type Godunov par projection L^2 pour laquelle nous assurons toutes les conditions de stabilité imposées. Il importe de noter dès à présent que la positivité des pressions repose sur des principes du maximum (ou du minimum) sur les entropies spécifiques.

Nous indiquons à présent que les résultats numériques obtenus par une méthode de type Godunov par projection L^2 conduit à des erreurs L^1 inacceptables pour un degré de raffinement donné et ce même si la méthode proposée vérifie les propriétés de stabilité requises i), ii), iii) et iv). De plus, si les erreurs L^1 sont acceptables à un instant donné, elles ne sauraient le rester à une date ultérieure puisque nous montrons qu'elles sont une fonction croissante du temps dans le contexte d'une stratégie de projection L^2 .

Il apparaît donc nécessaire de contraindre plus sévèrement les conditions précédentes. Nous imposons alors une condition de compatibilité sur la vitesse comparée de création d'entropie discrète, dont nous donnerons un énoncé précis, directement liée à la relation :

$$\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \mu_\tau (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) - \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \mu (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) = \partial_x (\mu_\tau \kappa \partial_x T - \mu \kappa_\tau \partial_x T_\tau),$$

obtenue en combinant les identités (2). Ici pour simplifier, nous avons supposé les deux viscosités constantes.

Nous montrons alors que les erreurs dues à la projection L^2 , s'opposant à la loi de conservation de l'énergie totale dans le contexte du système Navier-Stokes à une température, s'opposeront également à la satisfaction de la condition de compatibilité. Rappelons toutefois que ces erreurs sont responsables des propriétés de stabilité précédentes.

Nous exhibons une opération de projection nonlinéaire venant s'adjoindre à la méthode de projection L^2 permettant de forcer la condition de compatibilité tout en préservant les propriétés de stabilité. Nous prouvons la validité d'une telle projection en assurant son existence. Notons que son implémentation informatique est en réalité aisée puisqu'elle repose sur un simple algorithme de Newton.

Cette opération de projection nonlinéaire est ensuite étendue au système complet en présence des termes de conduction thermique puis de viscosités fonctions des inconnues. Une extension aux modèles de turbulence compressible à deux équations de "transport" est proposée prenant en compte des termes de relaxation.

Ces méthodes sont informatiquement implémentées. L'ensemble des tests effectués

est comparé à la solution exacte et aux solutions discrètes obtenues par une méthode classique (cf. Mohammadi-Pironneau [52], Larrouturou-Olivier [39], Gleize [24]). Les résultats numériques mettent clairement en avant la nécessité de l'opération de projection nonlinéaire au détriment des méthodes classiques qui développent systématiquement des erreurs inacceptables au niveau de raffinement proposé.

2.3 Modèle B.G.K. pour la formulation pseudo-conservative du modèle (k, ϵ)

Cette troisième et dernière partie, complètement indépendante des deux précédentes, est dédiée à un formalisme cinétique de type B.G.K. pour la formulation pseudo-conservative du modèle (k, ϵ) . Le système ainsi considéré trouve l'expression développée suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p) = 0, \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u = 0, \\ \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u = 0, \end{cases} \quad (7)$$

avec

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right).$$

Nous proposons de déterminer un formalisme cinétique de ce système en exploitant l'approche développée par Croisille (cf. Croisille [18], Croisille-Delorme [19]) dans le contexte du système Euler 3×3 et reposant sur l'existence de couple d'entropie de Lax, *i.e.* strictement convexe. En effet, par application du Théorème de Godunov-Mock ([27], [51]), la transformée de Fenchel de telles entropies conduit à une symétrisation macroscopique du système considéré. Une formulation intégrale des transformées de Fenchel permet d'exhiber le formalisme cinétique recherché.

Une telle démarche n'est envisageable que pour des couples d'entropie de Lax admettant une dépendance fonctionnelle simple.

Nous exhibons l'ensemble des lois de conservation supplémentaires satisfaites par les solutions régulières de (7), contenant bien entendu l'ensemble des couples d'entropie de Lax. La contrainte de simplicité fonctionnelle des entropies nous conduit à privilégier une famille particulière :

$$\left(\rho g \left(\log \frac{\rho^\gamma}{p} \right), \rho g \left(\log \frac{\rho^\gamma}{p} \right) u \right),$$

où g est une fonction régulière astreinte à des conditions de convexité. Cependant, nous montrons que pour une telle famille, les entropies considérées ne sont jamais strictement convexes et ne permettent donc pas de définir les transformées de Fenchel cherchées.

Toutefois, nous montrons l'existence de changements de variable admissibles pour les solutions faibles. En effet, les variables p_τ et $\rho\epsilon$ sont des variables conservées par le système (7). Il est ainsi aisé de proposer des changements de variable nonlinéaire en p_τ et $\rho\epsilon$ conduisant à des systèmes équivalents à (7) pour les solutions faibles. Bien entendu de tels changements de variable modifient les nonlinéarités présentes dans les couples d'entropie et conduisent donc à de nouvelles propriétés de convexité des entropies. Nous exhibons alors des changements de variables licites assurant la stricte convexité des entropies fonctionnellement simple.

Deux changements de variable sont proposés. Nous en déduisons, de façon analogue à Croisille [18], une symétrisation macroscopique de (7) puis un formalisme cinétique de ce même système. Il importe alors de noter que les formalismes cinétiques ainsi obtenus diffèrent suivant le choix du changement de variable adopté. Il en résulte donc la non-unicité d'un tel formalisme.

Chacun des formalismes cinétiques est discuté et trouve une interprétation physique. L'un d'entre eux est privilégié pour l'obtention d'un schéma cinétique de type Perthame (voir Perthame [56], [57] et Khobalatte-Perthame [36]). De même que dans le contexte du système Euler 3×3 , nous montrons que ce schéma est stable et vérifie, outre un ensemble d'inégalité d'entropie, un principe du maximum sur l'entropie spécifique.

Bibliographie

- [1] R. ABGRALL: *An extension of Roe's upwind scheme to algebraic equilibrium real gas models*, J. of Comput. Fluids, Vol 19, No.2, 171-182 (1991).
- [2] R. ABGRALL, *Extention of the Roe's approximate Riemann solver to equilibrium and nonequilibrium flows*, Proc 8th GAMM Conference on Num. Methods in Fluid Mech., Vol 29, P. Wesseling Ed., Vieweg (1990).
- [3] F. BOURDEL, J. P. CROISILLE, P. DELORME et P. A. MAZET, *Sur l'approximation par éléments finis des systèmes hyperboliques K-diagonalisables. Applications aux équations d'Euler et aux mélanges de gaz*, J. Rech. Aerosp., No.5, pp. 15-34 (1989).
- [4] G. BRUN, J. H. HERARD, L. LEAL de SOUSA, M. UHLMANN, *Numerical modelling of turbulent compressible flows using second order models*, Finite Volumes for Complex Applications, pp. 337-346 (1996).
- [5] T. BUFFARD et J. H. HERARD, *A conservative fractional step method to solve non-isentropic Euler equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol 144, No.3-4, pp. 199-225 (1997).
- [6] C. CERCIGNANI, **The Boltzmann equation and its applications**, Scottish Academic Press, Reed AMS No 64, Springer (1975).
- [7] G. Q. CHEN et P. LEFLOCH, *Entropy flux splittings for hyperbolic conservation laws. Part I: General framework*, Comm. Pure Appl. Math., Vol 48, No 7, pp. 691-729 (1995).
- [8] J.F. COLOMBEAU et A. HEIBIG, *A method of characteristics for some systems of conservation laws*, SIAM J. Math. Anal., Vol 29, No.6, pp. 1467-1480 (1998).
- [9] J.F. COLOMBEAU et A.Y. LEROUX, *Nonconservative products in bounded variation functions*, SIAM J. Math. Anal., Vol 23, No 4, pp 941-949 (1992).
- [10] J. F. COLOMBEAU, A. Y. LEROUX, A. NOUSSAIR et B. PERROT, *Microscopic profiles of shock waves and ambiguities in multiplications of distributions*, SIAM, J. of Numer. Anal., Vol 26, No 4, pp. 871-883 (1989).
- [11] F. COQUEL et P. LEFLOCH: *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimension: A general theory*, SIAM Journal of Num. Anal., Vol 30, pp. 675-700 (1993).
- [12] F. COQUEL et M.S. LIOU: *Hybrid upwind splitting (HUS) by a field-by-field decomposition*, NASA Tech. Memo., ICOMP 95-2 (1995).
- [13] F. COQUEL et C. MARMIGNON, *A Roe-type linearization for the Euler equations for weakly ionized multi-component and multi-temperature gas*, AIAA 12th CFD Conference, San Diego (USA) (1995).
- [14] C. COQUEL et C. MARMIGNON: *Simulation numérique d'écoulements faiblement ionisés en déséquilibre thermochimique*, ONERA (1993).

- [15] F. COQUEL et C. MARMIGNON, *A consistent conservative formulation for the Euler system for weakly ionized mixtures of gaz*, en préparation.
- [16] F. COQUEL et B. PERTHAME, *Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics*, Preprint du LAN, Université Paris VI (1997).
- [17] V. COUAILLER, *Numerical simulation of separated turbulent flows based on rans/low Reynolds two equations model*, AIAA paper, 37th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (1999).
- [18] J.P. CROISILLE: Thèse de doctorant de l'Université Paris VI (1990).
- [19] J. P. CROISILLE et P. DELORME, *Kinetic symmetrizations and pressure laws for the Euler equations*, J. Physica D 57, No.3/4, pp. 395-416 (1992).
- [20] G. DAL MASO, P. LEFLOCH et F. MURAT, *Definition and weak stability of a non conservative product*, J. Math. Pures Appli., vol 74, pp. 483-548 (1995).
- [21] F. DEVUIST, Ph.D. Thèse de l'Université Paris VI (1994).
- [22] A. FORESTIER, J.M. HERARD et X. LOUIS, *A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, tome 324, Série I, No 8, pp. 919-926 (1997).
- [23] D. GILBARG: *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math., Vol 73, pp 256-274 (1951).
- [24] V. GLEIZE, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II (1994).
- [25] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 1, SMAI (Eds), Ellipse (1991).
- [26] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 2, Applied Mathematical Sciences, Vol 118, Springer (1995).
- [27] S. K. GODUNOV, *An interesting class of quasilinear systems*, Sov. Math. Dokl., Vol 2, pp. 947-949 (1961).
- [28] S. K. GODUNOV, *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluids dynamics*, Math. Sbornik, No 47, pp. 271-306 (1959).
- [29] J. M. GREENBERG, A. Y. LEROUX, R. BARAILLE et A. NOUSSAIR, *Analysis and approximation of conservation laws with source terms*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 34, No.5, pp. 1980-2007 (1997).
- [30] A. HARTEN, P.D. LAX et B. VAN LEER: *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, Vol 25, No 1 (1983), pp. 35-61.
- [31] J. M. HERARD: *Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible*, Rapport Technique, EDF Chatou (1995).

- [32] J. M. HERARD, *Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures*, ASME FED, Vol 215, pp. 73-80 (1995).
- [33] T. Y. HOU et P. G. LEFLOCH, *Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis*, Math. of Comp., Vol 62, No 206, pp. 497-530 (1994).
- [34] S. KARNI, *Viscous Shock profiles and primitive formulations*, SIAM J. Num. Anal., Vol 29, No 6, pp. 1592-1609 (1992).
- [35] B. KHOBALATTE: Thèse de doctorant de l'Université d'Orléans (1994).
- [36] B. KHOBALATTE et B. PERTHAME: *Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes*, Math. of Comp., Vol 62, No 205, pp. 119-131 (1994).
- [37] Y. A. KUZNETSOV, **Elements of applied bifurcation theory**, Applied mathematical sciences, Vol 112, Springer (1995).
- [38] B. LARROUTUROU, *On upwind approximations of multi-dimensional multi-species flows*, Computational methods in applied sciences, Ch. Hirsch (Eds), Elsevier, (1992).
- [39] B. LARROUTUROU, C. OLIVIER: *On the numerical approximation of the K -eps turbulence model for two dimensional compressible flows*, INRIA report 1526 (1991).
- [40] P. LASCAUX et R. THEODOR: **Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur**, Masson (1989).
- [41] P. LAX, *Shock waves and entropy*, Contrib. nonlin. functional Analysis, Proc. Sympos. Univ. Wisconsin, Madison 1971, pp. 603-634 (1971).
- [42] P. LEFLOCH, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under non conservation form*, Com. Part. Diff. Equa., Vol 13, No 6, pp669-727 (1988).
- [43] P. LEFLOCH, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in non conservation form*, Proc. 2nd Int. Conf., Aachen/FRG 1988, Notes Numer. Fluid Mech., Vol 24, pp 362-373 (1989).
- [44] P.G. LEFLOCH, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1990).
- [45] P.G. LEFLOCH, *Shock waves for non linear hyperbolic systems in non conservative form*, IMA preprint series No 593, University of Minnesota (1989).
- [46] P. LEFLOCH et T. P. LIU: *Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservation form*, Forum Math., Vol 5, pp 261-280 (1993).
- [47] T. P. LIU, *On the viscosity criterion for hyperbolic conservation laws*, Viscous profiles and numerical methods for shock waves, Proc. Workshop, Raleigh/NC (USA) 1990, pp. 105-114 (1991).
- [48] X. LOUIS, Ph.D. Thèse de l'Université Paris VI (1995).
- [49] F. R. MENTER, *Zonal two equation ($k-\omega$) turbulence model for aerodynamic flows*, 24 th AIAA fluid dynamics conference, Orlando, (1993).

- [50] F. R. MENTER, *Improved two equation ($k - \omega$) turbulence model for aerodynamic flows*, NASA Technical Report 103975, (1992).
- [51] M. S. MOCK, *Systems of conservation laws of mixed type*, J. Diff. Eq., Vol 37, pp. 70-88 (1980).
- [52] B. MOHAMMADI et O. PIRONNEAU, **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [53] J. L. MONTAGNE, H. C. YEE et M. VINOKUR, *Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas*, Numerical methods in fluid mechanics, Proc. 7th GAMM-Conf., Louvain-La-Neuve/Belg. 1987, Notes Numer. Fluid Mech. 20, 219-228 (1988).
- [54] G. MORETTI, *The lambda-scheme*, Comp. Fluids, Vol 7, pp 191-205 (1979).
- [55] V.C. PATEL, W. RODI et G. SCHEUERER: *Turbulence models for near wall and low Reynolds number flows: Review*, AIAA Journal, Vol 23, No 9 (1992).
- [56] B. PERTHAME: *Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 27, No 6 (1990), pp. 1405-1421.
- [57] B. PERTHAME: *Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 29, No 1 (1992), pp. 1-19.
- [58] P. A. RAVIART et L. SAINSAULIEU, *A nonconservative hyperbolic system modeling spray dynamics. Part 2. Existence of travelling waves solutions*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [59] H. REINHARD: **Équations différentielles, fondements et applications**, Dunod Université (1989).
- [60] P. L. ROE, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys., Vol 43, pp. 357-372 (1981).
- [61] L. SAINSAULIEU, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1995).
- [62] L. SAINSAULIEU, *Travelling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative*, SIAM journal of Applied Math., vol 55, No 6, pp 1552-1576 (1995).
- [63] L. SAINSAULIEU, *Initial value problem for the parabolic regularisation of a first order non hyperbolic system*, accepted for publication in Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [64] L. SAINSAULIEU, *Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs*, C.R.A.S. Paris, t. 312, Série I, p. 491-494 (1991).
- [65] D. SERRE, **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).

- [66] B. R. SMITH, *A near wall model for the $(k - l)$ two equation turbulence model*, 25th AIAA fluid dynamics conference, Colorado Springs, (1994).
- [67] J. SMOLLER, **Schock waves and reaction diffsion equations**, Springer Verlag (1983).
- [68] E. TADMOR: *A minimum entropy principle in the gas dynamics equations*, Appl. Numer. Math., No 2, pp. 211-219 (1986).
- [69] V. VATEL, Ph.D. Thèse de l'Université Bordeaux I (1993).
- [70] D. VANDROMME, *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. Thèse de l'Université de Lille (1983).
- [71] P. VILLEDIEU: Thèse de doctorant de l'Université de Toulouse (1994).
- [72] G. B. WHITAM, **Linear and nonlinear waves**, Pure and Applied Mathematics (1974).
- [73] D. C. WILCOX, *Reassessment of the scale-determining equation for advenced turbulence models*, AIAA Journal, Vol 26, pp 1299-1310, (1988).
- [74] Y. ZEL'DOLVICH et Y. P. RAIZER, **Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena**, Vol 1 et 2, Academic Press (1966).
- [75] G. ZWAS et J. ROSEMAN, *The effects of nonlinear transformations on the computation of weak solutions*, J. comput. Phys., Vol 12, pp. 179-186 (1973).

Table des matières

Introduction

Étude des solutions onde progressive

1 Existence of travelling wave solutions

1	Introduction	3
2	The mathematical model	4
2.1	Presentation of the model	4
2.2	Main results	6
3	Shock wave solutions for the (k, ϵ) model	10
4	Proof of the Theorem 2.4	17
A	The particular case: $\gamma = \gamma_\tau$	26
	References	31

2 Approximate jump relations

1	Introduction	35
2	The mathematical model	36
3	Main results	38
3.1	Some recent results	38
3.2	Asymptotic behaviours	44
4	Proof of the asymptotic behaviours	49
4.1	Proof of the Theorem 3.9	51
4.2	Proof of the Proposition 3.14	60
	References	63

3 Multiple solutions for a non-Lipschitz system

1	Introduction	67
2	The mathematical model	68
3	Main results	70
4	Applications	77
5	Proof of the Theorem 3.11	79
5.1	Preliminary results	79

5.2	Sufficient conditions for multiple solution	85
5.3	Sufficient conditions for a unique solution	88
A	Proof of the Theorem 5.9	91
	References	95

Analyse numérique des équations de Navier-Stokes à deux entropies spécifiques

4 Résolution numérique de systèmes convectifs-dissipatifs non conservatifs

1	Produits non conservatifs et Opérateurs de projection L^2	103
1.1	Modèle mathématique et systèmes équivalents	104
1.2	Non équivalence discrète des systèmes (1.1), (1.3) et (1.4)	110
1.3	Quelques propriétés de convexité	111
1.4	Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.3)	113
1.5	Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.4)	118
1.6	Mise en oeuvre numériques	120
2	Modèle de fluides à deux lois de pression	125
2.1	Modèle mathématique	126
2.2	Quelques propriétés du système (2.5)	127
2.3	Systèmes équivalents	134
2.4	A propos des conductivités thermiques	143
2.5	Preuve du lemme de convexité 2.4	144
3	Condition de compatibilité avec la relation de saut généralisée . .	151
3.1	Equations et Inéquations pour les solutions discrètes	153
3.2	Conditions de consistance et condition de compatibilité	157
4	Schéma classique	165
4.1	Premier pas : Opérateur du second ordre ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)	165
4.2	Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$) .	166
4.3	Troisième pas : Prise en compte du “terme source” ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$) .	168
5	Méthode de type Godunov par projection L^2	171
5.1	Premier pas : Opérateur dissipatif extrait ($t^n \rightarrow t^{n+1,-}$)	171
5.2	Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$) . .	175
5.3	Mise en oeuvre numérique	185
6	Méthodes de type Godunov par projection nonlinéaire	191
6.1	Donnée initiale et projection nonlinéaire	192
6.2	Une méthode de type Godunov par projection nonlinéaire	197
6.3	Une autre méthode de type Godunov par projection non linéaire . .	210
6.4	Approximation numérique des termes de conductivité thermiques .	219
6.5	Mise en oeuvre numérique	225
7	Résultats numériques pour les modèles à deux lois de pression . .	231

8	Applications aux modèles de turbulence compressible homogène isotrope	239
8.1	Préambule aux modèles de turbulence dits à “deux équations de transport”	240
8.2	Trois modèles de turbulence compressible homogène isotrope	247
8.3	Propriétés d’équivalence des modèles	250
8.4	Schéma par projection nonlinéaire	253
8.5	Résultats numériques	261
A	Construction des ondes simples	271
B	Raideur numérique des termes de relaxation	277
	Bibliographie	281
	Résultats numériques	285

Modèle B.G.K. pour la formulation pseudo-conservative du modèle (k, ϵ)

5	Un modèle B.G.K. pour le modèle (k, ϵ)	
1	Introduction	307
2	Formalisme cinétique abstrait	308
2.1	Position du problème	309
2.2	Modèle mathématique	312
2.3	Symétrisation cinétique	319
3	Application aux schémas de Perthame ([1], [2])	326
3.1	Schémas cinétiques	326
3.2	Principe du maximum sur l’entropie spécifique	333
	Bibliographie	338

Chapitre 1

A convection-diffusion system with first and second order in a nonconservation form.

Part 1 : Existence of travelling wave solutions

A convection-diffusion system with first and second order in a nonconservation form.

Part 1 : Existence of travelling wave solutions

Abstract

The present work is devoted to the study of travelling wave solutions of a convection-dissipation system, the so-called (k, ϵ) system modelling turbulent compressible flows. This system exhibits nonconservative products for both the first order and second order operators. A close attention is paid to the laminar and turbulent viscosities whose ratio dictates the shape of the second order operator. In that aim, we introduce an equivalent system involving nonconservative products which are weighted by this ratio with the additional benefit of a second order operator in conservative form.

1 Introduction

In the present work, we study, for existence, the travelling wave solutions of a convection-diffusion system governing turbulent compressible flows at high Reynolds numbers. The so-called (k, ϵ) model is derived under that assumption and we consider here the associated set of PDE's that we write in short as :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + (\partial_x \mathbf{u}, \mathbf{D}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

The precise shape of the system is given below. Since the Reynolds numbers under consideration are large, the solutions, which interest us, are mainly driven by the first order extracted system. This first order system turns out to be hyperbolic but writes in non-conservative form so that its shock solutions are not defined in the classical distributional sense. This fact has been already underlined by Forestier-Hérard-Louis [1], Louis [6] and Vatel [5], who have proposed to use the Volpert product (see for instance [3]) to define the generalized jump conditions.

However, following LeFloch [4], the shape of the second order operator dictates the definition of shock solutions. Those are defined when studying travelling wave solutions for the convection-diffusion system (1.1) (see [4], Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [9]).

Here, we prove the existence in the large of such travelling wave solutions. The main difficulty comes from the nonconservative form met by both the first order and second

order operator when the Reynolds number goes to infinity.

In the particular case where the dissipation operator finds a conservative form, *i.e.* $\mathbf{D}_1 \equiv 0$, then it is well-known (Gilbarg [18], Raviart-Sainsaulieu [10]) that the travelling wave solution of the convection-dissipation system makes it possible to define a shock wave solution of the first order hyperbolic system extracted from (1.1). Indeed, since the Reynolds number tends to infinity, the second order operator becomes negligible and formally the travelling wave solution tends towards the hoped shock wave solution.

In the frame of the (k, ϵ) model, we prove that such a property is lost because of the nonconservative form of the dissipation operator, *i.e.* $\mathbf{D}_1 \not\equiv 0$. More precisely, we can show that the travelling wave solutions of the system (1.1) yield us to shock wave solutions, with a propagation speed σ , of the following system :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathcal{M} \delta_{\{x=\sigma t\}}, \quad (1.2)$$

where $\mathcal{M}$ depends on the shape of the mapping $\mathbf{D}_1$ and of the ratio of the laminar viscosity μ and turbulent viscosity μ_τ . We thus pay a particular attention to the role played by this ratio of these two viscosities. In that aim, we introduce an equivalent system which admits a second order operator in conservative form but at the expense of nonconservative products involving the partial derivation with respect to time :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \partial_x (\mathbf{C}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}) + \mathbf{S}(\mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Such nonconservative products involve the ratio of the viscosities as a weight but yield us to, when the Reynolds number goes to infinity, a generalized Rankine-Hugoniot conditions which does not involve the measure $\mathcal{M} \delta_{\{x=\sigma t\}}$.

Having describe the considered mathematical model, the main result of the present work, devoted to existence and uniqueness of travelling wave solutions, is expressed in the section 2. In the section 3, this result allows us to characterise the shock wave solutions of the system (1.1) as the Reynolds number goes to infinity. The section 4 is devoted to the proof of the theorem of existence and uniqueness of travelling wave solutions.

2 The mathematical model

2.1 Presentation of the model

The study of a turbulent flow in presence of a shock wave is proposed in the framework of the (k, ϵ) turbulence model for compressible flows. The fully established turbulent flow for an ideal gas with $d \geq 1$ space variables is considered. The gas is characterized by its density ρ , its velocity $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$ and its total energy E . We denote by k the specific kinetic turbulent energy and by ϵ the specific dissipation rate of the kinetic turbulent energy. For the sake of symmetry in the forthcoming statements, the equations governing k and ϵ are written in terms of the variables:

$$p_\tau = (\gamma_\tau - 1) \rho k, \quad \varepsilon = \rho \epsilon \quad \text{where} \quad \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}. \quad (2.1)$$

Here, p_τ may be compared to a turbulent pressure with adiabatic coefficient $\gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}$. The dependence on this coefficient with respect to the space dimension explains the need for considering the equations in several space variables. Denoting I the identity mapping in $\mathbb{R}^d$, the system of equations associated with the (k, ϵ) model writes

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{u} = 0, \quad (2.2.i)$$

$$\partial_t \rho \underline{u} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + (p + p_\tau) I) = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u})), \quad (2.2.ii)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot (E + p + p_\tau) \underline{u} = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau), \quad (2.2.iii)$$

$$\partial_t \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} + \nabla \cdot \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \underline{u} + p_\tau \nabla \cdot \underline{u} = \mu_\tau \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau) - \varepsilon, \quad (2.2.iv)$$

$$\partial_t \frac{\varepsilon}{\gamma_\epsilon - 1} + \nabla \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma_\epsilon - 1} \underline{u} + \varepsilon \nabla \cdot \underline{u} = \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \cdot \left(\kappa_\epsilon \nabla \frac{\varepsilon}{\rho} \right) - \frac{C_2}{C_1} \frac{\varepsilon^2}{p_\tau}. \quad (2.2.v)$$

The gas pressure p is taken as that of polytropic ideal gases:

$$\frac{p}{\gamma - 1} = E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1}, \quad 1 < \gamma \leq 3. \quad (2.3)$$

In (2.2.v), C_1 and C_2 denote two positive constants of the model such that classically $C_1 \in]1, 2[$ and $C_2 > C_1$ (see Mohammadi-Pironneau [8] for instance) and we have set

$$\gamma_\epsilon = (\gamma_\tau - 1)C_1 + 1 > 1.$$

Concerning the dissipation terms in the above equations, the viscous stress tensor $\mathbf{\Gamma}(\underline{u})$ reads

$$\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) = \nabla \underline{u} + {}^T \nabla \underline{u} - \frac{\lambda}{\mu} (\nabla \cdot \underline{u}) I, \quad (2.4)$$

where λ and μ respectively stand for the Lammé coefficient and the laminar viscosity. Here, $\mu = \mu(T)$ denotes a smooth and positive function of the temperature $T = p/\rho$. We use the Stokes assumption to get $\lambda/\mu = (\gamma_\tau - 1)$ when $d \geq 2$ while for $d = 1$ we choose as usual $\lambda/\mu = 1$. For convenience in what follows, we set $\lambda/\mu = 2 - \chi$ where clearly $\chi > 0$. Accordingly to the classical (k, ϵ) model, the turbulent viscosity is given by the following nonlinear expression:

$$\mu_\tau = C_\mu \frac{p_\tau^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \frac{\mathcal{C}_\mu}{(\gamma_\tau - 1)^2} > 0,$$

where the physics prescribes $\mathcal{C}_\mu = 0.09$ ([8]).

At last, $T_\tau = p_\tau/\rho$ may be considered as a turbulent temperature and the model constants κ , κ_τ and κ_ϵ refer to conductivity coefficients.

The two equations (2.2.iv) and (2.2.v) governing the turbulence phenomena are classically referred as to “transport” equations, respectively for the specific kinetic turbulent

energy and its dissipation rate. Such a terminology is clearly not suited since these two balance equations do involve both first order and second order products which cannot be put in conservative form. These products respectively take the form $(p_\tau \nabla \cdot \underline{u}, \varepsilon \nabla \cdot \underline{u})$ and $(\mu_\tau \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}), \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}))$.

Some recent works devoted to fluid models arising in other fields of the physics have dealt with first order extracted systems in nonconservative form. We refer for instance to LeFloch [2] for elasto-dynamics, to Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [9] for diphasic flows and to Cordier et al., Coquel-Marmignon for ionized flows. But in these works, the dissipation operators always stay in conservative form. Thus, the studied system in the present work leads to a novelty, namely the presence of first and second order nonconservative products, which is a non standard mathematical problem. In this paper, our aim is to analyse the possible parabolic regularization of the (hyperbolic) first order system by such a non classical second order operator. In that aim, we study below for existence the plane travelling wave solutions of (2.2).

The considered model is being given, our main assumption stays in the omission of the diffusion effects, adopting $\kappa = \kappa_\tau = \kappa_\varepsilon = 0$. We refer the reader to Remark 2.6 for some comments about the present assumption.

The main result of the present paper are presented in the following section.

2.2 Main results

We first state some algebraic properties of the first order extracted system :

Lemma 2.1

Consider the first order system extracted from (2.2) which can be written with clear notations in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i(\mathbf{v}) \partial_{x_i} \mathbf{v} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.5)$$

with $\mathbf{v} = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, E, p_\tau, \varepsilon)$.

(i) *The system (2.5) is hyperbolic on the state space Ω defined by:*

$$\Omega = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+4} ; \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, p > 0, E > 0, p_\tau > 0, \varepsilon > 0 \right\}.$$

Let $\underline{n} = {}^T(n_1, \dots, n_d)$ be a normalised vector in $\mathbb{R}^d$. The matrix $\sum_{i=1}^d n_i \mathbf{A}_i(\mathbf{v})$ admits the following real eigenvalues

$$\underline{u} \cdot \underline{n} - c, \underline{u} \cdot \underline{n}, \underline{u} \cdot \underline{n} + c \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{\gamma_\tau p_\tau}{\rho}. \quad (2.6)$$

The multiplicity of the eigenvalue $\underline{u} \cdot \underline{n}$ is $d+2$. The associated fields are linearly degenerated and correspond to a contact discontinuity. The two other eigenvalues are simple and the associated fields are genuinely nonlinear.

(ii) Across a contact discontinuity, $\underline{u} \cdot \underline{n}$ and $p + p_\tau$ are continuous.

(iii) Let $\mathbf{v}$ be a smooth solution of the system (2.5). Then, $\mathbf{v}$ satisfies the following additional scalar conservation laws:

$$\partial_t U(\mathbf{v}) + \nabla \cdot F(\mathbf{v}) = 0, \quad U(\mathbf{v}) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p}{\rho^\gamma}, \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}, \frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma_\epsilon}} \right), \quad F(\mathbf{v}) = U(\mathbf{v}) \underline{u}, \quad (2.7)$$

where $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ denotes any given smooth mapping. Moreover, the mapping $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly convex if and only if the mapping $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly convex and satisfies for any $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}_+^3$ the following inequality:

$${}^T V \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) < -{}^T (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \cdot (\nabla^2 \mathcal{F})^{-1} \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \quad (2.8)$$

where $V = {}^T(\gamma s_1, \gamma_\tau s_2, \gamma_\epsilon s_3) \in \mathbb{R}^3$, $D = \text{diag}(\gamma - 1, \gamma_\tau - 1, \gamma_\epsilon - 1) \in \text{Mat}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ and $\nabla^2 \mathcal{F}$, respectively $\nabla \mathcal{F}$, refers to the Hessian matrix, respectively to the gradient vector, of $\mathcal{F}$.

Remark 2.2

The proof of statements (i) and (ii) can be found for instance in the work of Forestier-Hérard-Louis [1]. Let us recall that the system (2.5) cannot be put in conservative form. Some of the consequences will be discussed in Section 3. The property of continuity underlined in (ii) will play an important role in the Section 3 devoted to the definition of the discontinuous solutions for the first order extracted system.

Up to our knowledge, the statement (iii) is new. Note that it is indeed possible to prove that the pairs (U, F) of the form (2.7) are the only non trivial entropy pairs for the system (2.5). For instance, we easily deduce from (iii) that the strictly convex mapping $\mathcal{F}: (s_1, s_2, s_3) \rightarrow -\ln(s_1 s_2 s_3)$ satisfies the conditions (2.8). The pair (U, F) developed from this $\mathcal{F}$ is therefore a Lax entropy pair. The following result sharpens the behaviour of the additional conservation laws for smooth solutions of (2.5) exhibited in (iii) in the presence of the second order operator and the source terms.

Lemma 2.3

Let U and F be defined by (2.7) and let $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth mapping. The smooth solutions of the full system (2.2) obey to the following balance equations:

$$\begin{aligned} \partial_t U(\mathbf{v}) + \nabla \cdot F(\mathbf{v}) = & \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \mu \partial_{s_1} \mathcal{F} + \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \mu_\tau \partial_{s_2} \mathcal{F} + \frac{\gamma_\epsilon - 1}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} \frac{\varepsilon}{p_\tau} \mu_\tau \partial_{s_3} \mathcal{F} \right) \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) \\ & + \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \partial_{s_1} \mathcal{F} - \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \partial_{s_2} \mathcal{F} - C_2 \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} \frac{\varepsilon}{p_\tau} \partial_{s_3} \mathcal{F} \right) \varepsilon, \end{aligned}$$

where we have set $s_1 = \frac{p}{\rho^\gamma}$, $s_2 = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}$, $s_3 = \frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma_\epsilon}}$.

We refer the reader to the Lemma 3.4 for significant particular examples.

Since the convection system extracted from (2.2) is hyperbolic, this implies to study the regularising properties of the second order operator. The existence of plane travelling wave solutions of the system (2.2) allows us to prove such a property. This existence problem becomes usual (Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [13], Serre [14] for instance), but we recall that the dissipation operator is in nonconservative form in the present work. It arises that the (k, ϵ) model is out of the usual frame of hyperbolic system with parabolic smoothness where the second order operator is in conservative form. The reader will find some comments about this new mathematical difficulty in the Remark 2.6.

The plane wave solutions we want to study are at less $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ functions governed by the following system in one space dimension:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (2.9.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) \partial_x u_1), \quad (2.9.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_i u_1) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i), \quad i = 2, \dots, d, \quad (2.9.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) u_1 \partial_x u_1) + \sum_{i=2}^d \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u_i \partial_x u_i), \quad (2.9.iv)$$

$$\partial_t p_\tau + u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1 = (\gamma_\tau - 1) \left[\chi \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 - \varepsilon \right], \quad (2.9.v)$$

$$\partial_t \varepsilon + u_1 \partial_x \varepsilon + \gamma_\epsilon \varepsilon \partial_x u_1 = (\gamma_\epsilon - 1) \left[\chi \frac{\varepsilon}{p_\tau} \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 - \frac{C_2}{C_1} \frac{\varepsilon^2}{p_\tau} \right]. \quad (2.9.vi)$$

For the sake of conciseness, we rewrite, with the notations of the Lemma 2.1, the system (2.9) under the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{v}). \quad (2.10)$$

Here, the mapping $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^{d+4} \times \mathbb{R}^{d+4} \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ is the contracted product in $\mathbb{R}^{d+4}$, i.e. for $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+4}$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+4}$ then $(\mathbf{u} | \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{d+4}$ and its i^{th} component reads $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$. The mapping $\mathbf{D}_1(\mathbf{v}) : \Omega \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}^{d+4})$ satisfies

$${}^T(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) = \mu_\tau \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) \left(0, \dots, 0, (\gamma_\tau - 1), (\gamma_\epsilon - 1) \frac{\varepsilon}{p_\tau} \right).$$

Moreover, the matrix $A(\mathbf{v})$ does not coincide with the Jacobian matrix of any flux function, since quantities $u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1$ and $u_1 \partial_x \varepsilon + \gamma_\tau C_1 \varepsilon \partial_x u_1$, appearing in the equations (2.9.v) and (2.9.vi), do not allow to obtain a conservative form. At last, the only products $(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v})$ contributing to the equations (2.9.v) and (2.9.vi), cannot be also written in conservative form. The main originality and difficulty of the system (2.9) lies on such a property. The (k, ϵ) model is out of the usual frame (cf. Raviart-Sainsaulieu [10], Serre [14]) of convection-dissipation system where $\mathbf{D}_1 \equiv 0$. We will

come back to this problem with more details in the next section where a sense to the nonconservative form of the dissipation operator is given.

Contrary to the usual technique (developed by Mohammadi-Pironneau [8] for instance) the considered source term $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ is now a zero order function, *i.e.* without differential operator. This new property of the mapping $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ implies the source terms no impressing the smoothness of solutions. Consequently, the analysis of the parabolic regularisation of the second order operator can be realized no considering source terms. The studied system under consideration can be written

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}). \quad (2.11)$$

A travelling wave solution of (2.11) is a smooth function of the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (2.12)$$

where $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$ denote two bounded constant states. The pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}' - (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}')' - (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}') = 0, \quad (2.13.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R. \quad (2.13.ii)$$

The main result of the present work, devoted to the existence of travelling wave solutions of system (2.11), is given now. The reader may find the proof of this result in Section 4.

Theorem 2.4

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and $C_1 \in]1, 2[$. Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a given constant state and let σ be a given real constant. Assume that $\mathbf{v}_L$ and σ satisfy the following inequality:

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad (2.14)$$

and that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (2.12) which is solution of the system (2.11). This solution is unique up to a translation and is included in Ω .

Symmetrically, let $\mathbf{v}_R \in \Omega$ and $\sigma \in \mathbb{R}$ be given. Assume that $\mathbf{v}_R$ and σ satisfy

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R} \quad (2.15)$$

and assume that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_L \in \Omega$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (2.12) which is solution of the system (2.11). This solution is unique up to a translation and is included in Ω .

Remark 2.5

The assumption $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ is more restrictive than with usually where $1 < \gamma \leq 3$. But this condition appears as a natural modelling hypothesis for polytropic gases since $1 < \gamma \leq \frac{2}{d} + 1$.

Remark 2.6

Without the simplifying assumption relating to the conductivity coefficients, one can be easily convinced that the homoclines to be studied are governed by a dynamical system in $\mathbb{R}^6$ where furthermore their critical points are unknowns. This difficulty remains true with our assumption but the governing dynamical system can be reduced in $\mathbb{R}^2$ and the Poincarre-Bendixon Theory can be applied. Let us notice that the not-knowledge of critical points is implied by the nonconservative form of the system since there does not exist of conservative reformulation.

Remark 2.7

The travelling wave solutions of the system (2.11) of course depend on the constant C_μ and the function μ . But the dependence on these two quantities must depend on the considered phase space. Section 4, it is shown that such a solution can be defined by the algebraic relations (4.5) (cf. Lemma 4.1) and the ordinary differential system (4.12) (cf. Lemma 4.2) then the travelling wave solution is defined in the parametric phase space characterized by $(\xi, \rho, \rho \underline{u}, E, p_\tau, \varepsilon)$ and depends on the constant C_μ and the function μ . Such a solution can be also defined by the algebraic relations (4.5), the ordinary differential equation (4.22) (cf. the proof of the Lemma 4.8) and the critical point curve (4.17) (cf. Lemma 4.4). This yields us to a characterization of the travelling wave in the phase space $(\rho, \rho \underline{u}, E, p_\tau, \varepsilon)$ where the solution only depends on the ratio $\frac{C_\mu}{\mu}$.

The above Theorem proves that the second order operator is a parabolic regularization of the first order hyperbolic extracted system. Furthermore, it justifies the choice of the second order operator considered in this work.

3 Shock wave solutions for the (k, ϵ) model

The definition of shock wave solutions for a convection-dissipation system, for which dissipation phenomena are never neglected, may seem surprising. But discrete viscous profiles approximating travelling waves (or compression waves) are usually described using two or three grid points. Consequently, the viscous effects can not be properly captured and the numerical resolution implies shock solutions. To illustrate this purpose, a numerical comparison between Euler and Navier-Stokes equations is presented figure 1.1. A stationary shock tube is used for this numerical test with an Osher solver. The initial data are given by

$$\begin{array}{lll} \rho_L & = & 0.2 \quad u_L = 35 \quad p_L = 7 \\ \rho_R & = & 1 \quad u_R = 7 \quad p_R = 203 \end{array}$$

with $\gamma = 1.4$ and $\mu = 10^{-2}$.

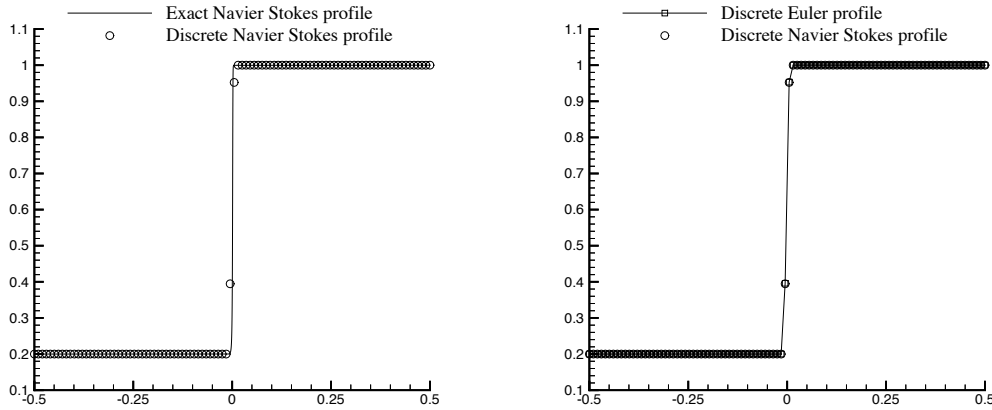


Figure 1.1: Density profile for Navier-Stokes and Euler equations

This result suggests the well-known preponderance of convection phenomena on dissipation phenomena. It is therefore necessary to define discontinuous solutions which will be compatible with the dissipation present in the (k, ϵ) model.

The convection system extracted from (2.9) is thus considered. To simplify the presentation of the following results, one space variable will be considered but all the results of this work can be extended to any space dimension. The convection system extracted from (2.9) under consideration can be written in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = 0. \quad (3.1)$$

The usual construction of rarefaction waves for an hyperbolic system in conservative form it may be without difficulty applied to an hyperbolic system in nonconservative form (Sainsaulieu [9] for instance). Considering now a discontinuous function in the following form:

$$\mathbf{v}_0(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_R, & x < \sigma t, \\ \mathbf{v}_L, & x > \sigma t, \end{cases} \quad (3.2)$$

it seems impossible *a priori* to define such a function as solution of (3.1) since the product $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}$ does not make distributional sense. Several methods have been recently introduced to define this product. An appropriate setting has been developed by Dal Maso, LeFloch and Murat [15] and Colombeau and Leroux [16] but where there is not a unique definition. Travelling wave solutions of the convection-dissipation system enable a unique characterization of such solutions (LeFloch [3], Sainsaulieu [7], Raviart-Sainsaulieu [10]) for which dependence on dissipation is intrinsic. But the dissipation remains in conservative form in these works, *i.e.* $\mathbf{D}_1 \equiv 0$. The problem makes oneself conspicuous by the presence of matrix $\mathbf{D}_1$.

Let us recall the travelling wave analysis with $\mathbf{D}_1 \equiv 0$ (cf. [7],[10] for more details). A discontinuous wave solution of a system in a condensed form (3.1) is defined as the limit of a travelling wave solution of

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}), \quad (3.3)$$

when the dissipation is neglected.

The smooth function $\mathbf{v}(t, x)$, in the form (2.12), is assumed to be a travelling wave solution of (3.3). Consequently, the smooth function

$$\mathbf{v}_\nu(t, x) = \hat{\mathbf{v}}_\nu(x - \sigma t) = \hat{\mathbf{v}}\left(\frac{x - \sigma t}{\nu}\right), \quad (3.4)$$

where the pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by (2.13), is a travelling wave solution of the following system:

$$\partial_t \mathbf{v}_\nu + \mathbf{A}(\mathbf{v}_\nu) \partial_x \mathbf{v}_\nu = \nu \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{v}_\nu) \partial_x \mathbf{v}_\nu)$$

with the same behaviour at infinity than $\mathbf{v}(t, x)$. Since $\hat{\mathbf{v}}_\nu$ converges a.e. towards the discontinuous function

$$\hat{\mathbf{v}}_0(\xi) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } \xi < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } \xi > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

the smooth function $\mathbf{v}_\nu(t, x)$ converges to the discontinuous wave (3.2) as ν goes to zero.

The following definition is thus proposed by LeFloch ([3]) and Sainsaulieu ([17]):

Definition 3.1

The function (3.2) is a shock wave solution of (3.1) consistent with the dissipation operator if there exists a travelling wave in the form (2.12), denoted by $\hat{\mathbf{v}}$, solution of (3.3).

The triple $(\sigma, \mathbf{v}_R, \mathbf{v}_L)$ is furthermore characterized by the following generalized jump relations:

$$\sigma (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi) d\xi$$

obtained by integrating the ODE (2.13) over $\mathbb{R}$.

This theory is extend to the (k, ϵ) model which admits the non standard mathematical problem based on the nonconservative second order product $(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v})$.

Theorem 3.2

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and σ be a real given constant. Assume one of the two following inequalities holds:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad \text{for a given constant state } \mathbf{v}_L, \\ (b) \quad & \frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad \text{for a given constant state } \mathbf{v}_R \end{aligned}$$

and assume that there exists two positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$.

(i) The smooth function $\mathbf{v}_\nu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ defined by

$$\mathbf{v}_\nu(t, x) = \hat{\mathbf{v}}\left(\frac{x - \sigma t}{\nu}\right),$$

where $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by (2.13), converges a.e. toward the discontinuous function (3.2) as ν goes to zero.

(ii) There exists a positive bounded measure $\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ defined by

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbf{v}}'(\xi) | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi)) d\xi = \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R).$$

Then the discontinuous function (3.2), defined in (i) as the limit of $\mathbf{v}_\nu$ when ν goes to zero, defines a shock wave solution of

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \delta_{\{x=\sigma t\}} \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad (3.6)$$

compatible with the dissipation operator characterized by $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$.

(iii) The triple $(\sigma, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ is characterized by the following generalized jump relations:

$$-\sigma (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi) d\xi - \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = 0. \quad (3.7)$$

Proof of the Theorem 3.2

Under assumptions, the existence of a travelling wave, $\mathbf{v}(t, x)$ in the form (2.12), solution of the system

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v})$$

is obtained by virtue of Theorem 2.4. The smooth function $\mathbf{v}_\nu(t, x)$, defined by (3.4) where the pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by (2.13), is thus a travelling wave solution of the system

$$\partial_t \mathbf{v}_\nu + \mathbf{A}(\mathbf{v}_\nu) \partial_x \mathbf{v}_\nu = \nu \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}_\nu) \partial_x \mathbf{v}_\nu) + \nu (\partial_x \mathbf{v}_\nu | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}_\nu) \partial_x \mathbf{v}_\nu)$$

with the same behaviour at infinity than $\mathbf{v}(t, x)$. Since the smooth function $\hat{\mathbf{v}}_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ converges a.e. towards the discontinuous function

$$\hat{\mathbf{v}}_0(\xi) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } \xi < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } \xi > 0, \end{cases}$$

the travelling wave $\mathbf{v}_\nu(t, x)$ converges to the discontinuous wave (3.2) as ν goes to zero.

The integration over $\mathbb{R}$ of the equation (2.13) gives the following generalized jump relations:

$$\sigma (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbf{v}}'(\xi) | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi)) d\xi.$$

This integral finds the following developed form:

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbf{v}}'(\xi) | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi)) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\gamma_\tau - 1) \widehat{\mu}_\tau [d_\xi \hat{\mathbf{u}} \cdot d_\xi \hat{\mathbf{u}} + (\chi - 1)(d_\xi \hat{u}_1)^2] \\ (\gamma_\epsilon - 1) \frac{\widehat{\varepsilon}}{\widehat{p}_\tau} \widehat{\mu}_\tau [d_\xi \hat{\mathbf{u}} \cdot d_\xi \hat{\mathbf{u}} + (\chi - 1)(d_\xi \hat{u}_1)^2] \end{pmatrix} d\xi$$

with the notation $\widehat{X}(\xi) = X(x - \sigma t)$. By virtue of Theorem 2.4, the smooth functions $\widehat{\mu}_\tau$, $\widehat{p}_\tau$ and $\widehat{\varepsilon}$ are positive bounded. Moreover, it is shown, in the section 4, that on the one hand $d_\xi \hat{u}_i = 0$ for $i = 2, \dots, d$, on the other $d_\xi \hat{u}_1 = M d_\xi 1/\widehat{\rho} < 0$ is bounded with M as a positive bounded constant. Consequently the following inequality holds:

$$0 < \int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbf{v}}'(\xi) | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi)) d\xi \leq C \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\rho_L - 1/\rho_R \\ 1/\rho_L - 1/\rho_R \end{pmatrix}$$

with C a positive generic constant. The proof is thus concluded. ■

Remark 3.3

The measure $\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ is unusual. Its presence is natural because the dissipation terms are in nonconservative form and we have to deal with it.

The measure $\mathcal{M}$, appearing in the jump relations (3.7), can be associated with non-conservative products involving derivation with respect to time. This remark can be obtained using a system which is equivalent to (2.11). This result is obtained by a change of variables based on the entropy relations.

First, the Lemma 2.3 is extended to three particular cases.

Lemma 3.4

Using the same notations as Lemma 2.3 and setting respectively $\mathcal{F}(s_1, s_2, s_3) = s_i$ with $i = 1, 2, 3$, the smooth solutions of the system (2.9) satisfy

$$\partial_t \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} + \partial_x \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} u_1 = \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mu \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) + \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \varepsilon > 0, \quad (3.8.i)$$

$$\partial_t \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} + \partial_x \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} u_1 = \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \mu_\tau \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) - \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \varepsilon, \quad (3.8.ii)$$

$$\partial_t \frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} + \partial_x \frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} u_1 = \frac{\gamma_\epsilon-1}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) - C_2 \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\epsilon-1}} \frac{\varepsilon^2}{p_\tau}. \quad (3.8.iii)$$

Furthermore, setting $\mathcal{F}(s_1, s_2, s_3) = \frac{s_2^{C_1}}{s_3}$, the smooth solutions of the system (2.9) satisfy

$$\partial_t \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\epsilon} + \partial_x \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\epsilon} u_1 = (C_2 - C_1) \rho^{2-C_1} p_\tau^{C_1-1} > 0. \quad (3.9)$$

Remark 3.5

An analogy between the equations (3.8.i) and (3.8.ii) can be noticed. The quantity $p_\tau / \rho^{\gamma_\tau-1}$ is thus comparable to a specific entropy for the turbulence with the adiabatic coefficient γ_τ .

An equivalent system is developed using the Lemma 3.4 relating to the entropies of the system (2.9). The main property of the equivalent system lies on the lack of nonconservative form of dissipation term. This property is expressed to the detriment of the time differential operator which becomes in nonconservative form.

Lemma 3.6

Let us consider $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ solution of system (2.9). Then there exists a $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphism $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$ and smooth mappings $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{D} : \Omega \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}^{d+4}, \mathbb{R}^{d+4})$ and $\tilde{\mathbf{S}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ such that the mapping $\mathbf{w} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi$ defined by

$$\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{v})$$

is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ solution of the system:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}) + \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{w}). \quad (3.10)$$

The matrix $\mathbf{A}_0(\mathbf{w})$ is moreover invertible for any $\mathbf{w} \in \Phi(\Omega)$ and the mapping $\tilde{\mathbf{S}}(\cdot)$ is a zero order function, i.e. without differential operator.

The system (3.10) finds the following developed form:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.11.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x \left(\chi (\mu + \mu_\tau) \partial_x u_1 \right), \quad (3.11.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_i u_1) = \partial_x \left((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i \right), \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.11.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x \left((\mu + \mu_\tau) \left(\chi u_1 \partial_x u_1 + \sum_{i=2}^d u_i \partial_x u_i \right) \right) \quad (3.11.iv)$$

$$\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \mu \left(\partial_t \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} + \partial_x \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} u_1 \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \mu_\tau \left(\partial_t \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} + \partial_x \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} u_1 \right) = -\epsilon (\mu_\tau + \mu), \quad (3.11.v)$$

$$\partial_t \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\epsilon} + \partial_x \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\epsilon} u_1 = (C_2 - C_1) (\gamma_\tau - 1) \rho^{2-C_1} p_\tau^{C_1-1}. \quad (3.11.vi)$$

Remark 3.7

One can notice that there is no second order term in equations (3.11.iv) and (3.11.v) and that (3.11.iv) is the only nonconservative equation of the system (3.10).

The above result implies the equivalence between the (k, ϵ) model, governed by (2.10), and the system (3.10) for smooth solution. It is possible to extend the equivalence for shock wave solutions. This extension is obtained using travelling wave analysis given by the Theorem 2.4.

Theorem 3.8

Assume that the assumptions introduced in the Theorem 3.2 hold. Assume that the discontinuous function

$$\mathbf{v}_0(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_R, & x < \sigma t, \\ \mathbf{v}_L, & x > \sigma t, \end{cases}$$

defines a shock wave solution of

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \delta_{x=\sigma t} \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad (3.12)$$

compatible with the dissipation operator characterized by $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$. Then the discontinuous function

$$\mathbf{w}_0(t, x) = \Phi(\mathbf{v}_0(t, x)) = \begin{cases} \Phi(\mathbf{v}_R) = \mathbf{w}_R, & x < \sigma t, \\ \Phi(\mathbf{v}_L) = \mathbf{w}_L, & x > \sigma t, \end{cases}$$

define a shock wave solution of

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = 0 \quad (3.13)$$

compatible with the dissipation $\mathbf{D}$. The triple $(\sigma, \mathbf{w}_R, \mathbf{w}_L)$ is then characterized by

$$-\sigma \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}_0(\hat{\mathbf{w}}(\xi)) \hat{\mathbf{w}}'(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{w}}(\xi)) \hat{\mathbf{w}}'(\xi) d\xi = 0. \quad (3.14)$$

Consequently, the systems (3.12) and (3.13) are equivalent for shock wave solutions.

Proof of the Theorem 3.8

Under assumptions, the existence of a travelling wave, denoted by $\mathbf{v}(t, x)$ in the form (2.12) with the pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ characterized by (2.13), is obtained by virtue of the Theorem 2.4. The Theorem 3.2 implies thus the existence of a shock wave, denoted by $\mathbf{v}_0(t, x)$, solution of the system (3.12).

Since the travelling wave solutions $\mathbf{v}(t, x)$ is smooth enough, the function $\mathbf{w} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\Omega)$, defined by

$$\begin{cases} \mathbf{w}(t, x) = \hat{\mathbf{w}}(x - \sigma t) = \Phi(\hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t)), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{w}(t, x) = \Phi(\mathbf{v}_L), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{w}(t, x) = \Phi(\mathbf{v}_R), \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases}$$

is a travelling wave solution of the following system extracted from (3.10):

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}).$$

Consequently, the function $\mathbf{w}_\nu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\Omega)$ defined by

$$\mathbf{w}_\nu(t, x) = \hat{\mathbf{w}}_\nu(x - \sigma t) = \hat{\mathbf{w}}\left(\frac{x - \sigma t}{\nu}\right),$$

converges a.e. toward the discontinuous function $\mathbf{w}_0(t, x) = \Phi(\mathbf{v}_0(t, x))$.

Since the second order operator is in conservative form and the function $\hat{\mathbf{w}} : \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\Omega)$ is characterized by

$$-\sigma \mathbf{A}_0(\hat{\mathbf{w}})\hat{\mathbf{w}}' + \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{w}})\hat{\mathbf{w}}' - (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{w}})\hat{\mathbf{w}}')' = 0, \quad (3.15.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{w}}(\xi) = \mathbf{w}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{w}}(\xi) = \mathbf{w}_R, \quad (3.15.ii)$$

then, after integrating (3.15.i) over $\mathbb{R}$, the equality (3.14) is obtained. ■

4 Proof of the Theorem 2.4

This section is devoted to the proof of the Theorem 2.4 in the case $\gamma < \gamma_\tau$. The case $\gamma = \gamma_\tau$ is proved in the appendix A.

Let σ be a real given constant. A function $\mathbf{v}(t, x)$ in the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (4.1)$$

with $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$ two bounded constant state, is considered. This function is a travelling wave solution of (2.11) if and only if, for a given constant state $\mathbf{v}_L$, respectively $\mathbf{v}_R$, there exists a unique constant state $\mathbf{v}_R$, respectively $\mathbf{v}_L$, and a function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solution of the following set of ordinary differential equation:

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}' = (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}')' + (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}') \quad (4.2)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R, \quad (4.3)$$

where $'$ denotes the derivation with respect to ξ .

In order to simplify the presentation, we omit the notation $\hat{\mathbf{v}}$ and we set

$$\hat{\mathbf{v}}(\xi) = {}^T(\rho(\xi), \underline{u}(\xi), E(\xi), p_\tau(\xi), \varepsilon(\xi)).$$

The following notations are introduced:

$$\tau = \frac{1}{\rho}, \quad M = \rho(u_1 - \sigma) \quad \text{and} \quad v = u_1 - \sigma.$$

Consequently, the ODE system (4.2) can be written

$$d_\xi M = 0, \quad (4.4.i)$$

$$M^2 d_\xi \tau + d_\xi(p + p_\tau) = M d_\xi((\mu + \mu_\tau)\chi d_\xi \tau), \quad (4.4.ii)$$

$$M d_\xi u_i = d_\xi((\mu + \mu_\tau)d_\xi u_i) \quad i = 2, \dots, d, \quad (4.4.iii)$$

$$M\tau d_\xi p + \gamma p M d_\xi \tau = (\gamma - 1)\chi\mu M^2(d_\xi \tau)^2 + (\gamma - 1)\mu \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2, \quad (4.4.iv)$$

$$M\tau d_\xi p_\tau + \gamma_\tau p_\tau M d_\xi \tau = (\gamma_\tau - 1)\chi\mu_\tau M^2(d_\xi \tau)^2 + (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2, \quad (4.4.v)$$

$$M\tau d_\xi \varepsilon + \gamma_\varepsilon \varepsilon M d_\xi \tau = (\gamma_\varepsilon - 1)\chi\mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} M^2(d_\xi \tau)^2 + (\gamma_\varepsilon - 1)\mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2. \quad (4.4.vi)$$

The equation (4.4.i) implies that the function $M(\xi)$ is a real constant denoted by $M = \rho_L(u_{1L} - \sigma)$. Two cases, $M > 0$ or $M < 0$, must be distinguished respectively associated with a 1-compression wave or a 3-compression wave. For convenience, only case $M > 0$ is considered. The 3-compression wave, *i.e.* $M < 0$, can be deduced from $M > 0$ reversing the role of ξ to $-\xi$.

The two following results reduce the $d + 4$ -ODE (4.4) to a 2-ODE completed by algebraic relations.

Lemma 4.1

Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be given and assume that $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a $C^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) such that there exists a bounded state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ satisfying

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L \quad \text{and} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R.$$

Then the function $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ satisfies

$$M = \rho_L((u_1)_L - \sigma), \quad (4.5.i)$$

$$u_i(\xi) = (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \quad (4.5.ii)$$

$$\rho^{1-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon}(\xi) = \rho_L^{1-C_1} \frac{(p_{\tau L})^{C_1}}{\varepsilon_L}, \quad (4.5.iii)$$

$$(p(\xi) + p_\tau(\xi))\tau(\xi) = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_\tau(\xi)\tau(\xi) + (\gamma - 1)\tau_L \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + (\gamma - 1)(\tau(\xi) - \tau_L) \left(\frac{M^2}{2}(\tau(\xi) - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right) \quad (4.5.iv)$$

for any ξ in $\mathbb{R}$.

Proof of the Lemma 4.1

Since $\hat{\mathbf{v}}$ is a smooth solution of (4.4) and $\mu_\tau = C_\mu \frac{p_\tau^2}{\varepsilon}$, the equations (4.4.v) and (4.4.vi)

can be written

$$d_\xi p_\tau \tau^{\gamma_\tau} = (\gamma_\tau - 1) \chi C_\mu \frac{p_\tau^2}{\varepsilon} \tau^{\gamma_\tau - 1} M (d_\xi v)^2 + \frac{\gamma_\tau - 1}{M} C_\mu \frac{p_\tau^2}{\varepsilon} \tau^{\gamma_\tau - 1} \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2, \quad (4.6.i)$$

$$d_\xi \varepsilon \tau^{\gamma_\varepsilon} = (\gamma_\varepsilon - 1) \chi C_\mu p_\tau \tau^{\gamma_\varepsilon - 1} M (d_\xi v)^2 + \frac{\gamma_\varepsilon - 1}{M} C_\mu p_\tau \tau^{\gamma_\varepsilon - 1} \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2. \quad (4.6.ii)$$

An easy combination of the equations (4.6.i) and (4.6.ii) gives

$$d_\xi \tau^{1-C_1} \frac{\varepsilon}{p_\tau^{C_1}} = 0. \quad (4.7)$$

With $i = 2, \dots, d$ and setting $U_i = u_i - (u_i)_L$, the integration of (4.4.iii) over $] -\infty, \xi]$ gives

$$M U_i = (\mu + \mu_\tau) d_\xi U_i. \quad (4.8)$$

Since $M > 0$ and $\hat{v}$ are a bounded $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) included in Ω , then the function $\mu + \mu_\tau(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is positive and bounded. Consequently, the unique bounded solution of the equation (4.8) is $U_i \equiv 0$ which implies the relation (4.5.ii).

Consequently, the equations (4.4.ii), (4.4.iv) and (4.4.v) can be written

$$M^2 d_\xi \tau + d_\xi (p + p_\tau) = M d_\xi ((\mu + \mu_\tau) \chi d_\xi \tau), \quad (4.9.i)$$

$$\tau d_\xi p + \gamma p d_\xi \tau = M(\gamma - 1) \chi \mu (d_\xi \tau)^2, \quad (4.9.ii)$$

$$\tau d_\xi p_\tau + \gamma_\tau p_\tau d_\xi \tau = M(\gamma_\tau - 1) \chi \mu_\tau (d_\xi \tau)^2. \quad (4.9.iii)$$

Setting $H = M^2 \tau + p + p_\tau$ and $H_L = M^2 \tau_L + p_L + p_{\tau L}$, the integration of (4.9.i) over $] -\infty, \xi]$ gives

$$H - H_L = (\mu + \mu_\tau) \chi M d_\xi \tau, \quad (4.10.i)$$

$$\tau d_\xi p + \gamma p d_\xi \tau = (\gamma - 1) \chi \mu M (d_\xi \tau)^2, \quad (4.10.ii)$$

$$\tau d_\xi p_\tau + \gamma_\tau p_\tau d_\xi \tau = (\gamma_\tau - 1) \chi \mu_\tau M (d_\xi \tau)^2. \quad (4.10.iii)$$

The sum of (4.10.ii), divided by $(\gamma - 1)$, with (4.10.iii), divided by $(\gamma_\tau - 1)$, can be written

$$d_\xi \left(\tau \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right) - \frac{M^2}{2} \tau^2 \right) + H d_\xi \tau = (\mu + \mu_\tau) \chi M (d_\xi \tau)^2. \quad (4.11)$$

The multiplication of (4.10.i) by $d_\xi \tau$ gives thus

$$H d_\xi \tau = H_L d_\xi \tau + (\mu + \mu_\tau) \chi M (d_\xi \tau)^2.$$

Introducing this relation in (4.11), we obtain

$$d_\xi \left(\tau \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right) + H_L \tau - \frac{M^2}{2} \tau^2 \right) = 0.$$

The integration from $-\infty$ to ξ of the above equation gives the expected relation (4.5.iv). ■

Lemma 4.2

Under the assumptions introduced in the Lemma 4.1, the pair $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ is solution of the following system:

$$\chi(\mu + \mu_\tau)M\tau d_\xi \tau = M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} (\tau p_\tau - \tau_L p_{\tau_L}), \quad (4.12.i)$$

$$d_\xi p_\tau \tau^{\gamma_\tau} = \chi(\gamma_\tau - 1) \mu_\tau M \tau^{\gamma_\tau - 1} (d_\xi \tau)^2 \quad (4.12.ii)$$

with

$$\tau_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L + p_{\tau_L}}{M^2}. \quad (4.13)$$

Remark 4.3

Under the assumption (2.14), i.e. $M^2 \tau_L > \gamma(p_L + p_{\tau_L})$, the following inequality holds:

$$\tau_0 < \tau_L.$$

Proof of the Lemma 4.2

The equation (4.4.ii) is written

$$d_\xi (M^2 \tau + p + p_\tau) = d_\xi ((\mu + \mu_\tau) \chi M d_\xi \tau).$$

Its integration over $] -\infty, \xi]$ gives

$$(\mu + \mu_\tau) \chi M d_\xi \tau = M^2 \tau + p + p_\tau - (M^2 \tau_L + p_L + p_{\tau_L})$$

A multiplication by τ of the above equation allows to plug it in the relation (4.5.iv). A straightforward calculation gives thus the equation (4.12.i).

The equation (4.12.ii) is given by (4.6.i), since $u_i(\xi) = (u_i)_L$ with $i = 2, \dots, d$. ■

According to the above lemmas, the function $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) satisfying (4.3) if and only if the valued vector function $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.12) and admits two bounded limits at the infinity.

For the sake of clarity, the following notations:

$$\theta = 2 - C_1, \quad \alpha = \chi M C_\mu \rho_L^{1-C_1} \frac{(p_{\tau_L})^{C_1}}{\varepsilon_L} \quad \text{and} \quad \nu(\xi) = \frac{\varepsilon_L}{C_\mu \rho_L^{1-C_1} (p_{\tau_L})^{C_1}} \mu(\xi)$$

are introduced. Since $\mathbf{v}_L \in \Omega$, $C_1 \in]1, 2[$ and $\mu \in [m_1, m_2]$, there exists two positive constants denoted again $m_1 < m_2$ such that

$$\theta \in]0, 1[, \quad \alpha > 0 \quad \text{and} \quad \nu \in [m_1, m_2]. \quad (4.14)$$

Under simplifications and setting $s_\tau(\xi) = p_\tau(\xi)\tau(\xi)^{\gamma_\tau}$ the system (4.12) is written

$$d_\xi \tau = \frac{M^2}{\alpha} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta} \frac{(\tau-\tau_L)(\tau-\tau_0)}{\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau^\theta} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\gamma_\tau-\gamma}{\gamma_\tau-1} \right) \tau^{(\gamma_\tau-1)(\theta-1)} \frac{s_\tau - (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau-1}}{\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau^\theta}, \quad (4.15.i)$$

$$d_\xi s_\tau = (\gamma_\tau - 1) \alpha s_\tau^\theta \tau^{(\gamma_\tau-1)(1-\theta)-1} (d_\xi \tau)^2. \quad (4.15.ii)$$

The system (4.15) takes the following condensed form:

$$d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \quad (4.16)$$

where $\mathbf{Z}(\xi) = {}^T(\tau(\xi), s_\tau(\xi))$ and $\mathbf{X}(\mathbf{Z})$ is the vector field of the system (4.15).

Consequently, the function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) satisfying (4.3) if and only if the system (4.16) admits a unique $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution for which limits at the infinity exist and are bounded. Consequently, the proof of the Theorem 2.4 lies on the existence of a unique integral curve of the vector field $\mathbf{X}$ connecting two critical points.

Lemma 4.4

Let us assume that $M^2 \tau_L > \gamma p_L + \gamma_\tau p_{\tau_L}$. Then the set of critical points, denoted by $\mathcal{C}$, of the vector field $\mathbf{X}$ is a smooth curve parameterized by τ and denoted by $\mathcal{C}(\tau)$ and defined, in the $\mathbf{Z}$ -plane by

$$\mathcal{C}(\tau) = (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau-1} - \left(\frac{\gamma_\tau-1}{\gamma_\tau-\gamma} \right) \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) M^2 \tau^{\gamma_\tau-1} (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0), \quad (4.17)$$

where τ_0 is defined in (4.13). There exists two positive constants $\tau_m < \tau_M$ such that

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tau) &> 0 & \forall \tau \in]\tau_m, \tau_M[, \\ \mathcal{C}(\tau) &\leq 0 & \forall \tau > 0 \text{ and } \tau \notin]\tau_m, \tau_M[, \end{aligned}$$

and there exists a unique $\tau^* \in]\tau_m, \tau_M[$ such that

$$\frac{d \mathcal{C}(\tau)}{d \tau}(\tau^*) = 0.$$

The curve $\mathcal{C}(\tau)$ is a strictly concave curve on $] \tau^*, \tau_M[$. Furthermore, the point $\mathbf{Z}_L = {}^T(\tau_L, p_{\tau_L} \tau_L^{\gamma_\tau}) \in \mathcal{C}$ satisfies $\tau_L \in] \tau^*, \tau_M[$.

Proof of the Lemma 4.4

By definition a critical point $\mathbf{Z}$ of the vector field $\mathbf{X}$ is defined by

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) = 0.$$

The developed form of the field $\mathbf{X}$ implies that $\mathbf{Z} = {}^T(\tau, s_\tau)$ is a critical point if and only if

$$d_\xi \tau(\xi) = 0$$

which is equivalent to

$$s_\tau = (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau - 1} - \left(\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma_\tau - \gamma} \right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M^2 \tau^{\gamma_\tau - 1} (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0). \quad (4.18)$$

where τ_0 is defined by (4.13).

Consequently, the set of the critical points is a curve parameterized by τ . An easy study of this curve allows to conclude the proof. ■

Lemma 4.5

Define the domain D by

$$D = \left\{ (\tau, s_\tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*; \tau \in]\tau_m, \tau_M[, 0 < s_\tau < \mathcal{C}(\tau) \right\}.$$

Assume that $\mathbf{Z}$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.16) connecting two critical points denoted by $\mathbf{Z}^+$ and $\mathbf{Z}^-$ such that

$$s_\tau^- > 0 \quad \text{and} \quad \tau^- \in]\tau^*, \tau_M[.$$

Then necessarily $\mathbf{Z}(\xi) \subset D$ for any $\xi \in \mathbb{R}$ and satisfies

$$0 < s_\tau^- < s_\tau(\xi) < s_\tau^+ \quad \text{and} \quad 0 < \tau^+ < \tau(\xi) < \tau^- \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Proof of the Lemma 4.5

Considering the phase plane includes in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, a straightforward calculation gives

$$\begin{aligned} d_\xi s_\tau &\geq 0 & \forall \tau > 0 \text{ and } \forall s_\tau > 0, \\ d_\xi s_\tau &= 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d_\xi \tau &< 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in D, \\ d_\xi \tau &= 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in \mathcal{C}, \\ d_\xi \tau &> 0 & \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Consequently, the vector field $\mathbf{X}$ admits a vertical component always increasing. But its horizontal component is decreasing on D and decreasing otherwise (cf. figure 1.2).

The Lemma 4.4 concludes the proof. ■

This result allows to restrict the study in the domain D . We have to prove the existence of an unique integral curve of the vector field $\mathbf{X}$ which connects $\mathbf{Z}_L$ to an other critical point. This demonstration is split as follows.

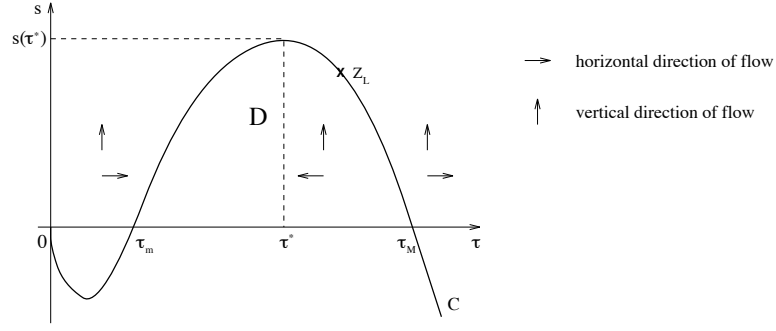


Figure 1.2: Phases space of system (4.15)

Lemma 4.6

Let $\mathbf{Z}_0$ be any point in D . The autonomous Cauchy problem

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), & \forall \xi > 0, \\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \end{cases} \quad (4.20)$$

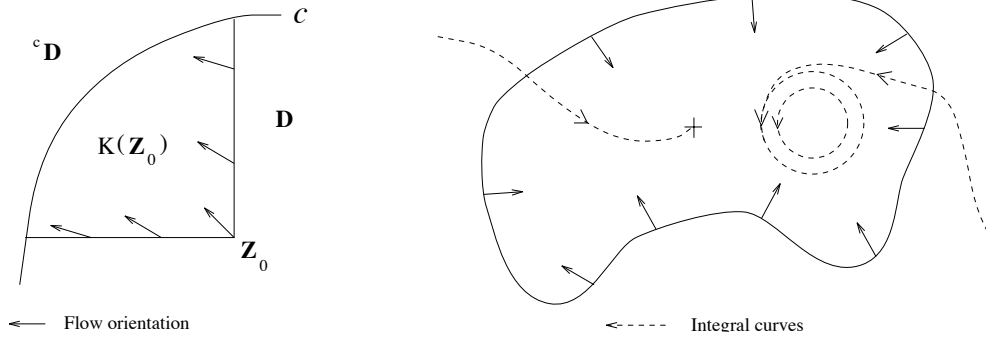
admits a unique solution $\mathbf{Z}(\xi)$. Furthermore there exists a unique critical point $\mathbf{Z}^+ \in \mathcal{C}$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{Z}(\xi) = \mathbf{Z}^+.$$

Proof of the Lemma 4.6

Consider the nonempty compact $K(\mathbf{Z}_0)$ defined by

$$K(\mathbf{Z}_0) = \{\mathbf{Z} \in D \cup \mathcal{C}; \tau \leq \tau(0), s_\tau \geq s_\tau(0)\}.$$

Figure 1.3: Compact $K(\mathbf{Z}_0)$ and orbits in a positively invariant compact

Denoting by $\mathbf{n}$ the outward unit normal of $K(\mathbf{Z}_0)$ an easy computation gives

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \leq 0.$$

Consequently, the continuity of the vector field $\mathbf{X}$ in $K(\mathbf{Z}_0)$ implies that $K(\mathbf{Z}_0)$ is a positively invariant compact of the vector field $\mathbf{X}$. The orbits cannot leave $K(\mathbf{Z}_0)$ when ξ is increasing. This leads to orbits of the vector field $\mathbf{X}$ converge to a critical point or a periodical orbit. The monotony of the integral flow in $K(\mathbf{Z}_0)$ implies the convergence to a critical point and not to a periodical orbit (cf. figure 1.3).

Since θ , α and ν satisfy (4.14) then the vector field $\mathbf{X}$ is Lipschitz in $K(\mathbf{Z}_0)$ and the proof is complete. ■

Lemma 4.7

Let us define

$$\mathcal{C}^- = \{\mathbf{Z} \in \mathcal{C}; \tau^* < \tau < \tau_M\}$$

and consider $\Theta \subset D$ a neighbourhood of $\mathcal{C}^-$. Let $\mathbf{Z}_0$ be any point in Θ . The autonomous Cauchy problem

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), & \forall \xi < 0, \\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

admits a unique solution $\mathbf{Z}(\xi)$. Furthermore there exists a unique critical point $\mathbf{Z}^- \in \mathcal{C}$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{Z}(\xi) = \mathbf{Z}^-.$$

Proof of the Lemma 4.7

Likewise the proof of the Lemma 4.6, a negatively invariant compact is given.

Consider $\mathbf{Z}_1$ and $\mathbf{Z}_2$ two points of $\mathcal{C}^-$. The Lemma 4.4 ensures $\mathcal{C}^-$ is a strictly concave curve. Consequently, the segment connecting $\mathbf{Z}_1$ to $\mathbf{Z}_2$ is included in D . A compact denoted by $K(\mathbf{Z}_0)$ and closed by the segment and the curve $\mathcal{C}^-$ is thus defined. The points $\mathbf{Z}_1$ to $\mathbf{Z}_2$ are chosen in order to $\mathbf{Z}_0 \in K(\mathbf{Z}_0)$ and the segment connecting $\mathbf{Z}_1$ to $\mathbf{Z}_2$ be included in Θ .

The outward unit normal to $K(\mathbf{Z}_0)$ denoted by $\mathbf{n}(\mathbf{Z}) = {}^T(n_\tau(\mathbf{Z}), n_{s_\tau}(\mathbf{Z}))$ satisfies

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z}) &= 0 \quad \forall \mathbf{Z} \in \mathcal{C}^-, \\ \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z}) &= \left(n_\tau(\mathbf{Z}) + n_{s_\tau}(\mathbf{Z})(\gamma_\tau - 1)\alpha s_\tau^\theta \tau^{(\gamma_\tau - 1)(1 - \theta) - 1} d_\xi \tau \right) d_\xi \tau \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

An easy proof ensures

$$n_\tau(\mathbf{Z}) < 0 \quad \text{and} \quad n_{s_\tau}(\mathbf{Z}) < 0$$

for any $\mathbf{Z}$ belonging to the segment connecting $\mathbf{Z}_1$ to $\mathbf{Z}_2$. Since in Θ the quantities $d_\xi \tau < 0$ is in a neighbourhood of 0 then Θ can be chosen such that

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Z} \in \partial K(\mathbf{Z}_0).$$

Consequently, the continuity of the vector field $\mathbf{X}$ in $K(\mathbf{Z}_0)$ implies that $K(\mathbf{Z}_0)$ is a negatively invariant compact of the vector field $\mathbf{X}$. Since θ , α and ν satisfy (4.14) then the vector field $\mathbf{X}$ is Lipschitz in $K(\mathbf{Z}_0)$ and the proof is complete. ■

The Lemma 4.6 and the Lemma 4.7 prove the existence of integral curves of the vector field $\mathbf{X}$ which connects two critical points namely $\mathbf{Z}^+$ and $\mathbf{Z}^-$. Of course, these integral curves are defined up to a translation.

Lemma 4.8

Let $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ be any point of $\mathcal{C}^-$. Then there exists a unique integral curves of the vector field $\mathbf{X}$ which connects the critical point $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ to an other denoted by $\tilde{\mathbf{Z}}^+$.

Proof of the Lemma 4.8

Over every integral curves connecting two critical points $\mathbf{Z}^+$ to $\mathbf{Z}^-$ the inequality (4.19) implies that the mapping $\xi \rightarrow \tau(\xi)$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -diffeomorphism. Consequently, $\mathbf{Z}(\xi)$ is an integral curves connecting two critical points if and only if $\mathbf{Z}(\xi)$ satisfy

$$\begin{aligned} \frac{ds_\tau(\tau)}{d\tau} &= M^2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) (\gamma_\tau - 1) \frac{\tau^{\gamma_\tau-1} s_\tau(\tau)^\theta (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\tau (\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau(\tau)^\theta)} + \\ &\quad (\gamma_\tau - \gamma) \frac{s_\tau(\tau)^\theta (s_\tau(\tau) - (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau-1})}{\tau (\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau(\tau)^\theta)} \quad \forall \tau \in [\tau^+, \tau^-], \\ s_\tau(\tau^-) &= s_\tau^- \geq 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

The existence of $\mathbf{Z}(\xi)$ implies the existence of $s(\tau)$ solution of the above ODE. Since $d_\tau s_\tau(\tau) < 0$, the solution $s_\tau(\tau)$ satisfies

$$s_\tau(\tau) > s_\tau^- \quad \forall \tau \in [\tau^+, \tau^-].$$

A straightforward calculation proves that the differential ordinary equation (4.22) is Lipschitz for any $\tau \in [\tau^+, \tau^-]$.

Let $\delta > 0$ be small enough. The Cauchy-Lipschitz Theorem can apply to the following Cauchy problem:

$$\begin{aligned} \frac{ds_\tau(\tau)}{d\tau} &= M^2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) (\gamma_\tau - 1) \frac{\tau^{\gamma_\tau-1} s_\tau(\tau)^\theta (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\tau (\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau(\tau)^\theta)} + \\ &\quad (\gamma_\tau - \gamma) \frac{s_\tau(\tau)^\theta (s_\tau(\tau) - (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau-1})}{\tau (\nu \tau^{(\gamma_\tau-1)\theta+1} + s_\tau(\tau)^\theta)} \quad \forall \tau \in [\hat{\tau}^- - \delta, \hat{\tau}^-], \\ s(\tau_L) &= \hat{s}_\tau^- > 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Consequently, there exists a point $\mathbf{Z}_0 \in D$ in a neighbourhood of $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ such that the autonomous system (4.21) admits a solution $\mathbf{Z}(\xi)$ satisfying

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{Z}(\xi) = \tilde{\mathbf{Z}}^-.$$

By mapping of the Lemma 4.6, there exists an integral curve of the vector field $\mathbf{X}$ connecting the critical point $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ to an other critical point denoted by $\tilde{\mathbf{Z}}^+$.

Assume that there exists two distinct integral curves $\mathbf{Z}^1(\xi)$ and $\mathbf{Z}^2(\xi)$ connecting both the same critical point $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ to an other respectively denoted by $\mathbf{Z}_+^1$ and $\mathbf{Z}_+^2$ with $\mathbf{Z}_+^1 \neq \mathbf{Z}_+^2$. Considering $\delta > 0$ small enough, the functions $\mathbf{Z}^1(\xi)$ and $\mathbf{Z}^2(\xi)$ are solutions of the Cauchy problem (4.23). Consequently, the existence of $\mathbf{Z}^1(\xi)$ and $\mathbf{Z}^2(\xi)$ contradicts the Cauchy-Lipschitz Theorem. Then the integral curve of the vector field $\mathbf{X}$ connecting the critical points $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ to other denoted by $\tilde{\mathbf{Z}}^+$ is unique. ■

Since the Lemma 4.4 implies $\mathbf{Z}_L \in \mathcal{C}^-$ then the proof of Theorem 2.4 is complete. ■

A The particular case : $\gamma = \gamma_\tau$

This section is devoted to the proof of Theorem 2.4 in the particular case $\gamma = \gamma_\tau$. It is proved the existence of a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ valued function $\hat{\mathbf{v}}(\xi) \in \mathbb{R}^{d+5}$ solution of the ODE system (4.4) and admitting bounded limits at the infinity with $\gamma = \gamma_\tau$.

With $\gamma = \gamma_\tau$, the Lemmas 4.1 and 4.2 remain true. For the same convenience as $\gamma < \gamma_\tau$, only case $M > 0$ is considered.

Likewise Section 4 the following notations:

$$\theta = 2 - C_1, \quad \alpha = \chi M C_\mu \rho_L^{1-C_1} \frac{(p_{\tau L})^{C_1}}{\varepsilon_L} \quad \text{and} \quad \nu(\xi) = \frac{\varepsilon_L}{C_\mu \rho_L^{1-C_1} (p_{\tau L})^{C_1}} \mu(\xi)$$

are introduced. Since $\mathbf{v}_L \in \Omega$, $C_1 \in]1, 2[$ and $\mu \in [m_1, m_2]$, there exists two positive constants denoted again $m_1 < m_2$ such that

$$\theta \in]0, 1[, \quad \alpha > 0 \quad \text{and} \quad \nu \in [m_1, m_2]. \quad (\text{A.1})$$

According to the lemmas 4.1 and 4.2, the function $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) satisfying (4.3) if and only if the vector valued function $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ admits two bounded limits at the infinity and is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of

$$d_\xi \tau = \frac{M^2}{\alpha} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \tau^{(\gamma-1)\theta} \frac{(\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\nu \tau^{(\gamma-1)\theta+1} + s_\tau^\theta}, \quad (\text{A.2.i})$$

$$d_\xi s_\tau = (\gamma - 1) \alpha s_\tau^\theta \tau^{(\gamma-1)(1-\theta)-1} (d_\xi \tau)^2, \quad (\text{A.2.ii})$$

where $s_\tau(\xi) = p_\tau(\xi) \tau(\xi)^{\gamma_\tau}$ and τ_0 is defined by (4.13).

The system (A.2) takes the following condensed form:

$$d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \quad (\text{A.3})$$

where $\mathbf{Z}(\xi) = {}^T(\tau(\xi), s_\tau(\xi))$ and $\mathbf{X}(\mathbf{Z})$ is the vector field of system (A.2).

Likewise $\gamma < \gamma_\tau$, the function $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (4.4) satisfying (4.3) if and only if the system (A.3) admits a unique $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution for which limits at the infinity exist and are bounded. In other words, (A.3) must admit a unique integral curve connecting two critical points.

Lemma A.1

(i) Assume that $\tau > 0$ and $s_\tau > 0$. Then the set of critical points of the vector field $\mathbf{X}$ is defined by the union of two parallel straight lines

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \{\tau = \tau_0, s_\tau > 0\}, \\ \Gamma^- &= \{\tau = \tau_L, s_\tau > 0\},\end{aligned}$$

where τ_0 is defined by (4.13).

(ii) Let us define the domain D included between Γ^+ and Γ^- by

$$D = \{(\tau, s_\tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*; \tau \in]\tau_0, \tau_L[, 0 < s_\tau\}.$$

Assume that $\mathbf{Z}$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (A.3) connecting two critical points denoted by $\mathbf{Z}^+$ and $\mathbf{Z}^-$ such that $\mathbf{Z}^- \in \Gamma^-$. Then necessarily $\mathbf{Z}(\xi) \subset D$ for any $\xi \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{Z}^+ \in \Gamma^+$.

(iii) The vector field $\mathbf{X}$ is continuous and Lipschitz in D .

Remark A.2

Under the assumption (2.14), i.e. $M^2\tau_L > \gamma(p + p_\tau)$, the following inequality is satisfied:

$$\tau_0 < \tau_L.$$

Proof of the Lemma A.1

By definition a critical point $\mathbf{Z}$ of the vector field $\mathbf{X}$ is defined by

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) = 0.$$

Since $\tau > 0$ and $s_\tau > 0$, the developed form of the field $\mathbf{X}$ implies that $\mathbf{Z} = {}^T(\tau, s_\tau)$ is a critical point if and only if

$$d_\xi \tau(\xi) = 0$$

which is equivalent to

$$\tau = \tau_0 \quad \text{or} \quad \tau = \tau_L$$

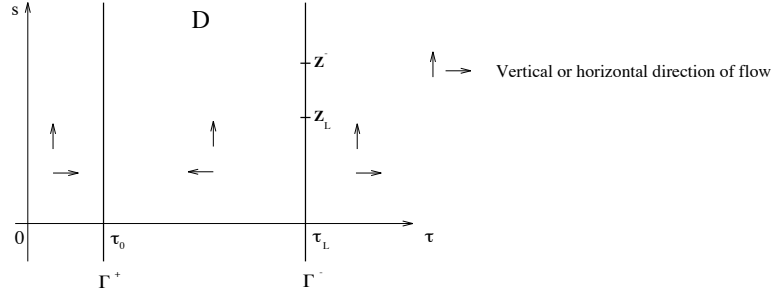
where τ_0 is defined by (4.13). Consequently, the set of the critical points is the union of two parallel straight lines.

Considering the phase plane includes in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, a straightforward calculation gives

$$\begin{aligned}d_\xi s_\tau &> 0 & \forall (\tau, s_\tau) \notin \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ d_\xi s_\tau &= 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}d_\xi \tau &< 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in D, \\ d_\xi \tau &= 0 & \forall (\tau, s_\tau) \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ d_\xi \tau &> 0 & \text{otherwise.}\end{aligned}$$

Figure 1.4: Phases space for $\gamma = \gamma_\tau$

Consequently, the vector field $\mathbf{X}$ admits a vertical component always increasing. But its horizontal component is decreasing on D and decreasing otherwise (cf. figure 1.4).

The property (ii) is deduced from the above results. The property (iii) is obtained by an easy calculation. The proof is thus complete. ■

The above result allows a restriction to the domain D since $\mathbf{Z}_L \in \Gamma^-$. We have thus to prove the existence of an unique integral curve of the vector field $\mathbf{X}$ which connects $\mathbf{Z}_L$ to an other critical point denoted by $\mathbf{Z}_R$. The proof is split as same as $\gamma < \gamma_\tau$ but with the new difficulty lying on D is unbounded in the direction of s_τ .

Lemma A.3

Let $\mathbf{Z}_0$ be any point in D . Assume that the autonomous Cauchy problem

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), & \forall \xi > 0, \\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

admits a solution $\mathbf{Z}(\xi)$ defined for any $\xi > 0$. Then there exists a positive bounded constant $s_{\tau M} > s_\tau(0)$ such that

$$s_\tau(\xi) < s_{\tau M} \quad \forall \xi > 0.$$

Corollary A.4

Let $\mathbf{Z}_0$ be any point in D . The autonomous Cauchy problem

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), & \forall \xi > 0, \\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \end{cases}$$

admits a unique solution $\mathbf{Z}(\xi)$. Furthermore there exists a unique critical point $\mathbf{Z}^+ \in \Gamma^+$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{Z}(\xi) = \mathbf{Z}^+.$$

Proof of Lemma A.3

We denote by C every positive generic constants.

The property (ii) of the Lemma A.1 implies that the solution $\mathbf{Z}(\xi)$ is included in D . Consequently, the functions $s_\tau(\xi)$ and $\tau(\xi)$ satisfies

$$s_\tau(\xi) > s_\tau(0) > 0 \quad \text{and} \quad \tau(\xi) \in [\tau_0, \tau(0)] \quad \forall \xi > 0. \quad (\text{A.5})$$

with τ_0 defined by (4.13). Moreover $\tau(0) < \tau_L$ since $\mathbf{Z}_0 \in D$.

Then the following inequality is deduced from the above relations, the equation (A.2.ii) and the inequalities (A.1):

$$d_\xi s_\tau(\xi) \leq C \frac{(\tau(\xi) - \tau_0)^2}{s_\tau(\xi)^\theta}. \quad (\text{A.6})$$

The integration between 0 and $\xi > 0$ gives

$$\begin{aligned} s_\tau(\xi)^{\theta+1} - s_\tau(0)^{\theta+1} &\leq C \int_0^\xi (\tau(\xi) - \tau_0)^2 d\xi, \\ &\leq C \|\tau - \tau_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

Consequently, there exists a positive bounded constant $s_{\tau M}$ such that $s_\tau(\xi) < s_{\tau M}$ for all $\xi \geq 0$ if and only if

$$(\tau(\xi) - \tau_0) \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

The inequality (A.6) can simplify as

$$d_\xi s_\tau(\xi)^{\theta+1} \leq C$$

which implies the following inequality:

$$s_\tau(\xi) \leq (C + C\xi)^{\frac{1}{\theta+1}}. \quad (\text{A.7})$$

Setting

$$\psi(\xi) = \frac{C}{C + (C + C\xi)^{\frac{\theta}{\theta+1}}} > 0 \quad \forall \xi \geq 0,$$

a straightforward estimation of (A.2.i) gives

$$d_\xi(\tau(\xi) - \tau_0) \leq -(\tau(\xi) - \tau_0) \psi(\xi). \quad (\text{A.8})$$

Consider the mapping φ defined by

$$\varphi(\xi) = (\tau(\xi) - \tau_0) e^{-\int_0^\xi \psi(\zeta) d\zeta}.$$

This mapping is positive since $\tau(\xi) > \tau_0$ for any $\xi > 0$. Moreover the inequality (A.8) implies that φ is decreasing. Consequently, this function satisfies

$$0 \leq \varphi(\xi) \leq \varphi(0) \quad \forall \xi > 0$$

which ensures

$$0 \leq \tau(\xi) - \tau_0 \leq C \exp \left(-C \int_0^\xi \frac{d\xi}{C + (C + C\xi)^{\frac{\theta}{\theta+1}}} \right) \quad \forall \xi > 0.$$

Since $\theta \in]0, 1[$ the function $\xi \rightarrow \tau(\xi) - \tau_0$ belong to $L^2(\mathbb{R}_+)$. This concludes the proof. ■

Lemma A.5

Consider that $\Theta \subset D$ is a neighbourhood of Γ^- and let $\mathbf{Z}_0$ any point in Θ . The autonomous Cauchy problem

$$\begin{cases} d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), & \forall \xi < 0, \\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

admits a unique solution $\mathbf{Z}(\xi)$. Furthermore there exists a unique critical point $\mathbf{Z}^- \in \Gamma^-$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{Z}(\xi) = \mathbf{Z}^-.$$

Proof of the Lemma A.5

The proof lies on the existence of a negatively invariant compact for the vector field $\mathbf{X}$.

Consider a vector $\mathbf{n}(\mathbf{Z})$ defined by

$$\mathbf{n}(\mathbf{Z}) = {}^T(n_\tau(\mathbf{Z}), n_{s_\tau}(\mathbf{Z})) \quad \forall \mathbf{Z} \in D.$$

Then the vector field $\mathbf{X}$ satisfy

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n} = \left(n_\tau + n_{s_\tau}(\mathbf{Z}) M^2 \frac{\gamma^2 - 1}{2} s_\tau^\theta \tau^{\gamma-2} \frac{(\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\nu \tau^{(\gamma-1)\theta+1} + s_\tau^\theta} \right) d_\xi \tau. \quad (\text{A.10})$$

Since $d_\xi \tau < 0$ for any $\mathbf{Z} \in D$ then

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z}) > 0 \quad \forall \mathbf{Z} \in D$$

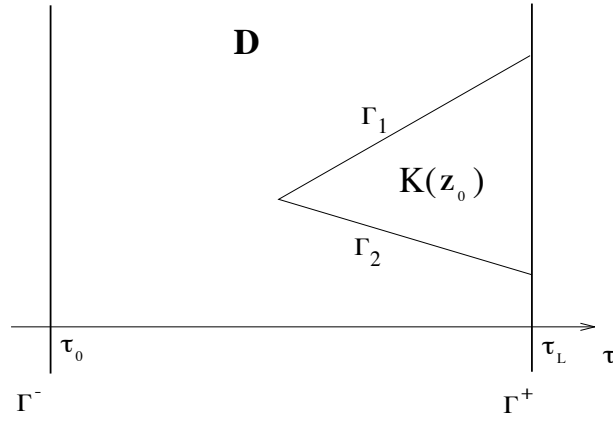
if

$$(a) \quad \begin{cases} n_\tau(\mathbf{Z}) \leq 0, \\ n_{s_\tau}(\mathbf{Z}) > 0, \end{cases} \quad \text{or} \quad (b) \quad \begin{cases} n_\tau(\mathbf{Z}) < 0, \\ \frac{n_\tau(\mathbf{Z})}{C^+} < n_{s_\tau}(\mathbf{Z}) \leq 0, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

with

$$C^+ = M^2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{2} \right) \tau_0^{\gamma-2} \left(\frac{\tau_L - \tau_0}{2} \right)^2.$$

Consider that Γ_1 and Γ_2 are two straight lines for which unit normal satisfies the conditions (a) respectively (b) of (A.11). This straight lines can be chosen in order to intersect in D (cf. figure 1.5).

Figure 1.5: Construction of the compact $K(\mathbf{Z}_0)$

Two compacts respectively closed by Γ^- and Γ^+ are thus defined. They can be chosen such that $\mathbf{Z}_0$ belongs to the compact closed by Γ^- . This one is denoted by $K(\mathbf{Z}_0)$. Moreover $K(\mathbf{Z}_0)$ can be chosen such that $K(\mathbf{Z}_0) \subset D$ since $\mathbf{Z}_0 \in \Theta$ (cf. figure 1.5).

By definition of $K(\mathbf{Z}_0)$, its outward unit normal $\mathbf{n}(\mathbf{Z})$ satisfies

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Z}) \geq 0.$$

Consequently, the continuity of the vector field $\mathbf{X}$ in $K(\mathbf{Z}_0)$ implies that $K(\mathbf{Z}_0)$ is a negatively invariant compact of the vector field $\mathbf{X}$. The vector field $\mathbf{X}$ being Lipschitz in $K(\mathbf{Z}_0)$, the proof is complete. ■

The Corollary A.4 and the Lemma A.5 prove the existence of integral curves of the vector field $\mathbf{X}$ which connects two critical points namely $\mathbf{Z}^+ \in \Gamma^+$ and $\mathbf{Z}^- \in \Gamma^-$. These integral curves are defined up to a translation.

Lemma A.6

Let $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ be any point of Γ^- . Then there exists a unique integral curves of the vector field $\mathbf{X}$ which connects the critical point $\tilde{\mathbf{Z}}^-$ to an other denoted by $\tilde{\mathbf{Z}}^+$.

The proof of this Lemma is analogous to the proof of the Lemma 4.8.

The proof of Theorem 2.4 with $\gamma = \gamma_\tau$ is complete since $\mathbf{Z}_L \in \Gamma^-$. ■

References

- [1] A. FORESTIER, J.M. HERARD et X. LOUIS, *A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, tome 324, Série I, No 8, pp. 919-926 (1997).

- [2] P. LEFLOCH, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in non conservation form*, Proc. 2nd Int. Conf., Aachen/FRG 1988, Notes Numer. Fluid Mech., Vol 24, pp 362-373 (1989).
- [3] P.G. LEFLOCH, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1990).
- [4] P.G. LEFLOCH, *Shock waves for non linear hyperbolic systems in non conservative form*, IMA preprint series No 593 (1989), University of Minnesota.
- [5] V. VATEL, Ph.D. thesis, Université Bordeaux I (1993).
- [6] X. LOUIS, Ph.D. thesis, Université Paris VI (1995).
- [7] L. SAINSAULIEU, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, février 1995
- [8] B. MOHAMMADI and O. PIRONNEAU, **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [9] L. SAINSAULIEU, *Travelling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative*, SIAM journal of Applied Math., vol 55, No 6, pp 1552-1576 (1995).
- [10] P. A. RAVIART and L. SAINSAULIEU, *A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 2. Existence of travelling waves solutions*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [11] B. LARROUTUROU, C. OLIVIER : *On the numerical approximation of the K-eps turbulence model for two dimensional compressible flows*, INRIA report 1526 (1991).
- [12] D. VANDROMME, *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. Thèse de l'Université de Lille (1983).
- [13] L. SAINSAULIEU, *Initial value problem for the parabolic regularization of a first order non hyperbolic system*, accepted for publication in Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [14] D. SERRE, **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).
- [15] G. DAL MASO, P. LEFLOCH and F. MURAT, *Definition and weak stability of a non conservative product*, J. Math. Pures Appl., vol 74, pp. 483-548 (1995).
- [16] J.F. COLOMBEAU and A.Y. LEROUX, *Numerical methods for hyperbolic system in non-conservative form using products of distributions*, in **Advances in Comp. Meth. dor P.D.E.'s 4**, ed. R. Vichnevetsky and R. Steplemar IMACS (1987).
- [17] L. SAINSAULIEU, *Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs*, C.R.A.S. Paris, t. 312, Série I, p. 491-494 (1991).
- [18] D. GILBARG : *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math., Vol 73, pp 256-274 (1951).

Chapitre 2

A convection-diffusion system with first and second order in nonconservation form.

Part 2 : Approximate jump relations

A convection-diffusion system with first and second order in nonconservation form.

Part 2 : Approximate jump relations

Abstract

The present work is devoted to the study of travelling wave solutions of a convection dissipation system, the so-called (k, ϵ) system modelling turbulent compressible flows. This system exhibits nonconservative products for both the first order and second order operators. A particular attention is payed to the laminar and turbulent viscosities whose ratio dictates the shape of the second order operator. In that aim, we introduce an equivalent system involving nonconservative products which are weighted by this ratio with the additional benefit of a second order operator in conservative form. Two limit cases are distinguished since they yield us to convection dissipation system in full conservative form.

1 Introduction

In the present work, we study for some interesting properties of travelling wave solutions of a convection-diffusion system governing turbulent compressible flows at high Reynolds numbers exhibited in [18]. The so-called (k, ϵ) model is derived under that assumption and we consider here the associated set of PDE's, we write for short as :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + (\partial_x \mathbf{u}, \mathbf{D}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

The precise shape of the system is given below. Since the Reynolds numbers under consideration are large, the solutions we are interested in are mainly driven by the first order extracted system. This first order system turns out to be hyperbolic but writes in non-conservative form so that its shock solutions are not defined in the classical distributional sense. This fact has been already underlined by Forestier-Hérard-Louis [1], Louis [6] and Vatel [5], who have proposed to use the Volpert product (see for instance LeFloch [3]) to define the generalized jump conditions.

However, following LeFloch [4], the shape of the second order operator dictates the definition of shock solutions. These one are defined when studying travelling wave solutions for the convection-diffusion system (1.1) (see [4], Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [9]).

The existence in the large of such travelling wave solutions is proved in [18]. The main difficulty comes from the nonconservative form met by both the first order and second

order operator when the Reynolds number goes to infinity. Indeed the travelling wave solutions of the system (1.1) yield us to shock wave solutions, with propagation velocity σ , of the following system :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathcal{M} \delta_{\{x=\sigma t\}}, \quad (1.2)$$

where $\mathcal{M}$ depends on the shape of the mapping $\mathbf{D}_1$ and the ratio of the laminar viscosity μ and turbulent viscosity μ_τ . A particular attention to the role played by this ratio of these two viscosities is paid. In that aim, an equivalent system is introduced which admits a second order operator in conservative form but at the expense of nonconservative products involving the partial derivation with respect to time :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \partial_x (\mathbf{C}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}) + \mathbf{S}(\mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Such nonconservative products involve the ratio of the viscosities as a weight but yield us to, when the Reynolds number goes to infinity, a generalized Rankine-Hugoniot conditions which does not involve the measure $\mathcal{M} \delta_{\{x=\sigma t\}}$.

If such generalized Rankine-Hugoniot conditions exist, it seems very difficult to deal with. In the present work, we prove that the considered flow admits two limit regimes respectively associated with the fully expanded turbulence (μ_τ/μ goes to zero) and evanescent turbulence (μ/μ_τ goes to zero). More precisely, it is proved that the travelling wave solutions of the model converge to the travelling wave solutions of fully conservative systems as the ratio of the viscosities goes to zero. Consequently, since the limit systems are in fully conservative form, then Rankine-Hugoniot conditions can be explicit. Such a result yields us to asymptotic expansion of the jump relations for the shock wave solutions of (1.1) as the Reynolds number goes to infinity.

The considered mathematical model is briefly described in the section 2. After recalling the result of the existence and uniqueness of the travelling wave solutions of the considered system, the two limits systems and the asymptotic expansion of the jump relations are expressed in the section 3. The section 4 is devoted to the proof of the main results presented in this work.

2 The mathematical model

The study of a turbulent flow in presence of a shock wave is proposed in the framework of the (k, ϵ) turbulence model for compressible flows. The fully established turbulent flow for an ideal gas with $d \geq 1$ space variables is considered. The gas is characterized by its density ρ , its velocity $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$ and its total energy E . We denote by k the specific kinetic turbulent energy and by ϵ the specific dissipation rate of the kinetic turbulent energy. For the sake of symmetry in the forthcoming statements, the equations governing k and ϵ are written in terms of the variables:

$$p_\tau = (\gamma_\tau - 1) \rho k, \quad \varepsilon = \rho \epsilon \quad \text{where} \quad \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}. \quad (2.1)$$

Here, p_τ may be compared to a turbulent pressure with adiabatic coefficient $\gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}$. The dependence on this coefficient with respect to the space dimension explains the need for considering the equations in several space variables. Denoting I the identity mapping in $\mathbb{R}^d$, the system of equations associated with the (k, ϵ) model writes

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{u} = 0, \quad (2.2.i)$$

$$\partial_t \rho \underline{u} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + (p + p_\tau) I) = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u})), \quad (2.2.ii)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot (E + p + p_\tau) \underline{u} = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau), \quad (2.2.iii)$$

$$\partial_t \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} + \nabla \cdot \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \underline{u} + p_\tau \nabla \cdot \underline{u} = \mu_\tau \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau) - \varepsilon, \quad (2.2.iv)$$

$$\partial_t \frac{\varepsilon}{\gamma_\epsilon - 1} + \nabla \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma_\epsilon - 1} \underline{u} + \varepsilon \nabla \cdot \underline{u} = \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \cdot \left(\kappa_\epsilon \nabla \frac{\varepsilon}{\rho} \right) - \frac{C_2}{C_1} \frac{\varepsilon^2}{p_\tau}. \quad (2.2.v)$$

The gas pressure p is taken as that of polytropic ideal gases:

$$\frac{p}{\gamma - 1} = E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1}, \quad 1 < \gamma \leq 3. \quad (2.3)$$

In (2.2.v), C_1 and C_2 denote two positive constants of the model such that classically $C_1 \in]1, 2[$ and $C_2 > C_1$ (see Mohammadi-Pironneau [8] for instance) and we have set

$$\gamma_\epsilon = (\gamma_\tau - 1)C_1 + 1 > 1.$$

Concerning the dissipation terms in the above equations, the viscous stress tensor $\mathbf{\Gamma}(\underline{u})$ reads

$$\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) = \nabla \underline{u} + {}^T \nabla \underline{u} - \frac{\lambda}{\mu} (\nabla \cdot \underline{u}) I, \quad (2.4)$$

where λ and μ respectively stand for the Lammé coefficient and the laminar viscosity. Here, $\mu = \mu(T)$ denotes a smooth and positive function of the temperature $T = p/\rho$. We use the Stokes assumption to get $\lambda/\mu = (\gamma_\tau - 1)$ when $d \geq 2$ while for $d = 1$ we choose as usual $\lambda/\mu = 1$. For convenience in what follows, we set $\lambda/\mu = 2 - \chi$ where clearly $\chi > 0$. Accordingly to the classical (k, ϵ) model, the turbulent viscosity is given by the following nonlinear expression:

$$\mu_\tau = C_\mu \frac{p_\tau^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \frac{\mathcal{C}_\mu}{(\gamma_\tau - 1)^2} > 0,$$

where the physics prescribes $\mathcal{C}_\mu = 0.09$ ([8]).

At last, $T_\tau = p_\tau/\rho$ may be considered as a turbulent temperature and the model constants κ , κ_τ and κ_ϵ refer to conductivity coefficients.

The two equations (2.2.iv) and (2.2.v) governing the turbulence phenomena are classically referred as to “transport” equations, respectively for the specific kinetic turbulent

energy and its dissipation rate. Such a terminology is clearly not suited since these two balance equations do involve both first order and second order products which cannot be put in conservative form. These products respectively take the form $(p_\tau \nabla \cdot \underline{u}, \varepsilon \nabla \cdot \underline{u})$ and $(\mu_\tau \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}), \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}))$.

Some recent works devoted to fluid models arising in other fields of the physics have dealt with first order extracted systems in nonconservative form. We refer for instance to LeFloch [2] for elasto-dynamics, to Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [9] for diphasic flows and to Cordier and al., Coquel-Marmignon for ionized flows. But in these works, the dissipation operators always stay in conservative form. Thus, the system studied in the present work yields a novelty, namely nonconservative products at the first and second order, which is a non standard mathematical problem. In this paper, our aim is to analyse the possible parabolic regularization of such a non classical second order operator on the (hyperbolic) first order system. In that aim, we study below for existence the plane travelling wave solutions of (2.2).

As far the modelling is concerned, our main assumption stays in the omission of the diffusive effects, adopting $\kappa = \kappa_\tau = \kappa_\varepsilon = 0$.

The main result of the present paper are presented in the following section.

3 Main results

3.1 Some recent results

We first state some recent properties which may find in [18].

Lemma 3.1

Consider the first order system extracted from (2.2) which can be written with clear notations in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i(\mathbf{v}) \partial_{x_i} \mathbf{v} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

with $\mathbf{v} = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, E, p_\tau, \varepsilon)$.

(i) *The system (3.1) is hyperbolic on the state space Ω defined by:*

$$\Omega = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+4} ; \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, p > 0, E > 0, p_\tau > 0, \varepsilon > 0 \right\}.$$

Let $\underline{n} = {}^T(n_1, \dots, n_d)$ be a normalised vector in $\mathbb{R}^d$. The matrix $\sum_{i=1}^d n_i \mathbf{A}_i(\mathbf{v})$ admits the following real eigenvalues

$$\underline{u} \cdot \underline{n} - c, \underline{u} \cdot \underline{n}, \underline{u} \cdot \underline{n} + c \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{\gamma_\tau p_\tau}{\rho}. \quad (3.2)$$

The multiplicity of the eigenvalue $\underline{u} \cdot \underline{n}$ is $d+2$. The associated fields are linearly degenerated and correspond to a contact discontinuity. The two other eigenvalues are simple and the associated fields are genuinely nonlinear.

(ii) Through a contact discontinuity, $\underline{u} \cdot \underline{n}$ and $p + p_\tau$ are continuous.

(iii) Let $\mathbf{v}$ be a smooth solution of the system (3.1). Then, $\mathbf{v}$ satisfies the following additional scalar conservation laws:

$$\partial_t U(\mathbf{v}) + \nabla \cdot F(\mathbf{v}) = 0, \quad U(\mathbf{v}) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p}{\rho^\gamma}, \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}, \frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma_\epsilon}} \right), \quad F(\mathbf{v}) = U(\mathbf{v}) \underline{u}, \quad (3.3)$$

where $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ denotes any given smooth mapping. Moreover, the mapping $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly convex if and only if the mapping $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly convex and satisfies for any $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}_+^3$ the following inequality:

$${}^T V \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) < -{}^T (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \cdot (\nabla^2 \mathcal{F})^{-1} \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \quad (3.4)$$

where $V = {}^T(\gamma s_1, \gamma_\tau s_2, \gamma_\epsilon s_3) \in \mathbb{R}^3$, $D = \text{diag}(\gamma - 1, \gamma_\tau - 1, \gamma_\epsilon - 1) \in \text{Mat}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ and $\nabla^2 \mathcal{F}$, respectively $\nabla \mathcal{F}$, refers to the Hessian matrix, respectively to the gradient vector, of $\mathcal{F}$.

Since the first order extracted system from (2.2) is hyperbolic, this implies to study the regularising properties of the second order operator. The existence of plane travelling wave solutions of the system (2.2) allows to prove such a property. This existence problem becomes usual (Raviart-Sainsaulieu [10], Sainsaulieu [12], Serre [13] for instance), but we recall the dissipation operator is in nonconservative form in the present work. It arises that the (k, ϵ) model is out of the usual frame of hyperbolic system with parabolic smoothness where the second order operator is in conservative form.

The plane wave solutions we want to study are at less $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ functions governed by the following system in one space dimension:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.5.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) \partial_x u_1), \quad (3.5.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_i u_1) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i), \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.5.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) u_1 \partial_x u_1) + \sum_{i=2}^d \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u_i \partial_x u_i), \quad (3.5.iv)$$

$$\partial_t p_\tau + u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1 = (\gamma_\tau - 1) \left[\chi \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 - \varepsilon \right], \quad (3.5.v)$$

$$\partial_t \varepsilon + u_1 \partial_x \varepsilon + \gamma_\epsilon \varepsilon \partial_x u_1 = (\gamma_\epsilon - 1) \left[\chi \frac{\varepsilon}{p_\tau} \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \frac{\varepsilon}{p_\tau} \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 - \frac{C_2 \varepsilon^2}{C_1 p_\tau} \right]. \quad (3.5.vi)$$

For the sake of conciseness, we rewrite, with the notations of the Lemma 3.1, the system (3.5) in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{v}). \quad (3.6)$$

Here, the mapping $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^{d+4} \times \mathbb{R}^{d+4} \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ is the contracted product in $\mathbb{R}^{d+4}$, i.e. for $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+4}$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+4}$ then $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{d+4}$ and its i^{th} component reads $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$. The mapping $\mathbf{D}_1(\mathbf{v}) : \Omega \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}^{d+4})$ satisfies

$${}^T(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) = \mu_\tau \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) \left(0, \dots, 0, (\gamma_\tau - 1), (\gamma_\epsilon - 1) \frac{\varepsilon}{p_\tau} \right).$$

Otherwise, the matrix $A(\mathbf{v})$ does not coincide with the Jacobian matrix of any flux function, since quantities $u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1$ and $u_1 \partial_x \varepsilon + \gamma_\tau C_1 \varepsilon \partial_x u_1$, appearing in the equations (3.5.v) and (3.5.vi), do not allow to obtain a conservative form. At last, the products $(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v})$, only contributing to the equations (3.5.v) and (3.5.vi), cannot be also written in conservative form. The main originality and difficulty of the system (3.5) lies on such a property. The (k, ϵ) model is out of the usual frame (cf. Raviart-Sainsaulieu [10], Serre [13]) of convection-dissipation system where $\mathbf{D}_1 \equiv 0$.

Contrary to the usual technique (developed by Mohammadi-Pironneau [8] for instance) the considered source term $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ is now a zero order function, *i.e.* without differential operator. This new property of the mapping $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ implies the source terms no impressing the smoothness of solutions. Consequently, the analysis of the parabolic regularisation of the second order operator can be realized no considering source terms. The studied system under consideration can be written

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}). \quad (3.7)$$

A travelling wave solution of (3.7) is a smooth function of the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (3.8)$$

where $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$ denote two bounded constant states. The pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}' - (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}')' - (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}') = 0, \quad (3.9.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R. \quad (3.9.ii)$$

The following result, proved in [18], is devoted to the existence of travelling wave solutions of system (3.7):

Theorem 3.2

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and $C_1 \in]1, 2[$. Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a given constant state and σ a given real constant. Assume that $\mathbf{v}_L$ and σ satisfy the following inequality:

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad (3.10)$$

and that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (3.8) which is solution of the system (3.7). This solution is unique up to a translation and is included in Ω .

Symmetrically, let $\mathbf{v}_R \in \Omega$ and $\sigma \in \mathbb{R}$ be given. Assume that $\mathbf{v}_R$ and σ satisfy

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad (3.11)$$

and assume that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_L \in \Omega$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (3.8) which is solution of the system (3.7). This solution is unique up to a translation and is included in Ω .

Remark 3.3

The assumption $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ is more restrictive than the usual where $1 < \gamma \leq 3$. But this condition appears as a natural modelling hypothesis for polytropic gases since $1 < \gamma \leq \frac{2}{d} + 1$.

The above Theorem proves that the second order operator is a parabolic regularization of the first order hyperbolic extracted system. Furthermore, it allows to define shock wave solution for the (k, ϵ) model in the following sense:

Theorem 3.4

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and let σ be a real given constant. Assume that one of the two following inequalities holds:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad \text{for a given constant state } \mathbf{v}_L, \\ (b) \quad & \frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad \text{for a given constant state } \mathbf{v}_R \end{aligned}$$

and assume that there exists two positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$.

(i) The smooth function $\mathbf{v}_\nu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ defined by

$$\mathbf{v}_\nu(t, x) = \hat{\mathbf{v}} \left(\frac{x - \sigma t}{\nu} \right),$$

where $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by (3.9), converges a.e. toward the discontinuous function

$$\mathbf{v}_0(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_R, & x < \sigma t, \\ \mathbf{v}_L, & x > \sigma t, \end{cases} \quad (3.12)$$

as ν goes to zero.

(ii) There exists a positive bounded measure $\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ defined by

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbf{v}}'(\xi) | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi)) d\xi = \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R).$$

Then the discontinuous function (3.12), defined in (i) as the limit of $\mathbf{v}_\nu$ when ν goes to zero, define a shock wave solution of

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \delta_{\{x=\sigma t\}} \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad (3.13)$$

compatible with the dissipation operator characterized by $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$.

(iii) The triple $(\sigma, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ is characterized by the following generalized jump relations:

$$-\sigma (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}(\xi)) \hat{\mathbf{v}}'(\xi) d\xi - \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = 0. \quad (3.14)$$

The measure $\mathcal{M}$, appearing in the jump relations (3.14), is unusual and we have to deal with. It can be shown that this measure is associated with nonconservative products involving the derivation with respect to time.

Lemma 3.5

Consider that $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ solution of system (3.5). Then there exists a $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphism $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$ and smooth mappings $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{D} : \Omega \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}^{d+4}, \mathbb{R}^{d+4})$ and $\tilde{\mathbf{S}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ such that the mapping $\mathbf{w} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Phi$ defined by

$$\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{v})$$

is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ solution of the system:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}) + \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{w}). \quad (3.15)$$

The matrix $\mathbf{A}_0(\mathbf{w})$ is moreover invertible for any $\mathbf{w} \in \Phi(\Omega)$ and the mapping $\tilde{\mathbf{S}}(\cdot)$ is a zero order function, i.e. without differential operator.

The system (3.15) takes the following developed form:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.16.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x \left(\chi (\mu + \mu_\tau) \partial_x u_1 \right), \quad (3.16.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_i u_1) = \partial_x \left((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i \right), \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.16.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x \left((\mu + \mu_\tau) \left(\chi u_1 \partial_x u_1 + \sum_{i=2}^d u_i \partial_x u_i \right) \right) \quad (3.16.iv)$$

$$\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \mu \left(\partial_t \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} + \partial_x \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau-1}} u_1 \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \mu_\tau \left(\partial_t \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} + \partial_x \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} u_1 \right) = -\varepsilon(\mu_\tau + \mu), \quad (3.16.v)$$

$$\partial_t \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} + \partial_x \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} u_1 = (C_2 - C_1)(\gamma_\tau - 1) \rho^{2-C_1} p_\tau^{C_1-1}. \quad (3.16.vi)$$

Remark 3.6

One can notice that there is no second order term in equations (3.16.iv) and (3.16.v) and that (3.16.iv) is the only nonconservative equation of the system (3.15).

The above result implies the equivalence between the (k, ϵ) model, governed by (3.6), and the system (3.15) for smooth solution. It is possible to extend the equivalence for a Riemann problem, *i.e.* for a discontinuous initial data. This extension is obtained using travelling wave analysis given Theorem 3.2.

Theorem 3.7

Assume that the assumptions introduced in the Theorem 3.4 hold. Assume that the discontinuous function

$$\mathbf{v}_0(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_R, & x < \sigma t, \\ \mathbf{v}_L, & x > \sigma t, \end{cases}$$

defines a shock wave solution of

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \delta_{x=\sigma t} \int d\mathcal{M}(\mathbf{D}_1, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad (3.17)$$

compatible with the dissipation operator characterized by $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$. Then the discontinuous function

$$\mathbf{w}_0(t, x) = \Phi(\mathbf{v}_0(t, x)) = \begin{cases} \Phi(\mathbf{v}_R) = \mathbf{w}_R, & x < \sigma t, \\ \Phi(\mathbf{v}_L) = \mathbf{w}_L, & x > \sigma t, \end{cases}$$

define a shock wave solution of

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}_1(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = 0 \quad (3.18)$$

compatible with the dissipation $\mathbf{D}$. The triple $(\sigma, \mathbf{w}_R, \mathbf{w}_L)$ is furthermore characterized by

$$-\sigma \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}_0(\hat{\mathbf{w}}(\xi)) \hat{\mathbf{w}}'(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{w}}(\xi)) \hat{\mathbf{w}}'(\xi) d\xi = 0. \quad (3.19)$$

Consequently, the systems (3.17) and (3.18) are equivalent for weak solutions.

Corollary 3.8

The systems (3.6) and (3.15) are equivalent for weak solutions.

3.2 Asymptotic behaviours

The non standard generalized jump relations (3.14), or equivalently (3.19), appear as a new difficulty in the characterization of the shock wave solution of (3.17), or equivalently (3.18). Since the first order operator is in nonconservative form and does not admit an

equivalent first order extracted system in conservative form, it appears impossible to find an explicit jump conditions. This remark leads us to propose an asymptotic expansion of the jump relations. First, it is proved the existence of a small parameter such that the shock wave solutions, previously describe, converge to the shock wave solutions of a fully conservative system. Since the hyperbolic limit system is in conservative form, the well known Rankine-Hugoniot conditions lead us to asymptotic jump relations for the shock wave solutions of (3.17).

Theorem 3.9

Let μ be a given positive real constant and let σ be a given real constant. Assume that

$$\eta = \frac{C_\mu}{\mu} \rightarrow 0$$

and consider one of the two following assertions:

- (a) Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L},$$
- (b) Let $\mathbf{v}_R \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R}.$$

Consider that $\mathbf{v}_\eta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a travelling wave solution of (3.7), where the function $\mathbf{v}_\eta$ is in form (3.8) and the pair $(\hat{\mathbf{v}}_\eta, \sigma)$ is characterized by (3.9).

(i) The function $\left(\frac{\mu_\tau}{\mu}\right)_\eta$ goes uniformly over $\mathbb{R}$ to zero.

(ii) There exists constant states $\mathbf{v}_{0R}, \mathbf{v}_{0L} \in \Omega$ where $\mathbf{v}_{0L} = \mathbf{v}_L$ for the case (a) or $\mathbf{v}_{0R} = \mathbf{v}_R$ for the case (b) such that the function $\mathbf{v}_\eta$ goes uniformly over $\mathbb{R}$ to a smooth function $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ satisfying:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_{0L}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_{0R}, \quad \xi = x - \sigma t.$$

This function $\mathbf{v}_0$ is a travelling wave solution of the following full conservative system:

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \partial_x (\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}), \quad (3.20)$$

whose the developed form is given by:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.21.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x (\chi \mu \partial_x u_1), \quad (3.21.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_1 u_i) = \partial_x (\mu \partial_x u_i) \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.21.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x \left(\mu \left(\chi u_1 \partial_x u_1 + \sum_{i=2}^d u_i \partial_x u_i \right) \right), \quad (3.21.iv)$$

$$\partial_t \rho h\left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}\right) + \partial_x \rho h\left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}\right) u_1 = 0, \quad (3.21.v)$$

$$\partial_t \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} + \partial_x \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} u_1 = 0, \quad (3.21.vi)$$

where $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ expresses an arbitrary strictly monotone function.

Symmetrically, the following results holds:

Theorem 3.10

Let C_μ be a given positive real constant and let σ be a given real constant. Assume that

$$\eta = \frac{\mu}{C_\mu} \rightarrow 0$$

and consider one of the two following assertions:

- (a) Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L},$$
- (b) Let $\mathbf{v}_R \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R}.$$

Consider that $\mathbf{v}_\eta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a travelling wave solution of (3.7), where the function $\mathbf{v}_\eta$ is in form (3.8) and the pair $(\hat{\mathbf{v}}_\eta, \sigma)$ is characterized by (3.9).

- (i) The function $\left(\frac{\mu}{\mu_\tau}\right)_\eta$ goes uniformly over $\mathbb{R}$ to zero.

(ii) There exists constant states $\mathbf{v}_{0R}, \mathbf{v}_{0L} \in \Omega$ where $\mathbf{v}_{0L} = \mathbf{v}_L$ for the case (a) or $\mathbf{v}_{0R} = \mathbf{v}_R$ for the case (b) such that the function $\mathbf{v}_\eta$ goes uniformly over $\mathbb{R}$ to a smooth function $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ satisfying:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_{0L}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_{0R}, \quad \xi = x - \sigma t.$$

This function $\mathbf{v}_0$ is a travelling wave solution of the following full conservative system:

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \partial_x (\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}), \quad (3.22)$$

whose the developed form is given by:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.23.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x (\chi \mu \partial_x \underline{u}_1), \quad (3.23.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_1 u_i) = \partial_x (\mu \partial_x \underline{u}_i) \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.23.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x(E + p + p_\tau)u_1 = \partial_x \left(\mu \left(\chi u_1 \partial_x u_1 + \sum_{i=2}^d u_i \partial_x u_i \right) \right), \quad (3.23.iv)$$

$$\partial_t \rho f\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + \partial_x \rho f\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)u_1 = 0, \quad (3.23.v)$$

$$\partial_t \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} + \partial_x \rho^{2-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon} u_1 = 0, \quad (3.23.vi)$$

where $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ expresses an arbitrary strictly monotone function.

Remark 3.11

The assumption μ a positive real constant is a natural modelling hypothesis for perfect calorific gases where thermal effects are neglected. It is not difficult to extend the Theorem 3.9 and 3.10 for a laminar viscosity as a function of the temperature satisfying the following assumption:

$$|\mu(T_1) - \mu(T_2)| \leq K_\mu |T_1 - T_2| \quad \forall T_1 > 0 \text{ and } T_2 > 0,$$

where K_μ is a real constant small enough.

Remark 3.12

It may appear strange to consider μ , respectively C_μ , as a constant when the ration $\frac{C_\mu}{\mu}$, respectively $\frac{\mu}{C_\mu}$, is a small parameter which goes to zero. But, the travelling wave functions, considered in the present paper, depend on C_μ and μ and not only of its ratio. The reader may find some details in the remark 2.7 of [18].

Corollary 3.13

Consider that the discontinuous function $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is defined by

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_R, & x < \sigma t, \\ \mathbf{v}_L, & x > \sigma t, \end{cases}$$

where σ is a given real constant. Assume that this discontinuous function $\mathbf{v}$ is a shock wave solution of (3.17).

(i) If $\frac{C_\mu}{\mu} \rightarrow 0$, then the function $\mathbf{v}$ converges a.e. to a shock wave solution of the following hyperbolic system in conservative form

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{v}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

where $\mathbf{v} \in \Omega$ and $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ are defined in Theorem 3.9.

(ii) If $\frac{\mu}{C_\mu} \rightarrow 0$, then the function $\mathbf{v}$ converges a.e. to a shock wave solution of the following hyperbolic system in conservative form

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{G}(\mathbf{w}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

where $\mathbf{w} \in \Omega$ and $\mathbf{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ are defined in Theorem 3.10.

The existence of a full conservative limit systems justifies asymptotic expansion of the generalized jump conditions (3.14). Two cases are distinguished respectively associated with the ration $\frac{\mu_\tau}{\mu}$ or $\frac{\mu}{\mu_\tau}$ in a neighbourhood of zero.

Proposition 3.14

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and $C_1 \in]1, 2[$. Assume that μ is a positive given constant. Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a bounded constant state and σ a real constant such that

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L}. \quad (3.24)$$

Denote $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, in the form (3.8), the travelling wave solution of (3.17).

Then the function $\mu_\tau/\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admits a global maximum denoted $(\mu_\tau/\mu)_R$. This maximum is obtained when $x - \sigma t$ goes to $+\infty$. There exists, furthermore, a vector sequence $(\mathbf{v}_i)_{0 \leq i \leq n}$ included in $\mathbb{R}^{d+4}$ which only depends on the constant state $\mathbf{v}_L \in \Omega$ and such that

$$\mathbf{v}_R = \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}) \quad \text{with} \quad \eta = \left(\frac{\mu_\tau}{\mu} \right)_R.$$

The state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ find the following developed form:

$$\begin{aligned} \tau_R &= \check{\tau}_R + \sum_{i=1}^n \tau_i(\mathbf{v}_L) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}), \\ p_{\tau R} \tau_R^{\gamma_\tau} &= p_{\tau L} \tau_L^{\gamma_\tau} + \sum_{i=1}^n \chi_i(\mathbf{v}_L, \tau_1(\mathbf{v}_L), \dots, \tau_{i-1}(\mathbf{v}_L)) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}), \\ (u_1)_R &= \sigma + \frac{(u_1)_L - \sigma}{\tau_L} \tau_R, \\ (u_i)_R &= (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \\ \varepsilon_R &= \left(\frac{\tau_L}{\tau_R} \right)^{1-C_1} \left(\frac{p_{\tau R}}{p_{\tau L}} \right)^{C_1} \varepsilon_L, \\ p_R &= -\frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1} p_{\tau R} + (\gamma-1) \frac{\tau_L}{\tau_R} \left(\frac{p_L}{\gamma-1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau-1} \right) + \\ &\quad (\gamma-1) \frac{\tau_R - \tau_L}{\tau_R} \left(\frac{M^2}{2} (\tau_R - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right), \end{aligned}$$

where $\check{\tau}_R > 0$ is the non trivial solution, i.e. $\check{\tau}_R \neq \tau_L$, of the equation

$$\begin{aligned} M^2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) (\check{\tau}_R - \tau_L) (\check{\tau}_R - \tau^*) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_{\tau L} \left(\frac{1}{\check{\tau}_R^{\gamma_\tau-1}} - \frac{1}{\tau_L^{\gamma_\tau-1}} \right) &= 0, \\ \text{with } \tau^* &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_L + p_{\tau L}}{M^2}. \end{aligned}$$

The functions $\tau_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $\chi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ can be explicitly defined.

Symmetrically, the following results holds:

Proposition 3.15

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and $C_1 \in]1, 2[$. Assume that μ is a positive given constant. Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a bounded constant state and σ a real constant such that

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L}. \quad (3.25)$$

Denote $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, in the form (3.8), the travelling wave solution of (3.17).

Then the function $\mu_\tau/\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admits a global maximum denoted $(\mu_\tau/\mu)_L$. This maximum is obtained when $x - \sigma t$ goes to $-\infty$. There exists, furthermore, a vector sequence $(\mathbf{v}_i)_{0 \leq i \leq n}$ included in $\mathbb{R}^{d+4}$ which only depends on the constant state $\mathbf{v}_L \in \Omega$ and such that

$$\mathbf{v}_R = \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}) \quad \text{with} \quad \eta = \left(\frac{\mu}{\mu_\tau} \right)_L.$$

The state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ find the following developed form:

$$\begin{aligned} \tau_R &= \check{\tau}_R + \sum_{i=1}^n \tau_i(\mathbf{v}_L) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}), \\ p_R \tau_R^\gamma &= p_L \tau_L^\gamma + \sum_{i=1}^n \chi_i(\mathbf{v}_L, \tau_1(\mathbf{v}_L), \dots, \tau_{i-1}(\mathbf{v}_L)) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}), \\ (u_1)_R &= \sigma + \frac{(u_1)_L - \sigma}{\tau_L} \tau_R, \\ (u_i)_R &= (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \\ \varepsilon_R &= \left(\frac{\tau_L}{\tau_R} \right)^{1-C_1} \left(\frac{p_{\tau R}}{p_{\tau L}} \right)^{C_1} \varepsilon_L, \\ p_{\tau R} &= -\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma - 1} p_R + (\gamma_\tau - 1) \frac{\tau_L}{\tau_R} \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + \\ &\quad (\gamma_\tau - 1) \frac{\tau_R - \tau_L}{\tau_R} \left(\frac{M^2}{2} (\tau_R - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right), \end{aligned}$$

where $\check{\tau}_R > 0$ is the non trivial solution, i.e. $\check{\tau}_R \neq \tau_L$, of the equation

$$\begin{aligned} M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\check{\tau}_R - \tau_L) (\check{\tau}_R - \tau^*) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_{\tau L} \left(\frac{1}{\check{\tau}_R^{\gamma_\tau - 1}} - \frac{1}{\tau_L^{\gamma_\tau - 1}} \right) &= 0, \\ \text{with } \tau^* &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L + p_{\tau L}}{M^2}. \end{aligned}$$

The functions $\tau_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $\chi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ can be explicitly defined.

Remark 3.16

The above asymptotic expansion of the jump relations are only given for a 1-compression wave. The extension to a 3-compression wave can be obtained without difficulty.

4 Proof of the asymptotic behaviours

This section is devoted to the proof of the results relating to the asymptotic behaviours, expressed in the Theorem 3.9 and 3.10, and to the asymptotic expansion expressed in the Propositions 3.14 and 3.15.

The 1-compression wave only are considered in the following proofs. The 3-compression wave can be deduced from the proofs relating to 1-compression wave reversing the role of ξ , used as the parametrization of the travelling wave, in $-\xi$.

First, the main properties satisfied by the travelling wave solutions of (3.7) are briefly describe. The proof of these properties can be found in [18].

Proposition 4.1

Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ and $\mathbf{v}_R \in \Omega$ be two bounded constant states and let σ be a real given constant. Consider a smooth function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solution of (3.9). Then the function $\hat{\mathbf{v}}$ defined by

$$\hat{\mathbf{v}}(\xi) = {}^T(\rho(\xi), \underline{u}(\xi), E(\xi), p_\tau(\xi), \varepsilon(\xi)).$$

satisfies the following algebraic relations:

$$M(\xi) = \rho_L((u_1)_L - \sigma), \quad (4.1.i)$$

$$u_i(\xi) = (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \quad (4.1.ii)$$

$$\rho^{1-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\varepsilon}(\xi) = \rho_L^{1-C_1} \frac{(p_{\tau L})^{C_1}}{\varepsilon_L}, \quad (4.1.iii)$$

$$(p(\xi) + p_\tau(\xi))\tau(\xi) = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_\tau(\xi)\tau(\xi) + (\gamma - 1)\tau_L \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + (\gamma - 1)(\tau(\xi) - \tau_L) \left(\frac{M^2}{2}(\tau(\xi) - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right), \quad (4.1.iv)$$

where we set

$$M(\xi) = \rho(\xi)(u_1(\xi) - \sigma) \quad \text{and} \quad \tau(\xi) = \frac{1}{\rho(\xi)}.$$

The pair $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ define a smooth solution of the following ordinary differential system

$$(3 - \gamma_\tau)(\mu + \mu_\tau)M\tau d_\xi \tau = M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau - \tau_L)(\tau - \tau^*) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} (\tau p_\tau - \tau_L p_{\tau L}), \quad (4.2.i)$$

$$d_\xi p_\tau \tau^{\gamma_\tau} = (3 - \gamma_\tau)(\gamma_\tau - 1)\mu_\tau M \tau^{\gamma_\tau - 1} (d_\xi \tau)^2, \quad (4.2.ii)$$

and satisfies

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau(\xi) = \tau_L, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} p_\tau(\xi) = p_{\tau L}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tau(\xi) = \tau_R, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} p_\tau(\xi) = p_{\tau R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

where

$$\tau^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L + p_{\tau_L}}{M^2}, \quad (4.4)$$

Setting

$$s_\tau(\xi) = p_\tau(\xi) \tau(\xi)^{\gamma_\tau},$$

the function $\tau(\xi) > 0$ is strictly decreasing and the function $s_\tau(\xi) > 0$ is strictly increasing for all $\xi \in \mathbb{R}$.

If $\gamma < \gamma_\tau$, the points (τ_L, s_{τ_L}) and (τ_R, s_{τ_R}) belong to the critical point curve (cf. [18] for more details) of (4.2) defined, in the (τ, s_τ) -plane, by

$$\mathcal{C}(\tau) = (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau - 1} - \left(\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma_\tau - \gamma} \right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M^2 \tau^{\gamma_\tau - 1} (\tau - \tau_L)(\tau - \tau^*). \quad (4.5)$$

This curve satisfies

$$\mathcal{C}(\tau_L) = s_{\tau_L} \quad \text{and} \quad \mathcal{C}(\tau_R) = s_{\tau_R}.$$

We complete these properties with the following result:

Proposition 4.2

Under the assumptions introduced in the Proposition 4.1, there exists two bounded positive constants which are not depend on the ratio $\frac{C_\mu}{\mu}$, denoted by τ_m and s_{τ_M} , such that

$$\tau_m \leq \tau_R \leq \tau(\xi) \leq \tau_L \quad \text{and} \quad s_{\tau_L} \leq s_\tau(\xi) \leq s_{\tau_R} \leq s_{\tau_M} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Proof of the Proposition 4.2

It is proved in [18] that the curve $\mathcal{C}(\tau)$ admits a global maximum in τ_{max} such that $\mathcal{C}(\tau_{max}) > 0$.

Since the curve $\mathcal{C}(\tau)$ does not depend on the ration $\frac{C_\mu}{\mu}$, then τ_{max} does not also depend on this ration. Consequently, since

$$\mathcal{C}(\tau_R) = s_{\tau_R},$$

it appears

$$s_{\tau_R} \leq \mathcal{C}(\tau_{max}).$$

A straightforward computation ensures that the equation

$$\mathcal{C}(\tau) = s_{\tau_L}$$

admits two distinct positive solutions, denoted by $\tau_{min} < \tau_L$, where τ_{min} and τ_L are not dependent on the ration $\frac{C_\mu}{\mu}$.

The curve $\mathcal{C}$ is monovalued and satisfy

$$\mathcal{C}(\tau) \begin{cases} \geq s_{\tau_L} & \text{if } \tau \in [\tau_{min}, \tau_L], \\ < s_{\tau_L} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since $s_{\tau_R} > s_{\tau_L}$ and (τ_R, s_{τ_R}) belongs to the curve $\mathcal{C}$, then $\tau_R \geq \tau_{min}$. ■

4.1 Proof of the Theorem 3.9

Let $\mathbf{v}_L \in \Omega(\mathbf{v})$ and $\sigma \in \mathbb{R}$ be given. The existence and uniqueness, up to a translation, of the travelling wave solutions of (3.7) are obtained by virtue of the Theorem 3.2. More precisely, there exists a bounded constant state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ and a smooth function $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ of the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (4.6)$$

where the pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}' - (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}')' - (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}') = 0, \quad (4.7.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R. \quad (4.7.ii)$$

After Proposition 4.1, the function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is solution of the algebraic relations (4.1) and of the ordinary differential system (4.2).

Setting the parameter

$$\eta = \frac{C_\mu}{\mu},$$

since the function $\hat{\mathbf{v}}$ depends on η , omitting the notation $\hat{\mathbf{v}}$ we rewrite this function as follow:

$$\hat{\mathbf{v}}_\eta(\xi) = {}^T(\rho_\eta(\xi), \rho_\eta(\xi) u_{1\eta}(\xi), \dots, \rho_\eta(\xi) u_{d\eta}(\xi), E_\eta(\xi), p_{\tau_\eta}(\xi), \varepsilon_\eta(\xi)).$$

First, we prove the existence of a bounded constant state $\mathbf{v}_{0R} \in \Omega$ and the existence and uniqueness, up to a translation, of the smooth travelling wave $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solutions of the limit system (3.20). Such functions are in the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0(t, x) = \hat{\mathbf{v}}_0(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_0(t, x) = \mathbf{v}_{0R}, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (4.8)$$

where the pair $(\hat{\mathbf{v}}_0, \sigma)$ is characterized by

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}_0' + (\mathbf{H}(\hat{\mathbf{v}}_0))' = (\tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{v}}_0) \hat{\mathbf{v}}_0')' \quad (4.9.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}_0(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}_0(\xi) = \mathbf{v}_{0R} \quad (4.9.ii)$$

As same as the function $\hat{\mathbf{v}}$, we omit the notation $\hat{\mathbf{v}}$ and $\hat{\mathbf{v}}_0$ writes thus

$$\hat{\mathbf{v}}_0(\xi) = {}^T(\rho_0(\xi), \rho_0(\xi) u_{10}(\xi), \dots, \rho_0(\xi) u_{d0}(\xi), E_0(\xi), p_{\tau_0}(\xi), \varepsilon_0(\xi)).$$

Lemma 4.3

Under the assumption (a) of Theorem 3.9, then there exists a bounded constant state $\mathbf{v}_{0R} \in \Omega$ and there exists a unique function $\hat{\mathbf{v}}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solution of (4.9).

Proof of the Lemma 4.3

Setting

$$\tau_0 = 1/\rho_0 \quad \text{and} \quad M_0 = \rho_0(u_{01} - \sigma),$$

an easy extension of the Proposition 4.1 implies that the function $\hat{\mathbf{v}}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ satisfies the following algebraic relations:

$$M_0(\xi) = \rho_L((u_1)_L - \sigma), \quad (4.10.i)$$

$$u_{i0}(\xi) = (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \quad (4.10.ii)$$

$$p_{\tau_0} \tau_0^{\gamma_\tau}(\xi) = p_{\tau_L} \tau_L^{\gamma_\tau} \quad (4.10.iii)$$

$$\tau_0(\xi)^{C_1-1} \frac{p_{\tau_0}(\xi)^{C_1}}{\varepsilon_0(\xi)} = \tau_{0L}^{C_1-1} \frac{p_{\tau_{0L}}}{\varepsilon_{0L}} \quad (4.10.iv)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0 \tau_0(\xi)}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau_0} \tau_0(\xi)}{\gamma_\tau - 1} = \\ \tau_L \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau_L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + (\tau_0(\xi) - \tau_L) \left(\frac{M^2}{2} (\tau_0(\xi) - \tau_L) - p_L - p_{\tau_L} \right), \end{aligned} \quad (4.10.v)$$

The function $\tau_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is solution of

$$\begin{aligned} (3 - \gamma_\tau) \mu M_0 \tau_0 d_\xi \tau_0 = \\ M_0^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau_0 - \tau_L) (\tau_0 - \tau_0^*) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_{\tau_L} \left(\frac{1}{\tau_0^{\gamma_\tau - 1}} - \frac{1}{\tau_L^{\gamma_\tau - 1}} \right), \end{aligned} \quad (4.11.i)$$

$$\text{where } \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau_0(\xi) = \tau_L \quad \text{and} \quad \tau_0^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L + p_{\tau_L}}{M_0^2}. \quad (4.11.ii)$$

It is then enough to prove the existence of a smooth solution of (4.11).

A straightforward computation proves the positiveness of the function τ_0 and the existence of two distinguish square, denoted by $\tau_{0R} < \tau_L$, of the equation $\tau_0 d_\xi \tau_0 = 0$. Since

$$d_\xi \tau_0 \leq 0 \quad \forall \tau_0 \in [\tau_{0R}, \tau_L],$$

there exists a smooth solution $\tau_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ of (4.11). The uniqueness is defined up to a translation. ■

Consequently, the proof of the Theorem 3.9 lies on the proof of the uniform convergence of $\hat{\mathbf{v}}_\eta$ to $\mathbf{v}_0$ when η goes to zero.

After the Proposition 4.1 and the Lemma 4.3, a direct comparison between (4.10) and (4.1) writes

$$\begin{aligned} M_\eta(\xi) - M_0(\xi) &= 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ u_{i\eta}(\xi) - u_{i0}(\xi) &= 0 \quad i = 2, \dots, d \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \tau_\eta(\xi)^{C_1-1} p_{\tau_\eta}(\xi)^{C_1} \eta(\xi) - \tau_L^{C_1-1} p_{\tau_L}^{C_1} \eta &= 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \frac{p_\eta(\xi) \tau_\eta(\xi) - p_0(\xi) \tau_0(\xi)}{\gamma - 1} &= \frac{p_{\tau_0}(\xi) \tau_0(\xi) - p_{\tau_\eta}(\xi) \tau_0(\xi)}{\gamma_\tau - 1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$+(\tau_\eta(\xi) - \tau_0(\xi)) \left(\frac{M^2}{2} (\tau_\eta(\xi) + \tau_0(\xi) - 2\tau_L) - p_L - p_{\tau_L} \right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Since $M_\eta = M_0$ then $\tau_0^* = \tau^*$ where τ^* is defined by (4.2). Notice that the constant M_η does not depend on the parameter η . Consequently, we set

$$M_\eta = M,$$

omitting the index without confusion.

Setting

$$s_{\tau_\eta}(\xi) = p_{\tau_\eta}(\xi) \tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau} \quad \text{and} \quad s_{\tau_0}(\xi) = p_{\tau_0}(\xi) \tau_0(\xi)^{\gamma_\tau-1},$$

we can write

$$d_\xi(s_{\tau_\eta} - s_{\tau_0}) = (3 - \gamma_\tau)(\gamma_\tau - 1) \mu_{\tau_\eta} M \tau_\eta^{\gamma_\tau-1} (d_\xi \tau_\eta)^2, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_{\tau_\eta}) \tau_\eta d_\xi \tau_\eta - \mu \tau_0 d_\xi \tau_0 &= M \frac{\gamma + 1}{2(3 - \gamma_\tau)} (\tau_0 - \tau_\eta)(\tau^* + \tau_L - \tau_\eta - \tau_0) \\ &\quad + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{(\gamma_\tau - 1)(3 - \gamma_\tau)} \left(\frac{s_{\tau_\eta}}{\tau_\eta^{\gamma_\tau-1}} - \frac{s_{\tau_0}}{\tau_0^{\gamma_\tau-1}} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Consequently, the convergence of $\hat{\mathbf{v}}_\eta$ to $\hat{\mathbf{v}}_0$ when η goes to zero is given by the convergence of $\tau_\eta(\xi) \rightarrow \tau_0(\xi)$ and $s_{\tau_\eta}(\xi) \rightarrow s_{\tau_0}(\xi) = s_{\tau_L}$ when η goes to zero.

First, we prove that $s_{\tau_\eta}(\xi) \rightarrow s_{\tau_0}(\xi)$ when η goes to zero where the convergence is uniform over $\mathbb{R}$.

Lemma 4.4

Under the assumption (a) of Theorem 3.9, the sequence of real smooth functions $(p_{\tau_\eta})_{\eta>0}$ converges uniformly over $\mathbb{R}$ to the real constant s_{τ_L} as η goes to zero.

Proof of the Lemma 4.4

Let us consider the function $\phi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\begin{aligned} \phi_\eta(\xi) &= \\ M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau_\eta(\xi) - \tau_L)(\tau_\eta(\xi) - \tau^*) &+ \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \tau_\eta(\xi)^{1-\gamma_\tau} \left(s_{\tau_\eta}(\xi) - s_{\tau_L} \left(\frac{\tau_\eta(\xi)}{\tau_L} \right)^{\gamma_\tau-1} \right). \end{aligned}$$

Plugging the equation (4.2.i) in (4.13), the equation governing $s_{\tau_\eta} - s_{\tau_L}$ can be written

$$d_\xi(s_{\tau_\eta}(\xi) - s_{\tau_L}) = \frac{\gamma_\tau - 1}{3 - \gamma_\tau} \frac{\tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau-3}}{M} \frac{\mu_{\tau_\eta}}{(\mu + \mu_{\tau_\eta})^2} \phi_\eta(\xi)^2. \quad (4.15)$$

Recalling $\mu_{\tau\eta} = C_\mu p_{\tau\eta}^2 / \varepsilon_\eta$ where $s_{\tau\eta} = p_{\tau\eta} \tau_\eta^{\gamma_\tau}$ after computation we obtain

$$0 \leq \frac{\mu_{\tau\eta}}{(\mu + \mu_{\tau\eta})^2} \leq \frac{\eta}{\mu} \left(\tau_L^{C_1-1} \frac{p_{\tau L}^{C_1}}{\varepsilon_L} \right) \tau^{(\gamma_\tau-1)(C_1-1)-\gamma_\tau} s_\tau^{2-C_1}. \quad (4.16)$$

By virtue of the Proposition 4.2, there exists a positive constant C , which does not depend on the parameter η , defined by

$$C = \frac{\gamma_\tau - 1}{3 - \gamma_\tau} \frac{1}{M} \frac{\tau_L^{(\gamma_\tau-1)(C_1-1)}}{\tau_m^3} \left(\tau_L^{C_1-1} \frac{p_{\tau L}^{C_1}}{\varepsilon_L} \right) s_{\tau M}^{2-C_1},$$

such that

$$0 \leq d_\xi(s_{\tau\eta}(\xi) - s_{\tau L}) \leq C \eta \phi_\eta(\xi)^2. \quad (4.17)$$

If we prove that the function $\phi_\eta \in L^2(\mathbb{R})$ with a L^2 -norm bounded as η goes to zero, then uniform convergence over $\mathbb{R}$ of $s_{\tau\eta}$ to $s_{\tau L}$ when $\eta \rightarrow 0$ is ensured. Indeed, let assume

$$\|\phi_\eta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_\phi,$$

where $C_\phi > 0$ is a real constant bounded as η goes to zero. Then the integration of (4.17) gives

$$0 \leq s_{\tau\eta}(\xi) - s_{\tau L} \leq C C_\phi \eta \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

and the proof is concluded.

The Proposition 4.2 ensures the existence of a real constant $C > 0$, not dependent on η , such that

$$|\phi_\eta(\xi)| \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

and, after computation, the function ϕ_η can also writes in the following form:

$$\phi_\eta(\xi) = (3 - \gamma_\tau)(\mu + \mu_{\tau\eta}) M \tau_\eta(\xi) d_\xi \tau_\eta(\xi) \leq 0.$$

Since the Proposition 4.2 is satisfied, there exists a real constant $C > 0$ which does not depend on η , such that

$$0 \leq |\phi_\eta(\xi)| \leq C(1 + \eta C) (-d_\xi \tau_\eta(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Integrating the above inequality over $\mathbb{R}$, we obtain

$$\begin{aligned} \|\phi_\eta\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq C(1 + \eta C) |\tau_{\eta R} - \tau_L|, \\ &\leq C(1 + \eta C) |\tau_m - \tau_L|. \end{aligned}$$

Since

$$\|\phi_\eta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_\eta(\xi)| \|\phi_\eta\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

the proof is concluded. ■

The following result, relating to the uniform convergence of τ_η to τ_0 when $\eta \rightarrow 0$, concluded the proof of the Theorem 3.9.

Lemma 4.5

Under the assumption (a) of Theorem 3.9, the sequence of real smooth functions $(\tau_\eta)_{\eta>0}$ converges uniformly over $\mathbb{R}$ to the real function $\tau_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as η goes to zero.

Proof of the Lemma 4.5

Let us define $F_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as follow:

$$F_\eta(\xi) = \frac{2}{M(3-\gamma_\tau)} \left(M^2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) (\tau_\eta(\xi) + \tau_0(\xi) - \tau_L - \tau^*) - \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \frac{s_{\tau L}}{(\tau_\eta(\xi)\tau_0(\xi))^{\gamma_\tau-1}} \frac{\tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau-1} - \tau_0(\xi)^{\gamma_\tau-1}}{\tau_\eta(\xi) - \tau_0(\xi)} \right), \quad (4.18)$$

$$f_\eta(\xi) = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \frac{2}{M(3-\gamma_\tau)} \frac{s_{\tau\eta}(\xi) - s_{\tau L}}{\tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau-1}} - \mu_{\tau\eta} d_\xi \tau_\eta(\xi)^2. \quad (4.19)$$

The equation (4.14) can be rewritten in the following form:

$$\mu d_\xi (\tau_\eta(\xi)^2 - \tau_0(\xi)^2) = (\tau_\eta(\xi) - \tau_0(\xi)) F_\eta(\xi) + f_\eta(\xi). \quad (4.20)$$

The smooth positive functions τ_η , $s_{\tau\eta}$ and τ_0 are given *a priori* as solutions of, respectively, (4.2.i), (4.2.ii) and (4.11). Consequently, the functions F_η and f_η can be just considered as functions of the variable ξ and not as functions of τ_η , $s_{\tau\eta}$ and τ_0 .

Since $\gamma_\tau > 1$ and the bounded functions $\tau_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\tau_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous, the the function $f_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and the bounded function $F_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is $C^1(\mathbb{R})$.

Since $s_{\tau\eta}$ converges uniformly over $\mathbb{R}$ to $s_{\tau L}$ when η goes to zero and since a straight-forward computation gives

$$|\mu_{\tau\eta} d_\xi \tau_\eta^2| \leq C \frac{\eta}{1 + C\eta},$$

where $C > 0$ is real constant not depending on η , then f_η tends uniformly over $\mathbb{R}$ to 0 when η goes to zero.

Setting

$$X_\eta(\xi) = \tau_\eta(\xi)^2 - \tau_0(\xi)^2,$$

and defining two mappings $\mathcal{A}_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\mathcal{B}_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\mathcal{A}_\eta(\xi) = \frac{F_\eta(\xi)}{\mu(\tau_\eta(\xi) + \tau_0(\xi))} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_\eta(\xi) = \frac{f_\eta(\xi)}{\mu},$$

the equation (4.20) finds the following form:

$$d_\xi X_\eta(\xi) = X_\eta(\xi) \mathcal{A}_\eta(\xi) + \mathcal{B}_\eta(\xi). \quad (4.21)$$

Consequently, the function X_η is solution of a non-homogeneous linear differential equation with non-constant coefficients.

Since $\tau_\eta > 0$ and $\tau_0 > 0$ are bounded continuous functions then the uniform converge over $\mathbb{R}$ of τ_η to τ_0 as $\eta \rightarrow 0$ is equivalent to the uniform converge over $\mathbb{R}$ of X_η to 0 as η goes to 0.

First, we show that the linear operator $\mathcal{A}_\eta$ is asymptotically uniformly stable. The proof of the Lemma 4.5 is thus concluded using some properties relating to the resolvent of linear differential equations.

Lemma 4.6

Under the assumption (a) of Theorem 3.9, there exists two bounded constant $a < b$, where a and b do not depend on η , such that

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta(\xi) &> C_a & \forall \xi < a, \\ \mathcal{A}_\eta(\xi) &< -C_b & \forall \xi > b. \end{aligned}$$

We deduce from Reinhard [16] Theorem II.1.12 page 138, the following result:

Corollary 4.7

Under the assumption (a) of Theorem 3.9, let us assume

$$\xi < a \quad \text{or} \quad \xi > b,$$

then the linear operator $\mathcal{A}_\eta(\xi)$ is asymptotically uniformly stable.

Proof of the Lemma 4.6

Since μ is a positive constant and the functions τ_0 and τ_η are positive, the sign of $\mathcal{A}_\eta$ is given by the sign of F_η .

Recalling $\gamma_\tau = 2/d + 1$ where d describe the velocity space dimension, it can be shown that the function $F_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is decreasing. Setting $F_\eta^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $F_\eta^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ two smooth functions defined by

$$F_\eta^1(\xi) = \tau_\eta(\xi) + \tau_0(\xi) - \tau_L - \tau^* \quad \text{and} \quad F_\eta^2(\xi) = -\frac{1}{(\tau_\eta(\xi)\tau_0(\xi))^{\gamma_\tau-1}} \frac{\tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau-1} - \tau_0(\xi)^{\gamma_\tau-1}}{\tau_\eta(\xi) - \tau_0(\xi)},$$

then the function F_η can be written in the following form:

$$F_\eta(\xi) = \frac{2}{M(3 - \gamma_\tau)} \left(M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) F_\eta^1(\xi) - \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} s_{\tau L} F_\eta^2(\xi) \right). \quad (4.22)$$

Since the functions τ_η and τ_0 are decreasing functions then F_η^1 is decreasing. Setting $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function defined as follow:

$$I(\zeta) = (\gamma_\tau - 1)(\zeta^{\gamma_\tau} - 1) + \gamma_\tau(1 - \zeta^{\gamma_\tau-1}).$$

Since $\gamma_\tau = 2/d + 1$, it is not difficult to show that

$$I(\zeta) = \frac{1}{d}(\zeta^{1/d} - 1)^2 \left(d + 2 \sum_{n=0}^{d-1} (n+1) \zeta^{\frac{d-n}{d}} \right) > 0 \quad \forall \zeta > 0.$$

After computation, we can write

$$\begin{aligned} \frac{d F_\eta^2(\xi)}{d \xi} &= \frac{1}{(\tau_\eta(\xi) \tau_0(\xi))^{\gamma_\tau} (\tau_\eta(\xi) - \tau_0(\xi))^2} \\ &\quad \left(\tau_0(\xi) \tau_\eta(\xi)^{\gamma_\tau} I \left(\frac{\tau_0(\xi)}{\tau_\eta(\xi)} \right) d_\xi \tau_\eta(\xi) + \tau_\eta(\xi) \tau_0(\xi)^{\gamma_\tau} I \left(\frac{\tau_\eta(\xi)}{\tau_0(\xi)} \right) d_\xi \tau_0(\xi) \right) < 0, \end{aligned}$$

which ensures that the function $F_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is decreasing.

Moreover, after computation we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F_\eta(\xi) &= \frac{2}{(3 - \gamma_\tau)M} \left(M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau_L - \tau^*) - (\gamma_\tau - \gamma) \frac{s_{\tau L}}{\tau_L^{\gamma_\tau}} \right), \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F_\eta(\xi) &= \begin{cases} -\frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \frac{2}{(3 - \gamma_\tau)M} \frac{1}{\tau_{\eta R}^{\gamma_\tau - 1}} \left(\frac{s_{\tau \eta R} - s_{\tau L}}{\tau_{\eta R} - \tau_{0R}} \right) & \text{if } \gamma < \gamma_\tau, \\ \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} M(\tau^* - \tau_L) & \text{if } \gamma = \gamma_\tau. \end{cases} \end{aligned}$$

The hypothesis (a) of Theorem 3.9 ensures

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F_\eta(\xi) > 0,$$

where the limit does not depend on η .

We can prove that there exists a real constant $C > 0$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F_\eta(\xi) < -C < 0. \quad (4.23)$$

Since the hypothesis (a) of Theorem 3.9 ensures $\tau^* < \tau_L$ then, if $\gamma = \gamma_\tau$, the inequality (4.23) becomes obvious.

If $\gamma < \gamma_\tau$, then $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F_\eta(\xi) < 0$ where the limit depends on η . Consider that $\mathcal{C}$ is the critical point curve defined by (4.5). After the Proposition 4.1, we can write

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{s_{\tau \eta R} - s_{\tau L}}{\tau_{\eta R} - \tau_{0R}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{C}(\tau_{\eta R}) - \mathcal{C}(\tau_{0R})}{\tau_{\eta R} - \tau_{0R}}.$$

The Proposition 4.1 implies the points $(\tau_{\eta R}, s_{\tau \eta R})$ and $(\tau_{0R}, s_{\tau 0R}) = (\tau_{0R}, s_{\tau R})$ belong to the curve $\mathcal{C}$. Since $s_{\tau \eta L} \rightarrow s_{\tau L}$ when η goes to zero and $\tau_{0R} \neq \tau_L$ then $\tau_{\eta L} \rightarrow \tau_{0L}$. Consequently,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{s_{\tau \eta R} - s_{\tau L}}{\tau_{\eta R} - \tau_{0R}} = \frac{d\mathcal{C}}{d\tau}(\tau_{0R}).$$

Moreover, it can be easily shown that the function $\mathcal{C} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly increasing in a neighbourhood of τ_{0R} which implies (4.23).

Since the function F_η is strictly decreasing, there exists a unique $\xi_\eta \in \mathbb{R}$ such that $F_\eta(\xi_\eta) = 0$. But since the limits at infinities do not converge to zero as η goes to zero, then there exists two constant, a and b not depending on η , such that $\xi_\eta \in]a, b[$. This concludes the proof. ■

Now, consider the resolvent $R_\eta(t, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ of the linear homogeneous system extracted from 4.21). Choose $\xi^* \in]a, b[$ which does not depend on η . The solution, denoted by $X_\eta(\xi)$, of the equation (4.21) can be thus write

$$X_\eta(\xi) = R_\eta(\xi, \xi^*) X_\eta(\xi^*) + \int_{\xi^*}^{\xi} R_\eta(\xi, \zeta) \mathcal{B}_\eta(\zeta) d\zeta.$$

Since the operator $\mathcal{A}_\eta(\xi)$ is asymptotically uniformly stable independently of η for all $\xi < a$, we deduce (cf. Reinhard [16] for more details) the existence of two constants, $\alpha_a > 0$ and $\sigma_a > 0$ that do not depend on η , such that

$$|R_\eta(\xi, \zeta)| \leq \alpha_a e^{\sigma_a(\xi - \zeta)} \quad \forall \xi < \zeta < a.$$

As same, since the operator $\mathcal{A}_\eta(\xi)$ is asymptotically uniformly stable independently of η for all $\xi > b$, we deduce the existence of two constants, $\alpha_b > 0$ and $\sigma_b > 0$, which do not depend on η , such that

$$|R_\eta(\xi, \zeta)| \leq \alpha_b e^{-\sigma_b(\xi - \zeta)} \quad \forall \xi > \zeta > b.$$

To conclude the estimations of the resolvent, for all bounded subset of $\mathbb{R}$, denoted by I , there exists a bounded constant $C_I > 0$ not depending on η , such that

$$|R_\eta(\xi, \zeta)| \leq C_I, \quad \forall \xi \in I, \text{ and } \zeta \in I.$$

Consequently, if the case $\xi < a$ is considered, we can write

$$X_\eta(\xi) = R_\eta(\xi, a) R_\eta(a, \xi^*) X_\eta(\xi^*) - \int_a^{\xi^*} R_\eta(\xi, \zeta) \mathcal{B}_\eta(\zeta) d\zeta - \int_\xi^a R_\eta(\xi, \zeta) \mathcal{B}_\eta(\zeta) d\zeta.$$

This implies the existence of two bounded positive constants independent of η , denoted generically by C , such that

$$|X_\eta(\xi)| \leq C|X_\eta(\xi^*)| + C \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} |\mathcal{B}_\eta(\zeta)|, \quad \forall \xi < a.$$

Similarly, the above estimation can be obtain for all $\xi > b$ and for all $\xi \in [a, b]$. This ensures the following estimation:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |X_\eta(\xi)| \leq C|X_\eta(\xi^*)| + C \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} |\mathcal{B}_\eta(\zeta)|. \quad (4.24)$$

Since $s_{\tau\eta R} \rightarrow s_{\tau L}$ and $\tau_{\eta R} \rightarrow \tau_{0R}$ when $\eta \rightarrow 0$ then, for η small enough, there exists a neighbourhood V of the integral curve $(\tau_0(\xi), s_{\tau L})$ solution of (4.11) such that $(\tau_\eta(\xi), s_{\tau\eta}(\xi))$ is include in V . Consequently by extension of Gilbarg [17] to our framework, a sequence of points $(\xi_\eta^*) \in]a, b[$ can be defined such that this sequence converges to $\xi_0^* \in]a, b[$. The subset $]a, b[$ can be chosen such that there exists a reparametrisation of the integral curve $(\tau_0(\xi), s_{\tau L})$ implying

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\tau_\eta(\xi_\eta^*), s_{\tau\eta}(\xi_\eta^*)) = (\tau_0(\xi_0^*), s_{\tau L}).$$

Consequently,

$$X_\eta(\xi_\eta^*) \rightarrow 0, \quad \text{when } \eta \rightarrow 0.$$

Since f_η converge uniformly to 0 when η goes to zero and

$$\sup_{\zeta \in R} |\mathcal{B}_\eta(\zeta)| = \frac{1}{\mu} \left(\sup_{\zeta \in R} |f_\eta(\zeta)| \right),$$

then $\mathcal{B}_\eta$ converge uniformly to 0 when η goes to zero.

Changing ξ^* by ξ_η^* in (4.24) and the proof of the Lemma 4.5 is concluded. ■

The proof of the Theorem 3.9 is thus complete. ■

Proof of Theorem 3.10

The proof of the Theorem 3.10 is analogous to the proof of the Theorem 3.9. The alone difference is briefly describe. In the proof of the Theorem 3.9, the algebraic relation connecting $p(\xi)$ to $\tau(\xi)$ and $p_\tau(\xi)$ and the ordinary differential equation governing $p_\tau \tau^{\gamma_\tau}(\xi)$ are considered. The proof of the Theorem 3.10 lies on the algebraic relation $p_\tau(\xi)$ to $\tau(\xi)$ and $p(\xi)$ and the ordinary differential equation governing $p\tau^\gamma(\xi)$. The proof remains, thus, the same. ■

4.2 Proof of the Proposition 3.14

The existence and uniqueness up to a translation of travelling wave $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ solutions of the system (3.7) is ensured by virtue of Theorem 3.2. Consequently, after the Proposition 4.1, $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ is solution of the system of algebraic relations (4.1) and of the ODE system (4.2). It is deduced from (4.1) the following inequalities:

$$\begin{aligned} (u_1)_R &= \frac{\rho_L}{\rho_R} ((u_1)_L - \sigma) + \sigma, \\ (u_i)_R &= (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \\ \varepsilon_R &= \left(\frac{\rho_R}{\rho_L} \right)^{1-C_1} \left(\frac{p_{\tau R}}{p_{\tau L}} \right)^{C_1} \varepsilon_L, \\ p_R &= -\frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1} p_{\tau R} + (\gamma-1) \frac{\tau_L}{\tau_R} \left(\frac{p_L}{\gamma-1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau-1} \right) + \\ &\quad (\gamma-1) \frac{\tau_R - \tau_L}{\tau_R} \left(\frac{M^2}{2} (\tau_R - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right). \end{aligned}$$

To estimate $\mathbf{v}_R$ is thus equivalent to estimate τ_R and p_{τ_R} . Only case $M > 0$ is considered since the case $M < 0$ is similar reversing the role of $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$.

For all $\xi \in \mathbb{R}$, the function $\tau(\xi)$ is strictly monotone. Consequently, the change of variable ξ to $\tau(\xi) \in [\tau_R, \tau_L]$ is a C^1 -diffeomorphism and $s_\tau(\tau) = p_\tau \tau^{\gamma_\tau}(\tau)$ is solution of

$$d_\tau s_\tau = (\gamma_\tau - 1) \tau^{\gamma_\tau - 2} \left(M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau - \tau_L)(\tau - \tau^*) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \tau^{1 - \gamma_\tau} (s_\tau - (\tau_L p_{\tau_L}) \tau^{\gamma_\tau - 1}) \right) \frac{\mu_\tau}{\mu + \mu_\tau}. \quad (4.25)$$

where τ^* is defined by (4.2). In a travelling wave solution, it is easy to notice that $s_\tau(\tau)$ is a decreasing function of the variable τ . A straightforward calculation allows to rewrite μ_τ/μ in the following form:

$$\frac{\mu_\tau}{\mu} = \frac{C_\mu}{\mu} \left(\frac{\tau_R^{C_1 - 1} p_{\tau_R}^{C_1}}{\varepsilon_R} \right) \frac{s_\tau^\theta}{\tau^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 1}} \quad \text{with} \quad \theta = 2 - C_1.$$

We deduce thus, from the following equality that the function μ_τ/μ is a decreasing function of τ :

$$d_\tau \frac{\mu_\tau}{\mu} = \frac{C_\mu}{\mu} \left(\frac{\tau_R^{C_1 - 1} p_{\tau_R}^{C_1}}{\varepsilon_R} \right) \frac{s_\tau^{\theta - 1}}{\tau^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 2}} (\theta \tau d_\tau s_\tau - (\theta(\gamma_\tau - 1) + 1) s_\tau) \quad (4.26)$$

where $d_\tau s_\tau < 0$ and $s_\tau(\tau) > 0$ for all $\tau \in [\tau_R, \tau_L]$ and with μ a positive constant. Consequently, the maximum of the function μ_τ/μ is given by μ_{τ_R}/μ and we denote it η . This maximum can play the role of a small parameter. Let us set $\beta = s_{\tau_R}^\theta / \tau_R^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 1}$. By virtue of the Proposition 4.1, the constant β is positive and bounded for any given state $\mathbf{v}_L \in \Omega$. We can thus write

$$\frac{\mu_\tau}{\mu} = \frac{\eta}{\beta} \frac{s_\tau^\theta}{\tau^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 1}}.$$

The equation (4.25) find the following form:

$$\frac{\beta}{1 - \theta} \tau^{(\gamma_\tau - 1)(\theta - 1) + \gamma} d_\tau s_\tau^{1 - \theta} + \eta d_\tau \frac{s_\tau}{\tau^{\gamma_\tau - \gamma}} = \eta \tau^{\gamma - 2} \kappa(\tau), \quad (4.27)$$

$$\text{with } \kappa(\tau) = M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\gamma_\tau - 1) (\tau - \tau_L) (\tau - \tau^*) - (\gamma_\tau - \gamma) \tau_L p_{\tau_L}. \quad (4.28)$$

We can thus write the solution $s_\tau(\tau)$ of (4.27) in the form $s_\tau(\tau) = \sum_{i=0}^n s_{\tau i}(\tau) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1})$. Denoting that

$$s_\tau(\tau)^{1 - \theta} = \sum_{i=0}^n \varphi_i(\tau) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1})$$

where, setting $\omega(\{k_j\}) = \left\{ (k_j)_{1 \leq j \leq i-1} ; \sum_{j=1}^{i-1} j k_j = i \right\}$,

$$\varphi_0(\tau) = s_{\tau 0}(\tau)^{1 - \theta},$$

$$\varphi_{i>0}(\tau) = (1 - \theta) \frac{s_{\tau i}(\tau)}{s_{\tau 0}(\tau)^\theta} + s_{\tau 0}(\tau)^{1-\theta} \sum_{\omega(\{k_j\})} \alpha_{\{k_j\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{s_{\tau j}(\tau)}{s_{\tau 0}(\tau)} \right)^{k_j},$$

$$\text{where } \alpha_{\{k_j\}} = \left(\prod_{j=0}^i (1 - \theta - j)^{k_j-1} \right) / \left(\prod_{j=1}^i k_j! \right),$$

a straightforward computation gives $s_{\tau 0}(\tau) = s_{\tau L}$. Consequently $s_{\tau 0}(\tau)$ is a constant. We set $P(\tau)$ denoting all the generic function in the form $\sum_{l=0}^L a_l(\mathbf{v}_L) \tau^{b_l}$ where $a_l(\tau_L, \beta)$ and b_l are some real constants and L a bounded integer. Such functions admit a primitive which are explicitly known and find again the generic form $P(\tau)$. It is clear that $\tau^{\gamma-1} \kappa(\tau) \equiv P(\tau)$. It is thus possible to prove that all the functions $s_{\tau i}(\tau)$ are in the generic form $P(\tau)/\beta^i$. The function $s_{\tau 1}(\tau)$ is solution of

$$\frac{\beta}{1 - \theta} \frac{\tau^{(\gamma_\tau-1)(\theta-1)+\gamma}}{s_{\tau L}^\theta} d_\tau s_{\tau 1} + s_{\tau L} d_\tau \frac{1}{\tau^{\gamma_\tau-\gamma}} = \tau^{\gamma-2} \kappa(\tau),$$

which implies that $d_\tau s_{\tau 1} \equiv P(\tau)/\beta$. Consequently, $s_{\tau 1}(\tau) \equiv P(\tau)/\beta$. Assume that functions $s_{\tau i}(\tau) \equiv P(\tau)/\beta^i$ for $i < n$. The function $s_{\tau n}(\tau)$ is solution of

$$\frac{\beta}{1 - \theta} \frac{\tau^{(\gamma_\tau-1)(\theta-1)+\gamma}}{s_{\tau L}^\theta} \left(d_\tau s_{\tau n} + s_{\tau L} \sum_{\omega(\{k_j\})} \alpha_{\{k_j\}} d_\tau \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{s_{\tau j}(\tau)}{s_{\tau L}} \right)^{k_j} \right) + d_\tau \frac{s_{\tau n-1}}{\tau^{\gamma_\tau-\gamma}} = 0.$$

Since $d_\tau (s_{\tau n-1}/\tau^{\gamma_\tau-\gamma}) \equiv P(\tau)/\beta^{n-1}$ and $\beta \sum_{j=1}^{n-1} j k_j = \beta^n$, we deduce immediately that $d_\tau s_{\tau n} \equiv P(\tau)/\beta^n$. A recurrence ensures us that all the functions $s_{\tau i}(\tau)$ are in the form $P(\tau)/\beta^i$.

Consequently, there exists a family of functions $(P_i(\tau))_{0 \leq i \leq n}$ in the generic form $\sum_{l=0}^{L_i} a_{il}(\mathbf{v}_L) \tau^{b_{il}}$ such that $s_\tau(\tau) = \sum_{i=0}^n P_i(\tau) (\eta/\beta)^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1})$ where the constants $a_{il}(\mathbf{v}_L)$, b_{il} and L_i are explicitly known. Then, we can deduce, from this observation, an explicit approximation of $s_{\tau R}$ depending on $\mathbf{v}_L$ and τ_R . The function $s_{\tau R} = s_\tau(\tau_R)$ can be rewritten

$$s_{\tau R} = s_{\tau L} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=0}^{L_i} \tilde{a}_{il}(\mathbf{v}_L) \tau_R^{b_{il}} \right) \left(\frac{\eta}{s_{\tau R}} \right)^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1})$$

where $\tilde{a}_{il}(\mathbf{v}_L)$, $\tilde{b}_{il}$ and L_i are explicitly known constants. Expanding again $s_{\tau R}^{(-\theta)}$ using the above expansion, we obtain the existence of a family of functions $(P_i(\tau))_{0 \leq i \leq n}$, admitting always the same generic form and where the constant $a_{il}(\mathbf{v}_L)$, b_{il} and L_i can be explicitly defined, such that

$$s_{\tau R} = s_{\tau L} + \sum_{i=1}^n P_i(\tau_R) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}).$$

Consequently, the conclusion of the proof lies on the estimation of τ_R . If $\gamma = \gamma_\tau$ it is obvious that $\tau_R = \tau^*$ which conclude the proof. Although, if $\gamma < \gamma_\tau$, we search τ_R in the following form:

$$\tau_R = \tilde{\tau}_0 + \sum_{i=1}^n \tau_i \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}),$$

where we introduce the notation $\check{\tau}_0$ which will be defined later on. There exists thus, a family of functions $(\chi_i(\mathbf{v}_L, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}))_{0 \leq i \leq n}$, explicitly known, such that

$$s_{\tau R} = s_{\tau L} + \sum_{i=1}^n \chi_i(\mathbf{v}_L, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}).$$

Moreover, τ_R must satisfy the equality (4.5) which rewrites

$$s_{\tau L} + \sum_{i=1}^n \chi_i(\mathbf{v}_L, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}) = -\frac{1}{\gamma_\tau - \gamma} \tau_R^{\gamma_\tau - 1} \kappa(\tau_R).$$

A straightforward calculation ensures that

$$\tau_R^{\gamma_\tau - 1} \kappa(\tau_R) = \sum_{i=0}^n (a(\mathbf{v}_L) \tau_i + f_i(\mathbf{v}_L, \tau_1, \dots, \tau_{i-1})) \eta^i + \mathcal{O}(\eta^{n+1}).$$

where a and f_i are explicitly known and ensures also that $\check{\tau}_0 > 0$ is the non trivial solution, *i.e.* $\check{\tau}_0 \neq \tau_L$, of the following equation:

$$\kappa(\check{\tau}_0) + (\gamma_\tau - \gamma) \frac{s_{\tau L}}{\check{\tau}_0^{\gamma_\tau - 1}} = 0.$$

The explicit forms of τ_i function of $\mathbf{v}_L$ are immediately given from the above equalities and the proof is concluded. ■

Proof of the Proposition 3.15

The proof of the Proposition 3.15 is analogous to the proof of the Proposition 3.14. The main difference is briefly describe. In the proof of the Proposition 3.14, the algebraic relation connecting $p(\xi)$ to $\tau(\xi)$ and $p_\tau(\xi)$ and the ordinary differential equation governing $p_\tau \tau^{\gamma_\tau}(\xi)$ are considered. The proof of the Proposition 3.15 lies on the algebraic relation $p_\tau(\xi)$ to $\tau(\xi)$ and $p(\xi)$ and the ordinary differential equation governing $p \tau^\gamma(\xi)$. The proof remains, thus, the same.

We recall that the function μ/μ_τ admit a maximum in $(\mu/\mu_\tau)_L$. Consequently,

$$\frac{\mu}{\mu_\tau} = \frac{\eta}{\beta} \frac{\tau^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 1}}{s_\tau^\theta}$$

where $\beta = \tau_L^{\theta(\gamma_\tau - 1) + 1} / s_{\tau L}^\theta$. Since $s_\tau = p_\tau \tau^{\gamma_\tau}$ and setting $s_p = p \tau^\gamma$, the algebraic relation connecting p and p_τ allows to write

$$s_\tau = -\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma - 1} \tau^{\gamma_\tau - \gamma} s_p + (\gamma_\tau - 1) \tau^{\gamma_\tau - 1} \kappa_1(\tau)$$

with $\kappa_1(\tau) = \tau_L \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + (\tau - \tau_L) \left(\frac{M^2}{2} (\tau - \tau_L) - p_L - p_{\tau L} \right).$

It is, thus, necessary to consider, not the differential equation (4.27) as in the proof of the Proposition 3.14, but the following differential equation:

$$\beta\tau^{(1-\theta)(\gamma-1)-\gamma\tau} \left((\gamma_\tau - 1)\tau^{\gamma-1}\kappa_1(\tau) - \frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma - 1}s_p \right)^\theta d_\tau s_p + \eta d_\tau (s_p \tau^{\gamma\tau-\gamma}) = \eta\tau^{\gamma\tau-2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma_\tau - 1}\kappa(\tau) + (\gamma_\tau - \gamma)(\gamma - 1)\kappa_1(\tau) \right)$$

where $\kappa(\tau)$ is defined by (4.28).

The conclusion of the proof lies on a similar computation proposed in the proof of the Proposition 3.14 but with an asymptotic expansion based on the variable s_p . ■

References

- [1] A. FORESTIER, J.M. HERARD and X. LOUIS : *A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, tome 324, Série I, No 8, pp. 919-926 (1997).
- [2] P. LEFLOCH, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in non conservation form*, Proc. 2nd Int. Conf., Aachen/FRG 1988, Notes Numer. Fluid Mech., Vol 24, pp 362-373 (1989).
- [3] P.G. LEFLOCH : Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1990).
- [4] P.G. LEFLOCH, *Shock waves for non linear hyperbolic systems in non conservation form*, IMA preprint series No 593 (1989), University of Minnesota.
- [5] V. VATEL : PhD thesis, Université Bordeaux I (1993).
- [6] X. LOUIS : PhD thesis, Université Paris VI (1995).
- [7] L. SAINSAULIEU : Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, février 1995
- [8] B. MOHAMMADI and O. PIRONNEAU : **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [9] L. SAINSAULIEU : *Traveling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative*, SIAM journal of Applied Math., vol 55, No 6, pp 1552-1576 (1995).
- [10] P. A. RAVIART and L. SAINSAULIEU : *A non-conservation hyperbolic system modeling spray dynamics. Part 2. Existence of traveling waves solutions*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [11] D. VANDROMME : *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. Thèse de l'Université de Lille (1983).
- [12] L. SAINSAULIEU : *Initial value problem for the parabolic regularization of a first order non hyperbolic system*, accepté pour publication dans Mathematical Methods and Models in Applied sSciences.

- [13] D. SERRE : **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).
- [14] G. DAL MASO, P. LEFLOCH and F. MURAT : *Definition and weak stability of a non conservative product*, J. Math. Pures Appl., vol 74, pp. 483-548 (1995).
- [15] J.F. COLOMBEAU and A.Y. LEROUX : *Numerical methods for hyperbolic system in non-conservation form using products of distributions*, in **Advances in Comp. Meth. dor P.D.E.'s 4**, ed. R. Vichnevetsky and R. Steplemar IMACS (1987).
- [16] H. REINHARD : **Equations différentielles, fondements et applications**, Dunod Université (1989).
- [17] D. GILBARG : *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math., Vol 73, pp 256-274 (1951).
- [18] C. BERTHON and F. COQUEL : *A convection-diffusion system with first and second order in non-conservation form. Part 1 : Existence of travelling wave solutions*, in preparation.
- [19] L. SAINSAULIEU : *Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs*, C.R.A.S. Paris, t. 312, Série I, p. 491-494 (1991).

Chapitre 3

Multiple solutions for a
non-Lipschitz system : Application
to compressible flow models

Multiple solutions for a non-Lipschitz system : Application to compressible flow models

Abstract

The present work is devoted to the study of uniqueness of smooth travelling wave solutions of a convection dissipation system with source terms. Considering a simplified turbulent model, we prove that the source terms imply new regularity conditions, never satisfied with few exceptions, relating to the turbulent viscosity in order to ensure the uniqueness of the smooth solutions here considered. This problem underline the difficulties of the numerical initialization of the turbulent quantities in a neighbourhood of zero.

1 Introduction

The numerical approximation of PDE system associated with turbulent models of compressible flows is undergoing quite a boom. Actually, new techniques are proposed (cf. Forestier-Hérard-Louis [1]) and are based on approximate methods consistent with the first order operator of the considered systems.

Noticing that the first order operator is, in fact, associated with an hyperbolic system in nonconservative form, Berthon-Coquel ([10], [11]) propose a new method lying on the approximation of the smooth travelling wave solutions. They prove the existence and uniqueness, up to a translation, of such smooth solutions ([5]) for the PDE system associated with the (k, ϵ) model but neglecting the source terms.

These source terms take a fundamental importance in these models since they ensure a comeback to an equilibrium state of the studied flow. Consequently, while numerical simulations, it appears as necessary that the initialization of the turbulence can be in a neighbourhood of zero. It is however well known ([12]) that the approximated solutions depend on the choice of the initial data.

We notice, for instance, that considering as initial data the turbulence exactly equal to zero, the numerical methods do not expand, as expected, turbulent phenomenon. But, considering the initial turbulence in a neighbourhood of zero but distinct from zero, then some turbulent phenomenon can be developed during the simulation.

As a consequence of these remarks, the study of such systems when the turbulence vanishes appears as necessary. More precisely, in this work, we focus on the on the

existence of smooth travelling wave solutions. Since source terms exist, we prove that such viscous profiles, solution of the considered system, may **come** and **comeback** to equilibrium states which do not admit turbulence. This result, natural and according with the numerical result, should have to be accompanied, logically, by a result ensuring that the turbulence vanishes everywhere in the viscous profile.

We prove that such a result is, generally, false and within regularity hypothesis relating to the turbulent viscosity, there exists an infinity of travelling wave solutions admitting **arbitrary** areas where turbulent phenomenon are expanded, and satisfying the natural equilibrium states.

This result underlines, as well as number of turbulent models are in fact still posed, the problem of the differences between approximated solutions resulting of the choice of the initialization of the turbulence near zero.

Actually, for these choices of the initialisation, the approximated viscous profiles can be very different but all are solution of the same problem.

Notice that the numerical results, obtained an initial turbulence exactly equal to zero, do not seem to be according with the multiply solutions result expressed in the present work. However, we show that the multiplicity of the viscous profile is, in fact, based on a non Lipschitz continuous ODE in the following form :

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)^\alpha, \quad \alpha \in]0, 1[, \quad t > 0.$$

It is then enough to notice that numerical methods approximating the solutions of the Cauchy problem with $X(0) = 0$ as initial data lead us, generally, to the **unique** approximated solution $X(t^n) = 0$, and this even if this Cauchy problem must develop an infinity of solutions.

2 The mathematical model

The study of global viscous profiles for a turbulent flow is proposed in the framework of the mixing length turbulence model for compressible flows. The fully established turbulent flow for an ideal gas with $d \geq 1$ space variables is considered. The gas is characterized by its density ρ , its velocity $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$ and its total energy E . We denote by k the specific kinetic turbulent energy and by ϵ the specific dissipation rate of the kinetic turbulent energy. For the sake of symmetry in the forthcoming statements, the equation governing k is written in terms of the variable:

$$p_\tau = (\gamma_\tau - 1)\rho k, \quad \text{where } \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}. \quad (2.1)$$

Here, p_τ may be compared to a turbulent pressure with adiabatic coefficient $\gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}$. The dependence of this coefficient with respect to the space dimension explains the need

for considering the equations in several space variables. Denoting I the identity mapping in $\mathbb{R}^d$, the system of equations associated with the mixing length model writes

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{u} = 0, \quad (2.2.i)$$

$$\partial_t \rho \underline{u} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + (p + p_\tau) I) = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u})), \quad (2.2.ii)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot (E + p + p_\tau) \underline{u} = \nabla \cdot ((\mu + \mu_\tau) \mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau), \quad (2.2.iii)$$

$$\partial_t \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} + \nabla \cdot \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \underline{u} + p_\tau \nabla \cdot \underline{u} = \mu_\tau \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \cdot (\kappa_\tau \nabla T_\tau) - \rho \epsilon, \quad (2.2.iv)$$

The gas pressure p is taken as that of polytropic ideal gases:

$$\frac{p}{\gamma - 1} = E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1}, \quad 1 < \gamma \leq 3. \quad (2.3)$$

The following algebraic relation close the specific dissipation rate of the kinetic turbulent energy:

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L}, \quad \text{with} \quad p_\tau = (\gamma_\tau - 1)\rho k,$$

where L , a positive real constant, stands for the mixing length.

Concerning the dissipative terms in the above equations, the viscous stress tensor $\mathbf{\Gamma}(\underline{u})$ reads

$$\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) = \nabla \underline{u} + {}^T \nabla \underline{u} - \frac{\lambda}{\mu} (\nabla \cdot \underline{u}) I, \quad (2.4)$$

where λ and μ respectively stand for the Lammé coefficient and the laminar viscosity. Here, $\mu = \mu(T)$ denotes a smooth and positive function of the temperature $T = p/\rho$. We use the Stokes assumption to get $\lambda/\mu = (\gamma_\tau - 1)$ when $d \geq 2$ while for $d = 1$ we choose as usual $\lambda/\mu = 1$. For convenience in what follows, we set $\lambda/\mu = 2 - \chi$ where clearly $\chi > 0$. Accordingly to the classical mixing length model, the turbulent viscosity is a non negative function, see section 4 for some examples, in the following form:

$$\mu_\tau = \mu_\tau(\rho, k) \quad \text{where} \quad p_\tau = (\gamma_\tau - 1)\rho k,$$

which must satisfy

$$\mu_\tau(\rho, 0) = 0, \quad \forall \rho > 0.$$

At last, $T_\tau = p_\tau/\rho$ may be considered as a turbulent temperature and the model constants κ and κ_τ refer to conductivity coefficients.

The equation (2.2.iv) governing the turbulence phenomena is classically referred as to “transport” equation for the specific kinetic turbulent energy. Such a terminology is clearly not suited since this balance equation does involve both first order and second

order products which cannot be put in conservative form. These products respectively take the form $p_\tau \nabla \cdot \underline{u}$ and $\mu_\tau \operatorname{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u})$.

Some recent works devoted to fluid models arising in other fields of the physics have dealt with first order extracted systems in nonconservative form. We refer for instance to Raviart-Sainsaulieu [6], Sainsaulieu [4] for diphasic flows and to Cordier et al., Coquel-Marmignon for ionized flows. But in these works, the dissipative operators always stay in conservative form. Thus, the system studied in the present work yields a novelty, namely nonconservative products at the first and second order, which is a non standard mathematical problem. In this paper, our aim is to analyse the possible parabolic regularization of such a non classical second order operator on the (hyperbolic) first order system and the existence of global viscous profile. In that aim, we study below for existence the plane travelling wave solutions of (2.2).

As far the modelling is concerned, our main assumption stays in the omission of the diffusive effects, adopting $\kappa = \kappa_\tau = 0$. We refer the reader to Remark 3.10 for some comments about the present assumption.

The main result of the present paper are presented in the following section.

3 Main results

We first state some algebraic properties of the first order extracted system :

Lemma 3.1

Consider the first order system extracted from (2.2) which can be written with clear notations in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i(\mathbf{v}) \partial_{x_i} \mathbf{v} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

with $\mathbf{v} = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, E, p_\tau)$.

(i) *The system (3.1) is hyperbolic on the state space Ω defined by:*

$$\Omega = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+3} ; \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, p > 0, E > 0, p_\tau \geq 0 \right\}.$$

Let $\underline{n} = {}^T(n_1, \dots, n_d)$ be a normalised vector in $\mathbb{R}^d$. The matrix $\sum_{i=1}^d n_i \mathbf{A}_i(\mathbf{v})$ admits the following real eigenvalues

$$\underline{u} \cdot \underline{n} - c, \underline{u} \cdot \underline{n}, \underline{u} \cdot \underline{n} + c \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{\gamma_\tau p_\tau}{\rho}. \quad (3.2)$$

The multiplicity of the eigenvalue $\underline{u} \cdot \underline{n}$ is $d+1$. The associated fields are linearly degenerated and correspond to a contact discontinuity. The two other eigenvalues are simple and the associated fields are genuinely nonlinear.

(ii) Through a contact discontinuity, $\underline{u} \cdot \underline{n}$ and $p + p_\tau$ are continuous.

(iii) Let $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ be a smooth solution of the system (3.1). Then, $\mathbf{v}$ satisfies the following additional scalar conservation laws:

$$\partial_t U(\mathbf{v}) + \nabla \cdot F(\mathbf{v}) = 0, \quad U(\mathbf{v}) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p}{\rho^\gamma}, \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}} \right), \quad F(\mathbf{v}) = U(\mathbf{v}) \underline{u}, \quad (3.3)$$

where $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ denotes any given smooth mapping.

Remark 3.2

Notice that the chosen phase space Ω is non standard since the function p_τ can be vanished. Since p_τ prescribes the turbulent kinetic energy, to allow $p_\tau = 0$ is natural in the framework of turbulent compressible flows.

Proof of the Lemma 3.1

The proof of statements (i) and (ii) can be found for instance in the work by Forestier-Herard-Louis [1] in the framework of the (k, ϵ) model. The statement (iii) is a straightforward extension of the results express in [5], for the (k, ϵ) model, to our setting. ■

The study of the Lax entropy pairs expressed for the (k, ϵ) model ([5]), can be extended as follow:

Lemma 3.3

Consider the following space states:

$$\Omega^* = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+3} ; \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, p > 0, E > 0, p_\tau > 0 \right\}.$$

The mapping $U : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$, defined in the Lemma 3.1 is strictly convex if and only if the mapping $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is strictly convex and satisfies for any $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$ the following inequality:

$${}^T V \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) < -{}^T (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \cdot (\nabla^2 \mathcal{F})^{-1} \cdot (D \cdot \nabla \mathcal{F}) \quad (3.4)$$

where $V = {}^T(\gamma s_1, \gamma_\tau s_2) \in \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}(\gamma - 1, \gamma_\tau - 1) \in \text{Mat}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ and $\nabla^2 \mathcal{F}$, respectively $\nabla \mathcal{F}$, refers to the Hessian matrix, respectively to the gradient vector, of $\mathcal{F}$.

Remark 3.4

Note that it is indeed possible to prove that the pairs (U, F) of the form (3.3) are the only non trivial entropy pairs for the system (3.1). For instance, we easily deduce from (iii) Lemma 3.1 and Lemma 3.3 that the strictly convex mapping $\mathcal{F} : (s_1, s_2) \rightarrow -\ln(s_1 s_2)$ satisfies the conditions (3.4). The pair (U, F) developed from this $\mathcal{F}$ is therefore a Lax entropy pair.

The following result sharpens the behaviour of the additional conservation laws for smooth solutions of (3.1) exhibited in (iii) Lemma 3.1 in the presence of the second order operator and the source terms.

Lemma 3.5

Let U and F be defined by (3.3) and let $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth mapping. The smooth solutions of the full system (2.2) obey the following balance equations:

$$\partial_t U(\mathbf{v}) + \nabla \cdot F(\mathbf{v}) = \left(\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mu \partial_{s_1} \mathcal{F} + \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \mu_\tau \partial_{s_2} \mathcal{F} \right) \text{tr}(\mathbf{\Gamma}(\underline{u}) \cdot \nabla \underline{u}) + \left(\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \partial_{s_1} \mathcal{F} - \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \partial_{s_2} \mathcal{F} \right) \rho \epsilon,$$

where we have set $s_1 = \frac{p}{\rho^\gamma}$, $s_2 = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}$.

Since the convection system extracted from (2.2) is hyperbolic, this implies to study the regularising properties of the second order operator. The existence of plane travelling wave solutions of the system (2.2) allows to prove the above property. This existence problem becomes usual (Raviart-Sainsaulieu [6], Sainsaulieu [3], Serre [7] for instance), but we recall the dissipative operator is in nonconservative form in the present work. It arises that the mixing length model is out of the usual frame of hyperbolic system with parabolic smoothness where the second order operator is in conservative form.

The plane wave solutions we want to study are at less $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ functions governed by the following system in one space dimension:

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u_1 = 0, \quad (3.5.i)$$

$$\partial_t \rho u_1 + \partial_x (\rho u_1^2 + (p + p_\tau)) = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) \partial_x u_1), \quad (3.5.ii)$$

$$\partial_t \rho u_i + \partial_x (\rho u_i u_1) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i), \quad i = 2, \dots, d, \quad (3.5.iii)$$

$$\partial_t E + \partial_x (E + p + p_\tau) u_1 = \partial_x (\chi (\mu + \mu_\tau) u_1 \partial_x u_1) + \sum_{i=2}^d \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u_i \partial_x u_i), \quad (3.5.iv)$$

$$\partial_t p_\tau + u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1 = (\gamma_\tau - 1) \left[\chi \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 - \rho \epsilon \right], \quad (3.5.v)$$

For the sake of conciseness, we rewrite, with the notations of the Lemma 3.1, the system (3.5) in the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{v}). \quad (3.6)$$

Here, the mapping $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^{d+3} \times \mathbb{R}^{d+3} \rightarrow \mathbb{R}^{d+3}$ is the contracted product in $\mathbb{R}^{d+3}$, i.e. for $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+3}$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+3}$ then $(\mathbf{u} | \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{d+3}$ and its i^{th} component reads $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$. The mapping $\mathbf{D}_1(\mathbf{v}) : \Omega \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}^{d+3})$ satisfies

$$^T (\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v}) = \mu_\tau \left(\chi (\partial_x u_1)^2 + \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2 \right) (0, \dots, 0, (\gamma_\tau - 1)).$$

Otherwise, the matrix $A(\mathbf{v})$ does not coincide with the Jacobian matrix of any flux function, since quantity $u_1 \partial_x p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u_1$, appearing in the equation (3.5.v), do not allow

a conservative writing. At last, the products $(\partial_x \mathbf{v} | \mathbf{D}_1(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v})$, only contributing to the equation (3.5.v), cannot be also written in conservative form. The main originality and difficulty of the system (3.5) lies on such a property. The mixing length model is out of the usual frame (cf. Raviart-Sainsaulieu [6], Serre [7]) of convection-dissipation system where $\mathbf{D}_1 \equiv 0$.

A travelling wave solution of (3.6) is a smooth function of the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \quad \xi = x - \sigma t, \end{cases} \quad (3.7)$$

where $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$ denote two bounded constant states. The pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}' - (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}')' - (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}') = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}), \quad (3.8.i)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R. \quad (3.8.ii)$$

The possible existence of such solutions implies the following compatibility condition:

Lemma 3.6

Let σ be a real constant. Let us assume that there exists, in the large, smooth travelling wave solutions, included in Ω , of (3.6) in the form (3.7) where the pair $(\hat{\mathbf{v}}, \sigma)$ is characterized by (3.8). Assume that the density $\rho(t, x)$ is bounded. Then, necessarily, the left and right states satisfy

$$p_{\tau L} = 0 \quad \text{and} \quad p_{\tau R} = 0. \quad (3.9)$$

Remark 3.7

If the source terms $\mathbf{S}$ are neglected, then the compatibility condition (3.9) does not exist.

Proof of the Lemma 3.6

Since smooth travelling waves solutions of (3.6) exist in the large, then there exists a smooth function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solution of (3.8). This function $\hat{\mathbf{v}}$, satisfying (3.8.ii), admits the following limit:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{\mathbf{v}}'(\xi) = {}^T(0, \dots, 0).$$

Consequently, the limit states, denoted by $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$, must be solution of

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}_L) = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}_R) = 0,$$

where the mapping $\mathbf{S} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+3}$ is defined by

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}) = {}^T(0, \dots, 0, -\rho\epsilon) \quad \text{where} \quad \rho\epsilon = \frac{p_{\tau}^{3/2}}{L(\gamma_{\tau} - 1)^{3/2} \sqrt{\rho}}.$$

The proof is, thus, concluded. ■

First, the source terms are dropped to allow the analysis for arbitrary states. The result devoted to the existence of travelling wave solutions of system (3.6), where $\mathbf{S} \equiv 0$ is given now.

Theorem 3.8

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and assume $\mathbf{S} \equiv 0$.

(i) Let $\mathbf{v}_L \in \Omega^*$ be a given constant state and σ a given real constant. Assume that $\mathbf{v}_L$ and σ satisfy the following inequality:

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L} \quad (3.10)$$

and that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_R \in \Omega^*$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (3.7) which is solution of the system (3.6). This solution is unique up to a translation and is included in Ω^* .

(ii) Symmetrically, let $\mathbf{v}_R \in \Omega^*$ and $\sigma \in \mathbb{R}$ be given. Assume that $\mathbf{v}_R$ and σ satisfy

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R} \quad (3.11)$$

and assume that there exists two strictly positive constants $m_1 < m_2$ such that $m_1 \leq \mu(T) \leq m_2$. Then there exists a unique constant state $\mathbf{v}_L \in \Omega^*$ such that there exists a smooth travelling wave in the form (3.7) which is solution of the system (3.6). This solution is unique up to a translation and is included in Ω^* .

Proof of the Theorem 3.8

The proof of the Theorem 3.8 can be deduced from the theorem of the existence and uniqueness expressed in [5] in the framework of the (k, ϵ) model. In this instance, the dissipation rate of the turbulent kinetic energy ϵ is governed by the following partial derivative equation where the source term is not considered:

$$\partial_t \rho \epsilon + u_1 \partial_x \rho \epsilon + (1 + C_1(\gamma_\tau - 1)) \rho \epsilon \partial_x u_1 = C_1(\gamma_\tau - 1) \chi \frac{\rho \epsilon}{p_\tau} \mu_\tau (\partial_x u_1)^2 + \mu_\tau \frac{\rho \epsilon}{p_\tau} \sum_{i=2}^d (\partial_x u_i)^2.$$

It can be proved that the ratio

$$\rho^{1-C_1} \frac{p_\tau^{C_1}}{\rho \epsilon}$$

remains constant in a travelling wave. Consequently, setting $C_1 = 3/2$, there exists a constant length $L > 0$ such that

$$L = \frac{k^{C_1}}{\epsilon} \quad (3.12)$$

for a travelling wave solution of the (k, ϵ) model.

Studying travelling wave solutions of the (k, ϵ) model with $C_1 = 3/2$ implies a closure of the quantity ϵ given by (3.12) and the proof is completed. ■

Remark 3.9

The assumption $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ is more restrictive than the usual where $1 < \gamma \leq 3$. But this condition appears as a natural modelling hypothesis for polytropic gases since $1 < \gamma \leq \frac{2}{d} + 1$.

Remark 3.10

Without the simplifying assumption relating to the conductivity coefficients, one can get easily convinced that the homoclines to be studied are governed by a dynamical system in $\mathbb{R}^6$ while furthermore their critical points are unknowns. This difficulty remains true with our assumption but the governing dynamical system can be reduced in $\mathbb{R}^2$ and the Poincarre-Bendixon Theory can be applied. Let us notice that the unknown of critical points is implied by the nonconservative form of the system since there does not exist conservative reformulation.

The above Theorem proves that the second order operator is a parabolic regularization of the first order hyperbolic extracted system. Furthermore it justifies the choice of the second order operator considered in this work. Since the source terms are not be considered, the viscous profiles, ensure by the Theorem 3.8, find a sense globally in space but just locally in time. Consequently, in order to defined viscous profile in large (space and time), the source terms can not be neglected in the travelling wave analysis.

Since in the presence of source terms, $p_{\tau L}$ and $p_{\tau R}$ are forced to be zero and noticing that $p_\tau(t, x) = 0$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ obviously satisfies the transport equations, one would expect the travelling wave solutions of (3.6) to stay with zero turbulent kinetic energy.

In fact, we state below that such an expected result is wrong for standard choices of the turbulent viscosity $\mu_t(\rho, k)$. Actually (3.6) does admit an infinite number of non trivial travelling wave solutions satisfying the compatibility condition (3.9).

Such a failure is seen below to come from the lack of smoothness of μ_t when $p_\tau = 0$. More precisely, the turbulent viscosity is not Lipschitz-continuous for such states in opposition to the general requirement for uniqueness for ODE system. For instance, the simplest choice

$$\mu_t = \frac{C_\mu}{(\gamma_\tau - 1)^2} \frac{p_\tau^2}{\rho \epsilon} = C_\mu L \rho \sqrt{k}$$

is not Lipschitz-continuous and yields multiple non trivial solutions with $p_{\tau L} = p_{\tau R} = 0$. More generally, such a negative result holds true when considering turbulent viscosity satisfying the following hypothesis:

(H) : The function $\mu_t \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ is such that

$$\mu_t(\rho, k) > 0 \quad \forall \rho > 0, \quad k > 0,$$

and there exists a constant $\alpha \in]0, 1[$ and a positive function $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ such that

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mu_t(\rho, k)}{k^\alpha} = h(\rho). \quad (3.13)$$

This is the matter of the following statement which we shall exemplify in the next section:

Theorem 3.11

Let $\gamma \in]1, \gamma_\tau]$ and let σ be a given real constant. Assume that the compatibility relation (3.9) holds and assume that there exists two positive constant $m_1 < m_2$ such that $m_1 < \mu(T) < m_2$. Assume one of the two following assertions holds:

(a) Let $\mathbf{v}_L \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{with} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L},$$

(b) Let $\mathbf{v}_R \in \Omega$ be a given constant state such that

$$\frac{(u_1)_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{with} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R}.$$

(i) Assume that the function $\mu_t(\rho, k)$ satisfies the hypothesis (H). Then the system (3.6) admits an infinite number of smooth travelling wave solutions, included in Ω , such that

$$p_\tau(x, t) = \widehat{p}_\tau(x - \sigma t) > 0, \quad \forall x - \sigma t > \xi_0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \widehat{p}_\tau(\xi) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \widehat{p}_\tau(\xi) = 0,$$

where ξ_0 is arbitrary. Moreover, all the solutions admits the same left and right states. Setting, under the assumption (a), $i = R$ and $j = L$ or, under the assumption (b), $i = L$ and $j = R$, the unknown state finds the following form:

$$\mathbf{v}_i = {}^T \left(\rho_i, \frac{M}{\rho_i} + \sigma, u_{2j}, \dots, u_{dj}, p_i, 0 \right)$$

where

$$M = \rho_j(u_{1j} - \sigma), \\ \frac{1}{\rho_i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\rho_j} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_j}{M^2}, \\ p_i = \frac{\rho_i}{\rho_j} p_j + (\gamma - 1) \left(\frac{\rho_i}{\rho_j} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_i} \right) - p_j \right).$$

(ii) Assume that the function $\mu_t(\rho, k) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ is Lipschitz. Then there exists a unique, up to a translation, smooth travelling wave solution of (3.6), in the form (3.7), such that

- the function $p_\tau(t, x) = 0$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,
- the functions ρ , ρ_τ and E coincide with the travelling wave solution of the Navier-Stokes equations.

The proof of this result is given section 5.

Remark 3.12

The hypothesis (H) relating to non Lipschitz function is some restrictive and it is easy to define a non Lipschitz function which does not satisfy the hypothesis (H). However, in the present framework of the mixing length model, the non Lipschitz turbulent viscosities satisfy the hypothesis (H).

Remark 3.13

If the turbulent viscosity μ_τ is Lipschitz, then ODE system (3.8.i) is Lipschitz. Consequently, the well known Cauchy problem admits a unique local solution. Since the initial data are given at the infinities, the travelling wave solutions are not characterized by a Cauchy problem. There exists Lipschitz ordinary differential system admitting an infinite number of solution for which there limits at the infinity remain the same. For instance, we can cite the Van der Pool bifurcation equation (see [8] for some details) where some bifurcations admit these properties. Consequently, the result expressed (ii) Theorem 3.11 ensures that the ordinary differential problem (3.8) is well posed if the turbulent viscosity μ_τ is Lipschitz.

4 Applications

This section is devoted to the application of the Theorem 3.11 to some mixing length turbulence model. A such kind of turbulence model are distinguished by the turbulent viscosity μ . Since

$$\rho\epsilon = \frac{p_\tau^{3/2}}{L},$$

the turbulent viscosity finds the following generic form:

$$\mu_t(\rho, k) = C_\mu f_\mu(\rho, k) L \rho k^{1/2} \quad \text{with} \quad p_\tau = (\gamma_\tau - 1)\rho k,$$

where $C_\mu > 0$ is a real constant and $f_\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ defined the damping function. Here, the presented models differ from this damping function.

The application of the Theorem 3.11 is restricted to three representative models. More precisely, we present below the standard mixing length model, the Hoffman model and the Hassid-Porek model. The reader may find an exhaustive list of models in Patel-Rodi-Scheuerer [9].

Corollary 4.1 (The standard model)

Under the assumptions introduced in the Theorem 3.11, let us consider the standard model characterized by the following damping function:

$$f_\mu(\rho, k) = 1. \quad (4.1)$$

Then, there exists an infinite number of smooth travelling wave solutions of (3.6).

Proof of the Corollary 4.1

Since the damping function is defined by (4.1), then the turbulent viscosity finds the following expression:

$$\mu_t(\rho, k) = C_\mu L \rho k^{1/2}.$$

Setting $\alpha = 1/2$, the turbulent viscosity satisfies the hypothesis (H) where the function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$h(\rho) = C_\mu L \rho.$$

Consequently, a direct application of the Theorem 3.11 concluded the proof. ■

Corollary 4.2 (The Hoffman model)

Under the assumptions introduced in the Theorem 3.11, let us consider the Hoffman model characterized by the following damping function:

$$f_\mu(\rho, k) = \exp \left(-\frac{1.75}{1 + \frac{1}{50} \frac{\rho k^2}{\mu \rho \epsilon}} \right) \quad \text{with} \quad \rho \epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}. \quad (4.2)$$

Then, there exists an infinite number of smooth travelling wave solutions of (3.6).

Proof of the Corollary 4.2

Since the damping function is defined by (4.2), then the turbulent viscosity finds the following expression:

$$\mu_t(\rho, k) = C_\mu L \rho k^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1.75}{1 + \frac{1}{50} \frac{\rho}{\mu} L k^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Setting $\alpha = 1/2$, the turbulent viscosity satisfies the hypothesis (H) where the function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$h(\rho) = C_\mu L \rho e^{-1.75}.$$

Consequently, a direct application of the Theorem 3.11 concluded the proof. ■

Corollary 4.3 (The Hassid-Porek model)

Under the assumptions introduced in the Theorem 3.11, let us consider the Hassid-Porek model characterized by the following damping function:

$$f_\mu(\rho, k) = 1 - \exp\left(-0.0015 \frac{\rho k^2}{\mu \rho \epsilon}\right) \quad \text{with} \quad \rho \epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}. \quad (4.3)$$

Then, there exists a unique, up to a translation, smooth travelling wave solution of (3.6) such that $k \equiv 0$ and the functions ρ , ρ_L and E coincide with the travelling wave solution of the Navier-Stokes equations.

Proof of the Corollary 4.3

Since the damping function is defined by (4.3), then the turbulent viscosity finds the following expression:

$$\mu_t(\rho, k) = C_\mu L \rho k^{\frac{1}{2}} \left(1 - \exp\left(-0.0015 \frac{\rho}{\mu} L k^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Such a turbulent viscosity belongs to $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ and is Lipschitz. Consequently, a direct application of the Theorem 3.11 concluded the proof. ■

The above results highlight a strong lack in this kind of model. The considered phenomenon are determinism and it appears that the equations does not respect this property for some choice of the damping function. This lack may find a sense since the considered model are not predictive but only an evolution model. Consequently, they can not properly developed turbulent phenomenon (Theorem 3.11) but just ensured the evolution of the turbulence (Theorem 3.8).

5 Proof of the Theorem 3.11

5.1 Preliminary results

This section is devoted to the proof of the Theorem 3.11. Let σ be a real given constant. A function $\mathbf{v}(t, x)$ in the form

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t, x) = \hat{\mathbf{v}}(x - \sigma t), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_R, \end{cases} \quad \xi = x - \sigma t, \quad (5.1)$$

with $\mathbf{v}_L$ and $\mathbf{v}_R$ two bounded constant state satisfying the compatibility condition (3.9) is considered. This function is a travelling wave solution of (3.6) if and only if, for a given constant state $\mathbf{v}_L$ respectively $\mathbf{v}_R$, there exists a unique constant state $\mathbf{v}_R$ respectively $\mathbf{v}_L$ and a function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ solution of the following set of ordinary differential equation:

$$-\sigma \hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}' = (\mathbf{D}_0(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}')' + (\hat{\mathbf{v}}' | \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}') + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}) \quad (5.2)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R, \quad (5.3)$$

where ' denote the derivation with respect to ξ .

In order to simplify the presentation, we omit the notation $\hat{\cdot}$ and we set

$$\hat{\mathbf{v}}(\xi) = {}^T(\rho(\xi), \rho \underline{u}(\xi), E(\xi), p_\tau(\xi)),$$

where

$$E = \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1}.$$

The following notations are introduced:

$$\tau = \frac{1}{\rho}, \quad M = \rho(u_1 - \sigma) \quad \text{and} \quad v = u_1 - \sigma.$$

Consequently, the ODE system (5.2) can be written

$$d_\xi M = 0, \tag{5.4.i}$$

$$M^2 d_\xi \tau + d_\xi(p + p_\tau) = M d_\xi((\mu + \mu_\tau)\chi d_\xi \tau), \tag{5.4.ii}$$

$$M d_\xi u_i = d_\xi((\mu + \mu_\tau)d_\xi u_i) \quad i = 2, \dots, d, \tag{5.4.iii}$$

$$M \tau d_\xi p + \gamma p M d_\xi \tau = (\gamma - 1)\chi \mu M^2 (d_\xi \tau)^2 + (\gamma - 1)\mu \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2 + \frac{(\gamma - 1)p_\tau^{3/2}}{L(\gamma_\tau - 1)^{3/2}} \sqrt{\tau}, \tag{5.4.iv}$$

$$M \tau d_\xi p_\tau + \gamma_\tau p_\tau M d_\xi \tau = (\gamma_\tau - 1)\chi \mu_\tau M^2 (d_\xi \tau)^2 + (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau \sum_{i=2}^d (d_\xi u_i)^2 + \frac{p_\tau^{3/2}}{L\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \sqrt{\tau}. \tag{5.4.v}$$

The equation (5.4.i) implies the function $M(\xi)$ is a real constant denoted by $M = \rho_L(u_{1L} - \sigma)$. Two cases, $M > 0$ or $M < 0$, can be distinguished respectively associated with a 1-compression wave or a 3-compression wave. For convenience, only case $M > 0$ is considered. The 3-compression wave, *i.e.* $M < 0$, can be deduced from $M > 0$ reversing the role of ξ to $-\xi$.

The two following results reduce the $d + 4$ -ODE (5.4) to a 2-ODE completed by algebraic relations.

Lemma 5.1

Assume that $\mathbf{v}_L \in \Omega$ is given and assume that $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (5.4) such that there exists a bounded state $\mathbf{v}_R \in \Omega$ satisfying

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_L \quad \text{and} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \mathbf{v}_R.$$

Consider the compatibility relation (3.9). Then the function $\hat{\mathbf{v}}(\xi)$ satisfies

$$M = \rho_L((u_1)_L - \sigma), \tag{5.5.i}$$

$$u_i(\xi) = (u_i)_L \quad i = 2, \dots, d, \quad (5.5.ii)$$

$$\begin{aligned} (p(\xi) + p_\tau(\xi))\tau(\xi) &= \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_\tau(\xi)\tau(\xi) + \tau_L p_L + \\ &(\gamma - 1)(\tau_L - \tau(\xi)) \left(\frac{M^2}{2}(\tau_L - \tau(\xi)) + p_L \right) \end{aligned} \quad (5.5.iii)$$

for any ξ in $\mathbb{R}$.

Proof of the Lemma 5.1

With $i = 2, \dots, d$ and setting $U_i = u_i - (u_i)_L$, the integration of (5.4.iii) over $] -\infty, \xi]$ gives

$$M U_i = (\mu + \mu_\tau) d_\xi U_i. \quad (5.6)$$

Since $M > 0$ and $\hat{v}$ is a bounded $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (5.4) included in Ω then the function $\mu + \mu_\tau(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is positive and bounded. Consequently, the unique bounded solution of the equation (5.6) is $U_i \equiv 0$ which implies the relation (5.5.ii).

Consequently, the equations (5.4.ii), (5.4.iv) and (5.4.v) writes

$$M^2 d_\xi \tau + d_\xi(p + p_\tau) = M d_\xi((\mu + \mu_\tau)\chi d_\xi \tau), \quad (5.7.i)$$

$$\tau d_\xi p + \gamma p d_\xi \tau = M(\gamma - 1)\chi \mu (d_\xi \tau)^2 + \frac{(\gamma - 1)p_\tau^{3/2}\sqrt{\tau}}{L(\gamma_\tau - 1)^{3/2}}, \quad (5.7.ii)$$

$$\tau d_\xi p_\tau + \gamma_\tau p_\tau d_\xi \tau = M(\gamma_\tau - 1)\chi \mu_\tau (d_\xi \tau)^2 + \frac{p_\tau^{3/2}\sqrt{\tau}}{L\sqrt{\gamma_\tau - 1}}. \quad (5.7.iii)$$

Setting $H = M^2\tau + p + p_\tau$ and $H_L = M^2\tau_L + p_L + p_{\tau L}$, the integration of (5.7.i) over $] -\infty, \xi]$ gives

$$H - H_L = (\mu + \mu_\tau)\chi M d_\xi \tau. \quad (5.8)$$

The sum of (5.7.ii), divided by $(\gamma - 1)$, with (5.7.iii), divided by $(\gamma_\tau - 1)$, can be written

$$d_\xi \left(\tau \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right) - \frac{M^2}{2} \tau^2 \right) + H d_\xi \tau = (\mu + \mu_\tau)\chi M (d_\xi \tau)^2. \quad (5.9)$$

The multiplication of (5.8) by $d_\xi \tau$ gives thus

$$H d_\xi \tau = H_L d_\xi \tau + (\mu + \mu_\tau)\chi M (d_\xi \tau)^2.$$

Introducing the above relation in (5.9), we obtain

$$d_\xi \left(\tau \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right) + H_L \tau - \frac{M^2}{2} \tau^2 \right) = 0.$$

The integration from $-\infty$ to ξ of this equation gives us the expected relation (5.5.iii). ■

Lemma 5.2

Under the assumptions introduced in the Lemma 5.1, the pair $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ is solution of the following system:

$$\chi(\mu + \mu_\tau) M \tau d_\xi \tau = M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0) + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} \tau p_\tau, \quad (5.10.i)$$

$$d_\xi p_\tau \tau^{\gamma_\tau} = \chi(\gamma_\tau - 1) \mu_\tau M \tau^{\gamma_\tau - 1} (d_\xi \tau)^2 - \frac{\tau^{\gamma_\tau - 1/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{p_\tau^{3/2}}{L M} \quad (5.10.ii)$$

with

$$\tau_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_L + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L}{M^2}. \quad (5.11)$$

Remark 5.3

Under the assumption (3.10), i.e. $M^2 \tau_L > \gamma(p_L + p_{\tau_L})$, the following inequality holds:

$$\tau_0 < \tau_L.$$

Proof of the Lemma 5.2

The equation (5.4.ii) writes

$$d_\xi (M^2 \tau + p + p_\tau) = d_\xi ((\mu + \mu_\tau) \chi M d_\xi \tau).$$

Its integration over $] -\infty, \xi]$ gives

$$(\mu + \mu_\tau) \chi M d_\xi \tau = M^2 \tau + p + p_\tau - (M^2 \tau_L + p_L)$$

A multiplication by τ of this equation allows to plug it in the relation (5.5.iii). A straightforward calculation gives thus the equation (5.10.i).

The equation (5.10.ii) is given by (5.7.iii) since $u_i(\xi) = (u_i)_L$ with $i = 2, \dots, d$. ■

According to the above lemmas, the function $\hat{v}(\xi)$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (5.4) satisfying (5.3) and the compatibility condition (3.9) if and only if the vector valued function $(\tau(\xi), p_\tau(\xi))$ is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (5.10) and admits two bounded limits at the infinity such that

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} p_\tau(\xi) = 0.$$

setting

$$s_\tau(\xi) = p_\tau(\xi) \tau(\xi)^{\gamma_\tau}$$

the system (5.10) writes

$$d_\xi \tau = M \frac{\gamma + 1}{2\chi} \frac{(\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{(\mu + \mu_t)\tau} + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{(\gamma_\tau - 1)\chi} \frac{s_\tau}{M(\mu + \mu_t)\tau^{\gamma_\tau}}, \quad (5.12.i)$$

$$d_\xi s_\tau = \chi(\gamma_\tau - 1) \mu_t M \tau^{\gamma_\tau - 1} (d_\xi \tau)^2 - \frac{\tau^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{s_\tau^{3/2}}{L M}, \quad (5.12.ii)$$

where τ_0 is defined by (5.10) and

$$\mu_t = \mu_t \left(\frac{1}{\tau}, \frac{s_\tau}{(\gamma_\tau - 1)\tau^{\gamma_\tau}} \right).$$

The system (5.12) takes the following condensed form:

$$d_\xi \mathbf{Z} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}) \quad (5.13)$$

where $\mathbf{Z} = {}^T(\tau, s_\tau)$ and $\mathbf{X}(\mathbf{Z})$ defines the vector field of the system (5.12). A straightforward computation ensures the following result relating to the critical points of (5.12):

Lemma 5.4

The ordinary differential system (5.12) admits two critical points, denoted $\mathbf{Z}_L$ and $\mathbf{Z}_R$, defined by

$$\mathbf{Z}_L = {}^T(\tau_L, 0) \quad \text{and} \quad \mathbf{Z}_R = {}^T(\tau_0, 0),$$

where τ_0 is defined by (5.11).

Corollary 5.5

Assume that $\mathbf{Z} = {}^T(\tau, s_\tau) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R}_+)$ is a solution of (5.12) connecting two critical points of the system (5.12). Then the smooth function $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, in the form (5.1), defines a travelling wave solution of (3.6).*

Proof of the Corollary 5.5

By virtue of the Lemmas 5.1 and 5.2, it is sufficient to prove that the function $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+3}$ belongs to the phase space Ω and satisfies the compatibility condition (3.9).

Since $\mathbf{Z}(\xi) = {}^T(\tau(\xi), s_\tau(\xi)) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+)$ connects two critical points then there exists a constant $C > 0$ such that

$$0 < \tau(\xi) < C \quad \text{and} \quad 0 \leq s_\tau(\xi) < C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

The functions τ and s_τ are defined as follow:

$$\tau = \frac{1}{\rho} \quad \text{and} \quad s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}.$$

Consequently,

$$0 < \rho(\xi) < C \quad \text{and} \quad 0 \leq p_\tau(\xi) < C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

A straightforward computation allows to rewrite (5.7.ii) in the following form:

$$d_\xi p \tau^\gamma = (\gamma - 1) \chi \mu M \tau^{\gamma-1} (d_\xi \tau)^2 + (\gamma - 1) \frac{k^{3/2}}{M L} \tau^{\gamma-2} \geq 0.$$

Since

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} p\tau^\gamma(\xi) = \frac{p_L}{\rho_L^\gamma} > 0$$

and $\tau > 0$, then the function $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is positive. The proof is completed since the critical points, given Lemma 5.4, imply

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} s_\tau(\xi) = 0.$$

■

The existence of integral curve solutions of (5.12) is proved. First, we propose an obvious solution associated with the particular case: $p_\tau(\xi) = 0$ for all ξ in $\mathbb{R}$.

Lemma 5.6

Consider the smooth function $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\varphi(\tau) = M \frac{\gamma + 1}{2\chi} \frac{(\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\mu \tau}, \quad (5.14)$$

where τ_0 is defined by (5.11) and μ is a positive constant. Then the following ordinary differential equation

$$d_\xi \tau = \varphi(\tau) \quad (5.15)$$

admits a unique, up to a translation, smooth decreasing solution $\tau^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau^*(\xi) = \tau_L \quad \text{and} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tau^*(\xi) = \tau_0.$$

The vector valued function $\mathbf{Z}^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$\mathbf{Z}^*(\xi) = {}^T (\tau^*(\xi), 0)$$

is a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -solution of (5.12).

Remark 5.7

For the sake of simplicity, the laminar viscosity, μ , remains constant in the above result. The extension to a laminar viscosity depending on the temperature is obvious.

Corollary 5.8

The smooth function $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, in the form (5.1) and associated with the integral curve $\mathbf{Z}^*$, defines a travelling wave solution of (3.6). This solution satisfies

- the function $p_\tau(t, x) = 0$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,
- the functions ρ , ρu and E coincide with the travelling wave solution of the Navier-Stokes equations.

Proof of the Lemma 5.6

since the function $\mu_\tau : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfies

$$\mu_\tau(\rho, 0) = 0 \quad \forall \rho > 0,$$

then the function

$$s_\tau(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

is solution of the ordinary differential equation (5.12.i). Consequently, the vector valued function $\mathbf{Z} = {}^T(\tau, 0)$ is solution of (5.12) if and only if the function $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is solution of (5.15).

Since $\tau_0 < \tau_L$ are the alone critical points of (5.15) and since

$$\varphi(\tau) \begin{cases} \leq 0 & \forall \tau \in [\tau_0, \tau_L], \\ > 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

then, immediately, we have the existence of a unique, up to a translation, smooth decreasing solution, $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [\tau_0, \tau_L]$, of (5.15) connecting the two critical points. ■

5.2 Sufficient conditions for multiple solution

Assume that the turbulent viscosity, μ_τ , satisfies the hypothesis (H). An infinite number of integral curve $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, connecting the two critical points $\mathbf{Z}_L$ and $\mathbf{Z}_R$, solutions of (5.12) are highlighted.

More precisely, we prove below that there exists an infinite number of integral curve solutions of (5.12) intersecting the integral curve $\mathbf{Z}^*$, defined Lemma 5.6, for a finite $\xi \in \mathbb{R}$ with a $\mathcal{C}^1$ -joint.

In that aim, we give the main result relating to the existence of an infinite number of solution for a non-Lipschitz ordinary differential system. The proof of the result is given in the appendix A.

Theorem 5.9

Consider the mapping $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ and assume that there exists two constants, $C > 0$ and $\delta > 0$, such that

$$f(t, X) \geq C \quad \forall |t| < \delta \quad \text{and} \quad \forall |X| < \delta.$$

Then the following Cauchy problem:

$$\begin{aligned} \frac{d X(t)}{d t} &= X(t)^\alpha f(t, X(t)) \quad \text{with} \quad \alpha \in]0, 1[, \\ X(0) &= 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

admits an infinite number of real solutions in a neighbourhood of $t = 0$ such that all the solutions satisfy

$$X(t) = 0 \quad \forall t < 0.$$

First, a compact is proposed within the searched integral curves are solution of an ordinary differential equation.

Lemma 5.10

Let τ_1^* be a given constant such that

$$\tau_0 < \tau_1^* < \tau_L.$$

Let us define a compact $K \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ in a neighbourhood of $(\tau_1^*, 0)$. Then, the integral curves $\tilde{\mathbf{Z}}(t) = {}^T(t, X(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution of the following equation:

$$\frac{d}{dt} \frac{X}{t} = \chi(\gamma_\tau - 1) \mu_t M t^{\gamma_\tau - 1} g(t, X) - \frac{t^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{X^{3/2}}{L M} \frac{1}{g(t, X)} \quad \forall (t, X) \in K, \quad (5.17)$$

where

$$\begin{aligned} g(t, X) &= M \frac{\gamma + 1}{2\chi} \frac{(t - \tau_L)(t - \tau_0)}{(\mu + \mu_t)t} + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{(\gamma_\tau - 1)\chi} \frac{X}{M(\mu + \mu_t)t^{\gamma_\tau}}, \\ \mu_\tau &= \mu_t \left(\frac{1}{t}, \frac{X}{(\gamma_\tau - 1)t^{\gamma_\tau}} \right), \\ 0 &< m_1 < \mu < m_2 \quad \forall (t, X) \in K, \end{aligned}$$

coincide with the integral curves solution of (5.12).

Proof of the Lemma 5.10

The compact K can be chosen such that there exists a real constant $C > 0$ such that

$$-C < d_\xi \tau < 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq d_\xi s_\tau < 0 \quad \forall (\tau, s_\tau) \in K.$$

Since the function $\xi \mapsto \tau(\xi)$ is decreasing while ${}^T(\tau(\xi), s_\tau(\xi)) \in K$, the integral curves $\mathbf{Z}$ solution of (5.12) can be reparameterized by τ . Consequently, such solutions coincide with the solutions of

$$\frac{d}{d\tau} \frac{s_\tau}{\tau} = \chi(\gamma_\tau - 1) \mu_t M \tau^{\gamma_\tau - 1} d_\xi \tau - \frac{\tau^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{s_\tau^{3/2}}{L M} \frac{1}{d_\xi \tau} \quad \forall (\tau, s_\tau) \in K.$$

Substituting s_τ by X and τ by t , we obtain the equation (5.17). Since the system (5.12) is autonomous, the proof is completed. ■

The Theorem 5.9 is applied to the ordinary differential equation (5.17).

Lemma 5.11

The Cauchy problem (5.17) with, as initial data, $X(\tau_1^*) = 0$ admits an infinite number of solutions in a neighbourhood of τ_1^* . Such solutions satisfy

$$X(t) = 0 \quad \forall t > \tau_1^*.$$

Corollary 5.12

The Cauchy problem (5.12) with, as initial, data $\mathbf{Z}(0) = {}^T(\tau_1^*, 0)$ admits an infinite number of integral curves solutions included in K . Such solutions satisfy

$$\mathbf{Z}(\xi) = (\tau(\xi), 0) \quad \forall \xi < 0,$$

which implies $\mathbf{Z}(\xi) \equiv \mathbf{Z}^*(\xi)$ for all $\xi < 0$.

Proof of the Lemma 5.11

The equation (5.17) can be rewritten in the following form:

$$\frac{d X(t)}{d t} = X^\alpha f(t, X(t)), \quad (5.18)$$

$$f(t, X(t)) = \chi(\gamma_\tau - 1) \frac{\mu_t}{X^\alpha} M t^{\gamma_\tau - 1} g(t, X) - \frac{t^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{X^{\frac{3}{2} - \alpha}}{L M} \frac{1}{g(t, X)}, \quad (5.19)$$

where $\alpha \in]0, 1[$ is given by the hypothesis (H).

Since the function μ_τ satisfies the hypothesis (H) and the mapping $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is negative in K , then the mapping $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous in K and there exists a positive function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and a positive constant δ small enough such that

$$\lim_{X \rightarrow 0} f(t, X) = \frac{h(t)}{\mu} (\gamma_\tau - 1) M \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (t - \tau_L)(t - \tau_0) \quad \forall |t - \tau_1^*| < \delta.$$

Consequently, there exists a constant $C > 0$ such that

$$f(t, X) \leq -C \quad \forall (t, X) \in K.$$

The Theorem 5.9 concludes the proof. ■

Now, we prove that all the integral curves, defined Corollary 5.12, keep a sense for all $\xi > 0$ and connect the critical point $\mathbf{Z}_R$.

Lemma 5.13

Consider $\mathbf{Z}_0 \in \overset{\circ}{K}$ belonging to one of the integral curves defined Corollary 5.12. Then the Cauchy problem (5.12) with, as initial data, $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$ admits a unique, up to a translation, integral curve solution connecting the critical point $\mathbf{Z}_R$.

Proof of the Lemma 5.13

Setting $X_\tau(\mathbf{Z})$ and $X_{s_\tau}(\mathbf{Z})$ the two components of the vector field of (5.12), we define the following curve:

$$\mathcal{C}_{s_\tau} = \left\{ (\tau, s_\tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+; X_{s_\tau}(\mathbf{Z}) = 0, \tau \in [\tau_0, \tau_L] \right\}.$$

Since the turbulent viscosity satisfies the hypothesis (H), this curve can be parameterized in the (τ, s_τ) -phase space as follow:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{s_\tau}^1(\tau) &= 0, \\ \mathcal{C}_{s_\tau}^2(\tau) &= \{s_\tau; f(\tau, s_\tau)g(\tau, s_\tau) = 0\},\end{aligned}$$

where the mapping f is defined by (5.19) and the mapping g is defined Lemma 5.10. By definition, we have

$$\mathcal{C}_{s_\tau}^1 \cap \mathcal{C}_{s_\tau}^2 = \{\mathbf{Z}_L, \mathbf{Z}_R\}.$$

After computation, the curve $\mathcal{C}_{s_\tau}^2(\tau) > 0$ in $]\tau_0, \tau_L[$ and admits a maximum for $\tau_{max} \in]\tau_0, \tau_L[$. Let us define the following compact:

$$K(\tau_{max}) = [\tau_0, \tau_{max}] \times [0, \mathcal{C}_{s_\tau}^2(\tau_{max})].$$

Considering the outward unit normal $\mathbf{n}$, the a straightforward computation ensures

$$\mathbf{X}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{n} \leq 0,$$

where $\mathbf{X}(\mathbf{Z})$ defined the vector field of the system (5.12). Consequently, $K(\tau_{max})$ is a positively invariant compact for the vector field $\mathbf{X}$. A straightforward application of the Poincaré Bendixon Theory concluded the proof. ■

The proof of the (i) Theorem 3.11 is, thus, completed. ■

5.3 Sufficient conditions for a unique solution

Assume that the turbulent viscosity, $\mu_\tau \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, is Lipschitz. We prove that the integral curve $\mathbf{Z}^*$ defined Lemma 5.6 is the unique, up to a translation, solution of (5.12).

Lemma 5.14

*Assume that there exists a second integral curve $\mathbf{Z}^{**} \neq \mathbf{Z}^*$ solution of (5.12) and connecting the two critical points $\mathbf{Z}_L$ and $\mathbf{Z}_R$. Then there exists an infinite number of integral curve solution of (5.12), connecting the two critical points $\mathbf{Z}_L$ and $\mathbf{Z}_R$ and such that*

$$d_\xi \tau \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

All these integral curves define a compact denoted K .

Proof of the Lemma 5.14

Define the compact K closed by the two integral curves $\mathbf{Z}^*$ and $\mathbf{Z}^{**}$. Since (5.12) is Lipschitz, the two integral curves $\mathbf{Z}^{**} \neq \mathbf{Z}^*$ can only intersect for a critical point which implies

$$K \neq \emptyset$$

By definition of K , we obtain

$$d_\xi \tau \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Since the system (5.12) is a Lipschitz autonomous ordinary differential system, then for every point $\mathbf{Z}_0 \in K$ there exists an integral curve $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \quad \mathbf{Z}(\xi) \in K \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Consequently, all these integral curves connect the critical points $\mathbf{Z}_L$ and $\mathbf{Z}_R$. ■

Now, it is proved that the assumption of the Lemma 5.14 never holds. First, a reparametrization of the integral curves is proposed.

Lemma 5.15

Consider $\mathbf{Z}_0 = {}^T(\tau^0, s_\tau^0) \in K$ and define the following compact:

$$K_\nu = \left\{ (\tau, s_\tau) \in K; \quad \tau^0 \leq \tau \leq \tau_L - \nu \right\},$$

where $\nu > 0$ is small enough. Then, the integral curves $\tilde{\mathbf{Z}}(t) = {}^T(t, X(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution of the following equation:

$$\frac{dX}{dt} = \chi(\gamma_\tau - 1)\mu_t M t^{\gamma_\tau - 1} g(t, X) - \frac{t^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{X^{3/2}}{L M} \frac{1}{g(t, X)} \quad \forall (t, X) \in K_\nu, \quad (5.20)$$

where

$$\begin{aligned} g(t, X) &= M \frac{\gamma + 1}{2\chi} \frac{(t - \tau_L)(t - \tau_0)}{(\mu + \mu_t)t} + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{(\gamma_\tau - 1)\chi} \frac{X}{M(\mu + \mu_t)t^{\gamma_\tau}}, \\ \mu_\tau &= \mu_t \left(\frac{1}{t}, \frac{X}{(\gamma_\tau - 1)t^{\gamma_\tau}} \right), \\ 0 &< m_1 < \mu < m_2 \quad \forall (t, X) \in K, \end{aligned}$$

coincide with the integral curves solution of (5.12) in the compact K_ν . Moreover, there exists a constant $C > 0$ not depending on ν and a constant $t_0 \in [\tau^0, \tau_L - \nu]$ such that the function $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$X(t) \geq X(\tau^0) e^{-C(t - \tau^0)} \geq X(\tau^0) \quad \forall t \in [\tau^0, \tau_L - \nu]. \quad (5.21)$$

Proof of the Lemma 5.15

For all point $(\tau, s_\tau) \in K_\nu$ there exists two real constants $0 < C_1 < C_2$ such that

$$-C_2 < d_\xi \tau < -C_1 < 0 \quad \forall (\tau, s_\tau) \in K_\nu. \quad (5.22)$$

Since the function $\xi \mapsto \tau(\xi)$ is decreasing while ${}^T(\tau(\xi), s_\tau(\xi)) \in K_\nu$, the integral curves $\mathbf{Z}$ solution of (5.12) can be reparameterized by τ . Consequently, such solutions coincide with the solutions of

$$\frac{ds_\tau}{d\tau} = \chi(\gamma_\tau - 1)\mu_t M \tau^{\gamma_\tau - 1} d_\xi \tau - \frac{\tau^{-(\gamma_\tau + 1)/2}}{\sqrt{\gamma_\tau - 1}} \frac{s_\tau^{3/2}}{L M} \frac{1}{d_\xi \tau} \quad \forall (\tau, s_\tau) \in K.$$

Substituting s_τ by X and τ by t , we obtain the equation (5.17). Since the system (5.12) is autonomous the integral curves $\mathbf{Z}$ and $\tilde{\mathbf{Z}}$ such that $\mathbf{Z}(0) = \tilde{\mathbf{Z}}(0)$ coincide.

Since $d_\xi \tau$ satisfies (5.22) then the mapping $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the same inequality

$$-C_2 < g(t, X) < -C_1 < 0 \quad \forall (t, X) \in K_\nu. \quad (5.23)$$

Consequently, a straightforward computation implies the existence of a constant $C > 0$ such that

$$\frac{d X(t)}{d t} \geq -\mu_t (\gamma_\tau - 1) M \tau_L^{\gamma_\tau - 1} C_2 \geq -C \mu_t.$$

Since μ_τ is a Lipschitz continuous function such that

$$\mu_\tau \left(\frac{1}{t}, 0 \right) = 0 \quad \forall (t, 0) \in K_\nu,$$

then there exists a constant $C > 0$ such that

$$0 < \mu_\tau \leq CX \quad \forall (t, X) \in K_\nu.$$

Consequently, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\frac{d X(t)}{d t} \geq -C s_\tau \quad \forall (t, X) \in K_\nu,$$

which implies, after integration, the inequality (5.21). ■

Lemma 5.16

Assume that $\nu > 0$ is small enough. Then there exists two bounded constants ξ^{**} and $\tilde{t}$ such that

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{t}) = \mathbf{Z}^{**}(\xi^{**}) \in K_\nu.$$

From the Cauchy-Lipschitz Theorem, we deduce

Corollary 5.17

The assumption, relating to the existence of an other integral curve $\mathbf{Z}^{**} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution of (5.12), introduced in the Lemma 5.14 holds always false.

Proof of the Lemma 5.16

Since the integral curve $\mathbf{Z}^{**} = {}^T(\tau^{**}, s_\tau^{**}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution of (5.12) connects the critical point $\mathbf{Z}_L = {}^T(\tau_L, 0)$ then there exists $\nu > 0$ small enough and ξ^{**} such that

$$s_\tau^{**}(\xi^{**}) \leq X(\tau^0). \quad (5.24)$$

where $\mathbf{Z}^{**}(\xi^{**}) \in K_\nu$.

Since the integral curve $\tilde{\mathbf{Z}}$ satisfy the inequality (5.21) then, in the phase space, the point $\mathbf{Z}^{**}(\xi^{**})$ is underneath the point $\tilde{\mathbf{Z}}(\tau^{**}(\xi^{**}))$. The proof is, thus, concluded, since the point $\tilde{\mathbf{Z}}(\tau^0)$ is underneath the point $\mathbf{Z}^{**}(0) = {}^T(\tau^0, s_\tau^0)$. ■

Consequently, the proof of the (ii) Theorem 3.11 is completed. ■

The proof of the Theorem 3.11 is completed. ■

A Proof of the Theorem 5.9

This section is devoted to the proof of the Theorem 5.9. For the sake of simplicity, we assume that there exists a constant $C > 0$ such that

$$f(t, X) \geq C \quad \forall (t, X) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.1})$$

In other words, the assumption relating to the mapping $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ is considered as global in this proof. A straightforward application of this proof allows a weakness in the local sense of the assumption.

Since $\alpha \in]0, 1[$, then the following equation:

$$\frac{d X(t)}{d t} = X(t)^\alpha f(t, X(t)) \quad \text{with} \quad \alpha \in]0, 1[, \quad (\text{A.2.i})$$

$$X(0) = 0, \quad (\text{A.2.ii})$$

is a non-Lipschitz ODE in a neighbourhood of $X = 0$. This equation admits

$$X^*(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

as a solution which implies $X = 0$ is a critical point of (A.2.i).

An infinite number of solutions of the Cauchy problem (A.2) are exhibited. In this aim, the role played by the variable t is reversed by $\tilde{t} = -t$. Omitting, without confusion, the notation $\tilde{\cdot}$, we consider the following Cauchy problem

$$\frac{d X(t)}{d t} = -X(t)^\alpha f(t, X(t)), \quad (\text{A.3.i})$$

$$X(0) = X_0 > 0. \quad (\text{A.3.ii})$$

Consequently, the proof of the Theorem 5.9 lies on the existence of a unique, up to a translation, $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ solution of (A.3) such that there exists a bounded constant $T > 0$ such that

$$X(0) = X_0 \quad \text{and} \quad X(t) = 0 \quad \forall t \geq T.$$

Lemma A.1

Consider a bonded constant $T > 0$. Assume that the Cauchy problem (A.3) admits a solution $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$X(T) = 0.$$

Then the solution can be extended for all $t > T$ as follow:

$$X(t) = 0 \quad \forall t > T.$$

Proof of the Lemma A.1

Noticing that

$$\frac{dX}{dt}(T) = 0,$$

then the $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ -function, defined by

$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & \text{if } t \in [0, T], \\ X^*(t) = 0 & \text{if } t > T, \end{cases}$$

is solution of (A.3). ■

This above result ensures that the existence of a constant $T > 0$ and a solution $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $X(T) = 0$ concluded the proof.

First, consider the following scheme:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left| X_n^{1-\alpha} - (1-\alpha) f(t_n, X_n) \Delta_n \right|^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ X_0 &= X(0) \quad \text{and} \quad \Delta_n = t_{n+1} - t_n. \end{aligned} \tag{A.4}$$

A straightforward computation ensures the consistence and the convergence of this scheme which defines a positive sequence $(X_n)_{n \geq 0}$.

Lemma A.2

Assume that the mapping $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisfies (A.1). Let N be a big enough integer. Then there exists an integer

$$n^* \leq \frac{X_0^{1-\alpha} N}{(1-\alpha) C} \tag{A.5}$$

and a positive sequence $(t_n)_{0 \leq n \leq n^*+1}$ such that the positive sequence $(X_n)_{0 \leq n \leq n^*+1}$, defined by (A.4), satisfies

$$X_n > 0 \quad \forall 0 \leq n \leq n^* \quad \text{and} \quad X_{n^*+1} = 0,$$

with

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = \frac{1}{N} \quad \forall n < n^* \quad \text{and} \quad \Delta_{n^*} = t_{n^*+1} - t_{n^*} \leq \frac{1}{N}.$$

Proof of the Lemma A.2

Setting

$$\Delta_n = \frac{1}{N},$$

the sequence $(\chi_n)_{n \leq 0}$, defined by

$$\begin{aligned} \chi_0 &= X_0^{1-\alpha}. \\ \chi_{n+1} &= \chi_n - \frac{1-\alpha}{N} f(t_n, \chi_n^{\frac{1}{1-\alpha}}), \end{aligned}$$

is considered.

Since the mapping $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies (A.1), then

$$\chi_{n+1} \leq \chi_n - (1 - \alpha) C \frac{n}{N},$$

which implies

$$\chi_{n+1} \leq 0 \quad \forall n \geq \frac{\chi_0 N}{(1 - \alpha) C}$$

Consequently, since

$$\chi_{n+1} \leq \chi_n \quad \forall n \geq 0,$$

there exists an integer

$$n^* \leq \frac{\chi_0 N}{(1 - \alpha) C}$$

such that

$$\chi_{n^*+1} \leq 0 \leq \chi_{n^*}.$$

Since the mapping $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, then there exists t_{n^*} such that

$$\chi_{n^*} > 0 \quad \text{and} \quad \chi_{n^*+1} = 0.$$

We deduce, thus, that the sequence $(\chi_n)_{0 \leq n \leq n^*+1}$, defined by

$$\begin{aligned} \chi_0 &= X_0^{1-\alpha}, \\ \chi_{n+1} &= \chi_n - (1 - \alpha) f(t_n, \chi_n^{\frac{1}{1-\alpha}}) \Delta_n > 0 \quad \text{where } 0 \leq n \leq n^*, \\ \chi_{n^*+1} &= 0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_n &= t_{n+1} - t_n = \frac{1}{N} \quad \text{if } n < n^*, \\ \Delta_{n^*} &= t_{n^*+1} - t_{n^*} \leq \frac{1}{N} \quad \text{such that } \chi_{n^*+1} = 0, \end{aligned}$$

coincides with the sequence $(X_n^{1-\alpha})_{0 \leq n \leq n^*+1}$. ■

The following result ensures that t_{n^*+1} remains bounded as Δ_n goes to zero:

Lemma A.3

There exists a bounded constant $T^ > 0$ such that*

$$t_{n^*+1} \rightarrow T^* \quad \text{as} \quad \Delta_n \rightarrow 0.$$

Proof of the Lemma A.3

We can give the following estimate of t_{n^*+1} :

$$t_{n^*+1} = \sum_{n=0}^{n^*} \Delta_n \leq \frac{n^* + 1}{N}.$$

Since

$$n^* \leq \frac{\chi_0 N}{(1 - \alpha) C},$$

then the following estimate is obtained:

$$t_{n^*+1} \leq \frac{X_0^{1-\alpha}}{(1 - \alpha) C} + \frac{1}{N}.$$

Consequently, t_{n^*+1} remains bounded as Δ_n goes to zero. Then, there exists an extracted subsequence (Δ_{n_m}) such that there exists a bounded constant $T^* > 0$ limit of t_{n^*+1} as Δ_{n_m} goes to zero. ■

The following result conclude the proof:

Lemma A.4

the sequence $(X_n)_{0 \leq n \leq n^+1}$ converges to a continuous function $X : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ as Δ_n goes to zero. Moreover, this function defines a solution of the Cauchy problem (A.3).*

Proof of the Lemma A.4

Let $T > 0$ be a constant such that

$$T > \max_N(T^*, t_{n^*+1}).$$

Consider the sequence $(X^N(t))_N$ of $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}_+)$ functions piecewise affine defined by

$$\begin{aligned} X^N(t_n) &= X_n & \forall n < n^*, \\ X^N(t) &= 0 & \forall t \in [t_{n^*+1}, T]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

By definition, such functions satisfy, for all $N > 0$,

$$X^N \in W^{1,p}(0, T) \quad \forall 1 \leq p \quad \text{and} \quad \frac{d X^N}{d t} \in BV(0, T).$$

Consequently, even if it means extracting a subsequence, there exists two mappings, $\phi \in \mathcal{C}^0(0, T)$ and $\psi \in L^1(0, T)$, such that

$$\begin{aligned} X^N(t) &\xrightarrow{\mathcal{C}^0} \phi(t), \\ \frac{d X^N(t)}{d t} &\xrightarrow{L^1} \psi(t), \end{aligned} \quad \text{when } N \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.7})$$

This convergence result implies the following limit:

$$\frac{d X^N(t)}{d t} + X^N(t)^\alpha f(t, X^N(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi(t) + \phi(t)^\alpha f(t, \phi(t)) \quad \text{as} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Since the scheme (A.4) converges, then

$$\frac{d X^N(t)}{d t} + X^N(t)^\alpha f(t, X^N(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \text{as} \quad N \rightarrow +\infty.$$

This implies the following equality in the distributional space:

$$\psi(t) + \phi(t)^\alpha f(t, \phi(t)) = 0.$$

Since ϕ is continuous, then $\psi \in \mathcal{C}^0(0, T)$.

We can write

$$\int_0^T \varphi(t) \left(-\frac{d X^N(t)}{d t} + \psi \right) dt = \int_0^T \left(X^N(t) \varphi'(t) + \varphi(t) \psi(t) \right) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(0, T).$$

The limits (A.7) imply the following equality in the distributional space:

$$\psi = -\frac{d \phi}{d t}.$$

Since $\psi \in \mathcal{C}^0(0, T)$, then $\phi \in \mathcal{C}^1(0, T)$ and satisfy in the usual sense

$$\frac{d \phi(t)}{d t} = -\phi(t)^\alpha f(t, \phi(t)).$$

The proof is, thus, concluded since

$$X^N(0) = X_0 \quad \text{and} \quad X^N(T) = 0,$$

which implies

$$\phi(0) = X_0 \quad \text{and} \quad \phi(T) = 0.$$

Consequently, the function $\phi \in \mathcal{C}^1(0, T)$ is solution of the Cauchy problem (A.3). ■

The proof of the Theorem 5.9 is completed. ■

References

- [1] A. FORESTIER, J.M. HERARD and X. LOUIS : *A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, tome 324, Série I, No 8, pp. 919-926 (1997).

- [2] B. MOHAMMADI and O. PIRONNEAU, **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [3] L. SAINSAULIEU, *Initial value problem for the parabolic regularization of a first order non hyperbolic system*, accepted for publication in Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [4] L. SAINSAULIEU : *Traveling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative*, SIAM journal of Applied Math., vol 55, No 6, pp 1552-1576 (1995).
- [5] C. BERTHON and F. COQUEL : *A convection-diffusion system with first and second order in nonconservative form. Part 1 : Existence of traveling wave solutions*, in preparation
- [6] L. SAINSAULIEU and P.A. RAVIART : *A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 2. Existence of traveling waves solutions*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [7] D. SERRE, **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).
- [8] Y. A. KUZNETSOV, **Elements of applied bifurcation theory**, Applied mathematical sciences, Vol 112, Springer (1995).
- [9] V.C. PATEL, W. RODI and G. SCHEUERER : *Turbulence models for near wall and low Reynolds number flows : Review*, AIAA Journal, Vol 23, No 9 (1992).
- [10] C. BERTHON and F. COQUEL : in preparation
- [11] C. BERTHON : Ph.D. thesis, Université Paris VI.
- [12] V. COUAILLER, *Numerical simulation of separated turbulent flows based on rans/low Reynolds two equations model*, AIAA paper, 37th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (1999).

Chapitre 4

Résolution numérique de systèmes convectif-dissipatif avec premier et second ordre sous forme non conservative

Résolution numérique de systèmes convectif-dissipatif avec premier et second ordre sous forme non conservative

Les développements proposés dans cette troisième partie du mémoire répondent point par point aux motivations de l'introduction générale. Nous renvoyons le lecteur à la description de ces motivations.

Avertissement

En raison de la forme répétitive des techniques de démonstrations mises en jeu, certaines preuves ne sont pas données ou partiellement et font simplement appel aux démonstrations précédentes. En conséquence, la lecture des différentes sections ne peut être faite indépendamment des autres. Nous donnons donc, à présent, la structure du présent travail :

1	Produits non conservatifs et Opérateurs de projection L^2	103
1.1	Modèle mathématique et systèmes équivalents	104
1.2	Non équivalence discrète des systèmes (1.1), (1.3) et (1.4)	110
1.3	Quelques propriétés de convexité	111
1.4	Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.3)	113
1.5	Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.4)	118
1.6	Mise en oeuvre numérique	120
2	Modèle de fluides à deux lois de pression	125
2.1	Modèle mathématique	126
2.2	Quelques propriétés du système (2.5)	127
2.3	Systèmes équivalents	134
2.4	A propos des conductivités thermiques	143
2.5	Preuve du lemme de convexité 2.4	144
3	Condition de compatibilité avec la relation de saut généralisée	151
3.1	Equations et inéquations pour les solutions discrètes	153
3.2	Conditions de consistance et condition de compatibilité	157
4	Schéma classique	165

4.1	Premier pas : Opérateur du second ordre ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)	165
4.2	Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$)	166
4.3	Troisième pas : Prise en compte du “terme source” ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)	168
5	Méthode de type Godunov par projection L^2	171
5.1	Premier pas : Opérateur dissipatif extrait ($t^n \rightarrow t^{n+1,-}$)	171
5.2	Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)	175
5.3	Mise en oeuvre numérique	185
6	Méthodes de type Godunov par projection nonlinéaire	191
6.1	Donnée initiale et projection nonlinéaire	192
6.2	Une méthode de type Godunov par projection nonlinéaire	197
6.3	Une autre méthode de type Godunov par projection nonlinéaire	210
6.4	Approximation numérique des termes de conductivité thermiques	219
6.5	Mise en oeuvre numérique	225
7	Résultats numériques pour les modèles à deux lois de pression	231
8	Applications aux modèles de turbulence compressible homogène isotrope	239
8.1	Préambule aux modèles de turbulence dits à “deux équations de transport”	240
8.2	Trois modèles de turbulence compressible homogène isotrope	247
8.3	Propriétés d’équivalence des modèles	250
8.4	Schéma par projection nonlinéaire	253
8.5	Résultats numériques	261
A	Construction des ondes simples	271
B	Raideur numérique des termes de relaxation	277
	Bibliographie	281
	Résultats numériques	285

Section 1

Produits non conservatifs et Opérateurs de projection L^2

1 Produits non conservatifs et Opérateurs de projection L^2

Ce chapitre peut être compris comme un préambule aux développements exposés ci-après et constituant la réelle motivation de l'ensemble de ce travail. Ce chapitre n'est pas destiné au lecteur familier de l'analyse numérique des méthodes de type Godunov.

Nous nous livrons ici délibérément à ce que chacun qualifiera, et avec raison, d'hérésie. Nous proposons, en effet, d'approcher les solutions onde progressive des équations de Navier-Stokes en faisant choix comme variable d'évolution respectivement de l'entropie spécifique puis de la pression et ce au détriment de l'énergie totale. L'hérésie consiste, “bien entendu”, à ne pas faire choix de la loi de conservation sur l'énergie totale pour lui préférer des lois d'évolution impliquant plusieurs produits non conservatifs.

Pourtant, l'hérésie n'est pas si immédiate puisque nous vérifierons que les systèmes introduits sont équivalents au système Navier-Stokes sous forme conservative pour une classe de solutions certes restrictives (C^2 par morceaux) mais qui suffit à notre propos puisque comprenant précisément les solutions onde progressive sur lesquelles se concentre notre intérêt numérique.

Si hérésie il y a, elle doit dès lors surgir à l'occasion de la discrétisation de chacun de ces systèmes équivalents. Nous montrerons, en effet, que l'approche la plus classique, *i.e.* par projection L^2 , conduit aux mêmes difficultés que celles exhibées lors de l'analyse numérique consacrée à l'équation de Burgers avec viscosité : les erreurs engendrées par l'opérateur de projection L^2 s'opposent ici à la conservation de l'énergie totale. L'énergie totale, comprise comme une fonction des inconnues, sera en effet montrée être une fonction (strictement) décroissante du temps d'où une erreur L^1 qui va s'amplifiant avec le temps pour devenir rapidement inacceptable à un niveau de raffinement donné. Nous illustrerons numériquement ce fait.

Afin de convaincre chacun que l'hérésie est bien l'application d'un opérateur de projection L^2 en présence de produits non conservatifs, rappelons ici deux contributions consacrées à des systèmes hyperboliques non linéaires. Même si le problème qui nous préoccupe n'est pas *stricto sensu* hyperbolique, les difficultés d'ordre numérique restent toutefois étroitement liées, sinon les mêmes, pour la simple raison que les ondes progressives sont dans la pratique sous résolues au niveau discret, leur représentation discrète tenant bien plus de la capture des solutions onde de choc associées. Vouloir décrire avec plus de points les profils discrets, ainsi obtenus, devient rapidement irréaliste dès que le nombre de Reynolds est grand. Il en est ainsi typiquement du présent travail.

Dans la première contribution, P. Le Floch et T. P. Liu [39] établissent la convergence de la méthode de Glimm appliquée à un système hyperbolique sous forme non conservative (fermé par la théorie des produits non conservatifs proposée par Dal Maso-Le Floch-Murat [13]), alors que P. Le Floch et T. Hou [32] prouvent la non-convergence d'un schéma sous forme non conservative dans le contexte scalaire et qui peut être réinterprété en terme de

projections L^2 . Précisons que la méthode de Glimm (voir Serre [12] par exemple) est par construction exempte de toute opération de projection.

Dans la seconde contribution que nous rapportons ici, A. Y. Leroux et A. Noussair [38] utilisent délibérément une formulation non conservative des équations d'Euler isentropiques pour en obtenir un bénéfice substantiel au niveau discret mais en abandonnant l'opérateur linéaire de projection L^2 pour un opérateur de projection nonlinéaire restaurant la conservation discrète des inconnues.

L'hérésie apparaît, en définitive, être entièrement liée à l'application d'opérateurs de projection L^2 en présence de produits non conservatifs en conduisant à la perte d'équivalence au niveau discret entre chacune des formulations retenues.

Soulignons, enfin, que le choix des variables d'évolution (la pression ou l'entropie spécifique) ici retenue au titre de la définition de systèmes équivalents au système Navier-Stokes n'est pas gratuit. En effet, nous retrouverons, et cette fois de manière incontournable, ce même type de variable d'évolution dans le contexte d'un système Navier-Stokes à deux températures, lui vraiment non conservatif.

Dans un souci de simplicité, une seule dimension d'espace est considérée mais les extensions multidimensionnelles sont immédiates en vertu de l'invariance par rotation des équations (cf. Godlewski-Raviart [29]).

1.1 Modèle mathématique et systèmes équivalents

Nous considérons un gaz parfait caractérisé par sa masse volumique ρ , sa vitesse u et une pression p supposée suivre une loi de gaz caloriquement parfait. En négligeant la conductivité thermique par souci de simplicité, l'écoulement est dès lors régi par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = \partial_x (\mu \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u = \partial_x (\mu u \partial_x u), \end{cases} \quad (1.1)$$

avec pour loi de fermeture thermodynamique

$$p(\mathbf{u}) = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} \right), \quad \gamma > 1. \quad (1.2)$$

La viscosité laminaire, notée μ , est supposée être une constante positive non nulle.

En désignant par $\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, \rho E)$, l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \quad \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} > 0 \right\}.$$

Avec des notations classiques, le système (1.1) trouve la forme conservative suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \partial_x (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}).$$

Afin d'illustrer notre propos, deux changements de variable reposant respectivement sur l'entropie spécifique et sur la pression sont proposés. De tels changements de variable conduisent à des lois d'évolution impliquant, contrairement au système (1.1), des produits non conservatifs du premier ordre (*i.e.* impliquant l'inconnue et ses dérivées premières) et du second ordre (*i.e.* impliquant l'inconnue et ses dérivées secondes, ou ce qui est équivalent pour les solutions régulières, l'inconnue et des produits de dérivées premières).

Lemme 1.1

(i) Considérons le changement de variable $\mathbf{v} = \Psi(\mathbf{u})$ défini par

$$T(\rho, \rho u, \rho E) \rightarrow T(\rho, \rho u, \rho S) \quad \text{avec} \quad S = \mathcal{F}(s) \quad \text{et} \quad s = \frac{p(\mathbf{u})}{\rho^\gamma},$$

où l'application $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée $\mathcal{C}^2$ strictement monotone. Notons $\Omega_S = \Psi(\Omega)$ défini par

$$\Omega_S = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \quad \rho > 0, \quad \rho u \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\rho S}{\rho}\right) > 0 \right\}.$$

Supposons $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ solution de (1.1) alors la fonction $\mathbf{v} = \Psi(\mathbf{u}) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega_S)$ est solution du système suivant et réciproquement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = \partial_x (\mu \partial_x u), \\ \partial_t \rho S + \partial_x \rho S u = \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

(ii) Considérons le changement de variable $\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{u})$ défini par

$$T(\rho, \rho u, \rho E) \rightarrow T(\rho, \rho u, p).$$

Notons $\Omega_p = \Phi(\Omega)$ défini par

$$\Omega_p = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3; \quad \rho > 0, \quad \rho u \in \mathbb{R}, \quad p > 0 \right\}.$$

Supposons $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ solution de (1.1) alors la fonction $\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{u}) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega_p)$ est solution du système suivant et réciproquement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = \partial_x (\mu \partial_x u), \\ \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1) p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.2

Notons que contrairement à la règle d'usage en mathématiques appliquées, nous avons fait choix de $s = \frac{p(\mathbf{u})}{\rho^\gamma}$ et non de son inverse. Un tel choix est ici dicté ainsi que dans toute la suite, par le souci d'alléger l'écriture des bilans d'entropie. En effet, le choix habituel conduirait clairement à

$$\partial_t \rho \tilde{S} + \partial_x \rho \tilde{S} u = -\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} (\mathcal{F}^{-1}(\tilde{S}))^2 \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{S})) \mu (\partial_x u)^2, \quad \text{avec} \quad \tilde{S} = \mathcal{F}\left(\frac{\rho^\gamma}{p(\mathbf{u})}\right).$$

Remarque 1.3

Nous rappelons que l'application $\mathbf{u} \rightarrow \rho \mathcal{F}(p(\mathbf{u})/\rho^\gamma)$ est strictement convexe, respectivement concave, si et seulement si l'application $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{G}(\ln(x)) = \mathcal{F}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

vérifie

$$\mathcal{G}(y)' < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{G}''(y)}{\mathcal{G}'(y)} < \frac{1}{\gamma}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

respectivement

$$\mathcal{G}(y)' > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{G}''(y)}{\mathcal{G}'(y)} < \frac{1}{\gamma}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Nous renvoyons le lecteur au lemme 2.20 établi à la section 2.5.

Démonstration du Lemme 1.1

Il résulte de la relation (1.2) que les solutions régulières de (1.1) à valeur dans Ω satisfont l'équation non conservative suivante :

$$\partial_t p + u \partial_x p + \gamma p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2, \quad (1.7)$$

ainsi que

$$\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0. \quad (1.8)$$

En désignant par $s = p/\rho^\gamma$ l'entropie spécifique, il est classique que (1.7) et (1.8) conduisent à

$$\partial_t s + u \partial_x s = \frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \mu (\partial_x u)^2.$$

Le système (1.3) est ainsi déduit.

L'équivalence des trois systèmes, (1.1), (1.3) et (1.4), pour des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ à valeur dans Ω est immédiate. ■

L'existence et l'unicité, à une translation près, des solutions onde progressive des équations de Navier-Stokes (1.1) s'obtiennent par des arguments classiques (cf. Gilbarg [27] par exemple). La régularité de telles solutions permet alors l'application du Lemme 1.1. En conséquence, les solutions onde progressive des systèmes (1.1), (1.3) et (1.4) coïncident.

Notre principale motivation réside dans la comparaison numérique des solutions onde progressive discrètes que nous associerons aux trois systèmes équivalents.

Toutefois et ainsi que nous l'illustrons numériquement ci-après, il est nécessaire d'affaiblir les hypothèses de régularité considérées au Lemme 1.1 de manière à étendre la notion d'équivalence des systèmes considérés à des solutions discontinues. Le système (1.1) admet

en effet des solutions discontinues naturelles : les discontinuités de contact. Il est dès lors important de vérifier d'une part que les systèmes (1.3) et (1.4) gardent un sens pour de telles solutions bien qu'ils n'admettent pas de formulation faible classique et d'autre part qu'ils n'admettent pas d'autres solutions.

Ici et dans toute la suite de ce travail, nous considérons une famille de solutions plus large que nous disons être $\mathcal{C}^2$ par morceaux (voir Godlewski-Raviart [29] pour le cadre $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

Définition 1.4

Une fonction $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ est dite $\mathcal{C}^2$ par morceaux si il existe un nombre fini de surfaces régulières Σ ne se croisant pas dans le plan (x, t) telles que $\mathbf{u}$ est $\mathcal{C}^2$ hors de Σ et telles que les fonctions $\mathbf{u}$ et $\partial_x \mathbf{u}$ admettent des limites bornées à gauche et à droite en tout point de Σ . En désignant par $\mathbf{n} = {}^T(n_t, n_x)$ une normale à Σ , nous notons

$$X_{\pm}(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} X(t \pm \delta n_t, x \pm \delta n_x), \quad \forall (x, t) \in \Sigma.$$

Nous supposons, de plus, que les surfaces de discontinuité Σ admettent une paramétrisation de la forme $(t, \zeta(t))$ où $\zeta : t \rightarrow \zeta(t)$ est une fonction continûment différentiable. En conséquence, l'application $n_x : (x, t) \rightarrow n_x(x, t)$ est toujours non nulle.

Fort de cette classe de fonctions, le Lemme 1.1 peut être étendu de la façon suivante :

Théorème 1.5

Les systèmes (1.1), (1.3) et (1.4) sont équivalents pour les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ par morceaux à valeur dans Ω respectivement Ω_S, Ω_p . De plus, les discontinuités éventuelles vérifient nécessairement

$$u_- = u_+ \quad \text{et} \quad p_- - p_+ = \mu(\partial_x u)_- - \mu(\partial_x u)_+,$$

et le saut de densité est arbitraire. Elles sont donc associées à des discontinuités de contact de vitesse de propagation $\sigma = u_- = u_+$.

Démonstration du Théorème 1.5

Le Lemme 1.1 assure l'équivalence des trois systèmes considérés pour les solutions régulières de classe $\mathcal{C}^2$. Il suffit donc d'assurer l'équivalence de ces systèmes à la traversée d'une surface de discontinuité, notée Σ .

Commençons dans un premier temps par caractériser les discontinuités éventuelles des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (1.1).

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ séparé par Σ en deux composantes connexes ω_- et ω_+ . Le champ de vecteur normal à Σ , unitaire et dirigé vers ω_- est noté $\mathbf{n}$. Le champ de vecteur normal à $\partial\omega_{\pm}$, unitaire et sortant est noté $\mathbf{n}_{\pm}$. Par construction, le long de Σ , nous avons

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+.$$

Soit $\mathbf{u}$ une solution faible de (1.1) supposée de classe $\mathcal{C}^2$ dans ω_- et ω_+ . Les traces de $\mathbf{u}$, respectivement $\partial_t \mathbf{u}$, $\partial_x \mathbf{u}$, sur Σ sont notées $\mathbf{u}_-$ et $\mathbf{u}_+$, respectivement $(\partial_t \mathbf{u})_-$ et $(\partial_t \mathbf{u})_+$, $(\partial_x \mathbf{u})_-$ et $(\partial_x \mathbf{u})_+$.

En conséquence, la viscosité laminaire μ étant constante, l'application du Théorème de Green, respectivement sur ω_- et ω_+ où $\mathbf{u}$ est solution forte de (1.1), permet d'établir que, pour toute fonction test φ à support compact sur ω , les relations suivantes sont satisfaites :

$$\int_{\Sigma} ([\rho]n_t + [\rho u]n_x) \varphi \, d\zeta = 0, \quad (1.9.i)$$

$$\int_{\Sigma} \left([\rho u]n_t + \left[\frac{(\rho u)^2}{\rho} + p \right] n_x - [\mu \partial_x u] n_x \right) \varphi \, d\zeta + \int_{\Sigma} \mu [u] n_x \partial_x \varphi \, d\zeta = 0, \quad (1.9.ii)$$

$$\int_{\Sigma} ([\rho E]n_t + [(\rho E + p)u]n_x - [\mu u \partial_x u] n_x) \varphi \, d\zeta + \int_{\Sigma} \mu \left[\frac{u^2}{2} \right] n_x \partial_x \varphi \, d\zeta = 0, \quad (1.9.iii)$$

où $[X] = X_+ - X_-$ désigne le saut de la quantité X à travers la surface de discontinuité Σ .

Il ressort de (1.9.ii) que la vitesse est nécessairement continue à la traversée d'une surface de discontinuité :

$$[u] = 0.$$

En effet, il suffit de considérer les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ qui s'annulent sur Σ avec une dérivée non nulle.

En notant, pour tout point de Σ ,

$$\frac{n_t}{n_x} = -\sigma \quad \text{et} \quad M = \rho(u - \sigma),$$

les identités (1.9) devant être satisfaites pour toute fonction test φ impliquent alors clairement :

$$[M] = 0, \quad (1.10.i)$$

$$M[u] + [p] = [\mu \partial_x u], \quad (1.10.ii)$$

$$M\left[\frac{\rho E}{\rho}\right] + [pu] = [\mu u \partial_x u]. \quad (1.10.iii)$$

Deux cas doivent alors être distingués, soit $M = 0$ soit $M \neq 0$.

Si $M = 0$, il est immédiat que loin du vide : $u_- = u_+ = \sigma$. En conséquence, la discontinuité de l'application $\mathbf{u}$ est caractérisée par

$$\rho_-, \rho_+ \text{ quelconques}, \quad u_- = u_+ = \sigma \quad \text{et} \quad p_+ - p_- = \mu(\partial_x u)_+ - \mu(\partial_x u)_-. \quad (1.11)$$

Si $M \neq 0$, puisque u et M sont nécessairement continues à la traversée de Σ , il en résulte que

$$\rho_- = \rho_+ \quad \text{et} \quad (\rho u)_- = (\rho u)_+. \quad (1.12)$$

Les identités (1.10) impliquent alors

$$[p] - [\mu \partial_x u] = 0, \quad (1.13.i)$$

$$\frac{M}{\rho_L} [\rho E] + u_L ([p] - [\mu \partial_x u]) = 0. \quad (1.13.ii)$$

Nous déduisons, de (1.13.i) et (1.13.ii), la continuité de ρE à la traversée d'une surface de discontinuité. Ainsi la solution est nécessairement continue dès que $M \neq 0$.

En conséquence, les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux de (1.1) ne peuvent admettre de discontinuités non triviales que pour $M = 0$ et vérifient alors (1.11).

En procédant de façon similaire pour le système (1.3), la formulation faible des équations régissant la densité et la quantité de mouvement trouvent les expressions (1.9.i) et (1.9.ii). Il en résulte de nouveau que la vitesse est nécessairement continue à la traversée d'une surface de discontinuité :

$$u_- = u_+.$$

En conséquence, le terme $(\partial_x u)^2$, présent dans l'équation gouvernant l'entropie ρS , est une fonction, possiblement discontinue en Σ , mais bornée par hypothèse. Nous en déduisons dès lors la formulation faible suivante :

$$\int_{\omega} \left(\rho S \partial_t \varphi + \rho S u \partial_x \varphi + \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2 \varphi \right) dt dx = 0.$$

Puisque $\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2$ est une fonction (*i.e.* ne charge pas la discontinuité), l'application de la formule de Green, respectivement sur ω_- et ω_+ où $\mathbf{u}$ est régulière, permet alors d'écrire

$$\int_{\Sigma} ([\rho S] n_t + [\rho S u] n_x) \varphi d\zeta = 0.$$

Cette identité assure que

$$M[S] = 0.$$

Une discussion identique à la précédente montre que seule $M = 0$ conduit à des discontinuités non triviales pour lesquelles (1.11) est satisfaite.

En conséquence, les systèmes (1.1) et (1.3) sont équivalents pour les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

L'équivalence des systèmes (1.1) et (1.4) s'obtient de manière entièrement analogue en remarquant que le produit $(\gamma-1)p\partial_x u$ est nécessairement une fonction et qu'en conséquence la relation de saut

$$M\left[\frac{p}{\rho}\right] = 0,$$

est trivialement satisfaite car nécessairement $M = 0$ dans le cas d'une discontinuité non triviale. ■

Ces résultats d'équivalence entre les systèmes (1.1), (1.3) et (1.4) autorisent la résolution numérique de (1.3) ou (1.4) dans le but d'obtenir une approximation des solutions de (1.1). Nous décrivons ci-dessous les algorithmes classiques retenus et comparons les profils discrets obtenus par résolution numérique des trois systèmes équivalents.

1.2 Non équivalence discrète des systèmes (1.1), (1.3) et (1.4)

Nous nous intéressons, ici, à l'approximation numérique des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux, introduites Définition 1.4, des équations de Navier-Stokes. Le Théorème 1.5 assure, pour de telles solutions, l'équivalence des formulations conservatives (1.1) et non conservatives (1.3) et (1.4). Notre principale motivation réside dans l'étude de la validité de ce résultat d'équivalence pour les solutions discrètes. Plus précisément, nous montrons qu'un tel résultat d'équivalence est généralement perdu pour les solutions approchées construites en adoptant une approche par projections L^2 .

S'il est bien entendu que la forme conservative (1.1) du système doit être préférée, l'analyse que nous proposons permet de mettre en évidence les difficultés numériques liées à la nature non conservative du système (1.3). De telles difficultés seront retrouvées dans les sections suivantes dédiées à des extensions du système de Navier-Stokes.

La principale difficulté est d'assurer la conservation de l'énergie totale pour les solutions discrètes associées à (1.3) ou (1.4). Nous mettons en évidence l'existence de deux sources d'erreurs systématiques et distinctes :

- (i) erreur L^2 de projection de la solution discrète,
- (ii) erreur L^2 de représentation des dérivées de la solution discrète.

Décrivons de manière heuristique, l'origine de ces erreurs dans le contexte du système équivalent (1.3).

La première erreur (i) a pour origine la projection L^2 de l'entropie ρS et non de l'énergie totale ρE . Elle est, bien entendu, liée au fait que les solutions onde de choc des systèmes du premier ordre extrait respectivement de (1.1) et de (1.3) sont **distinctes** et que les applications

$$T(\rho, \rho u, \rho S) \rightarrow (\rho E, (\rho E + p)u)$$

et

$$T(\rho, \rho u, \rho E) \rightarrow (\rho S, \rho S u)$$

jouent **respectivement** le rôle d'entropie de Lax sous les hypothèses habituelles de convexité (voir ci-après).

La discrétisation de l'opérateur de second ordre semble cruciale puisque cet opérateur est à l'origine du résultat d'équivalence énoncé dans le Théorème 1.5. Nous mettons en évidence qu'une représentation discrète de $\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu(\partial_x u)^2$ s'accompagne, généralement, d'une erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes venant s'additionner à

(i). Ceci motivera l'introduction de formules aux différences finies exemptes de cette dernière erreur, la première erreur (i) apparaissant inévitable dans le cadre d'une stratégie de projection L^2 (*i.e.* purement linéaire).

Notons que l'erreur (i) semble, à la vue de nos expériences numériques rapportées ci-après, décroître avec $\Delta x \times \text{Reynolds}$. Toutefois, un tel contrôle est de peu d'utilité pratique lorsque le nombre de Reynolds est grand.

1.3 Quelques propriétés de convexité

Pour des raisons numériques qui apparaîtront clairement par la suite, nous énonçons ici des propriétés de convexité liant entre elles les grandeurs thermodynamiques ρE et ρS ainsi que la pression p , lorsque celles-ci sont comprises comme fonction des inconnues.

Lemme 1.6

Supposons l'application $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaire (1.5) de sorte que l'application

$$(\rho, \rho u, \rho E) \rightarrow \{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E),$$

où $(\rho, \rho u, \rho E) \in \Omega$, définie par

$$\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} \right) \right),$$

est strictement convexe et vérifie le principe de monotonie suivant :

$$\partial_{\rho E} \{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E) \leq 0.$$

De plus, l'application

$$(\rho, \rho u, \rho S) \rightarrow \{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S),$$

définie par

$$\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right),$$

existe et est strictement convexe.

Démonstration du Lemme 1.6

La convexité de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E)$ implique par définition la validité de l'inégalité suivante pour toute paire d'états $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ dans Ω^2 :

$$\begin{aligned} & \{\rho S\}(\rho_R, (\rho u)_R, (\rho E)_R) - \{\rho S\}(\rho_L, (\rho u)_L, (\rho E)_L) \leq \\ & \partial_\rho \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) + \partial_{\rho u} \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho u)_R - (\rho u)_L) + \partial_{\rho E} \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho E)_R - (\rho E)_L), \end{aligned}$$

cette inégalité étant généralement stricte en vertu de la stricte convexité. Réécrivons l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} & -\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho E)_R - (\rho E)_L) \leq \\ & \partial_{\rho}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) + \partial_{\rho u}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho u)_R - (\rho u)_L) - (\{\rho S\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de stricte monotonie sur $\mathcal{F}$ assure que l'application $\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S)$ est bien définie et qu'en outre nous avons le principe de monotonie suivant valable loin du vide :

$$\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}) = \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(\frac{\rho S}{\rho})) < 0.$$

Il en résulte dès lors de (1.14) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & ((\rho E)_R - (\rho E)_L) \leq \\ & -\frac{\partial_{\rho}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}(\rho_R - \rho_L) - \frac{\partial_{\rho u}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}((\rho u)_R - (\rho u)_L) + \frac{\{\rho S\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}, \end{aligned}$$

où l'on peut comprendre désormais ρS en tant que variable et l'énergie totale ρE en tant que fonction de $(\rho, \rho u, \rho S)$ puisque

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial_{\rho}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)} = \partial_{\rho}\{\rho E\}(\rho_L, (\rho u)_L, (\rho S)_L), \\ & -\frac{\partial_{\rho u}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)} = \partial_{\rho u}\{\rho E\}(\rho_L, (\rho u)_L, (\rho S)_L), \\ & \frac{1}{\partial_{\rho E}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)} = \partial_{\rho S}\{\rho E\}(\rho_L, (\rho u)_L, (\rho S)_L). \end{aligned}$$

Nous concluons donc à la stricte convexité de l'application $\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S)$. ■

Par ailleurs, nous avons

Lemme 1.7

Avec des notations claires, l'application

$$(\rho, \rho u, p) \rightarrow \{\rho E\}(\rho, \rho u, p),$$

définie par

$$\{\rho E\}(\rho, \rho u, p) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{p}{\gamma-1},$$

est convexe.

Démonstration du Lemme 1.7

Puisque $\{\rho E\}(\rho, \rho u, p)$ est la somme de deux applications trivialement convexes, il en résulte de façon immédiate la conclusion attendue. ■

1.4 Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.3)

Nous présentons ici succinctement une approche de pas fractionnaires associée à la discrétisation du système (1.3). Nous détaillons les deux pas de la méthode en exhibant, à l'issue de chaque pas, les erreurs L^2 mises en avant lors de l'introduction à la présente partie.

Ici et dans toute la suite, nous faisons choix par souci de simplicité d'une discrétisation uniforme du temps et de l'espace obtenue par la donnée d'un pas de temps constant Δt et d'un pas d'espace constant Δx . Nous utiliserons des notations entièrement classiques dans le contexte de méthodes de volumes finis et ainsi nous ne les rappellerons pas (cf. Godlewski-Raviart [29] pour le choix de ces notations).

Premier pas : Opérateur dissipatif extrait ($t^n \rightarrow t^{n+1,-}$)

Supposons connue à la date t^n la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, choisie constante par morceaux. Nous proposons d'approcher la solution du problème de Cauchy :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (1.15.i)$$

$$\partial_t \rho u = \partial_x (\mu \partial_x u), \quad (1.15.ii)$$

$$\partial_t \rho S = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2, \quad (1.15.iii)$$

associé la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, à l'aide d'une discrétisation aux différences finies consistante. Celle-ci est choisie implicite en temps afin de s'affranchir d'une limitation de type CFL trop contraignante.

Considérons pour tout $i \in Z$:

$$\rho_i^{n+1,-} = \rho_i^n, \quad (1.16.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1,-} = (\rho u)_i^n + \Delta t \overline{\partial_x (\mu \partial_x u)}_i^{n+1,-}, \quad (1.16.ii)$$

$$(\rho S)_i^{n+1,-} = (\rho S)_i^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2}_i^{n+1,-}, \quad (1.16.iii)$$

où les opérateurs aux différences finies impliqués trouvent les expressions consistantes suivantes :

$$\overline{\partial_x (\mu \partial_x u)}_i^{n+1,-} = \mu \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1,-} - 2u_i^{n+1,-} + u_{i-1}^{n+1,-}), \quad (1.17.i)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2}_i^{n+1,-} &= \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^n)^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S_i^{n+1,-})) \mu_\tau \\ &\quad \frac{1}{2\Delta x^2} ((u_{i+1}^{n+1,-} - u_i^{n+1,-})^2 + (u_i^{n+1,-} - u_{i-1}^{n+1,-})^2). \end{aligned} \quad (1.17.ii)$$

Il importe de noter que (1.17.i) préserve la propriété de conservation de l'opérateur exact concerné. De plus, la formule (1.17.ii) possède bien, et toujours, le signe de $\mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S))$.

La densité ρ demeurant inchangée, les équations discrètes (1.16.ii) se trouvent être découplées des autres. Dans la pratique et donc en présence de conditions aux limites, il s'agit de résoudre un problème (matriciel) symétrique défini positif en l'inconnue $u^{n+1,-}$. Ici et donc pour le problème où i parcourt Z en entier, nous ne cherchons pas à énoncer des conditions assurant l'existence de $u^{n+1,-}$ et nous l'admettons. L'inconnue $(\rho S)_i^{n+1,-}$ est ensuite explicitement donnée par (1.16.iii).

A l'issue de ce premier pas, nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.8

En adoptant les formules aux différences finies (1.17), la solution discrète $\mathbf{v}_i^{n+1,-}$ vérifie le bilan d'énergie suivant :

$$\{\rho E\}(\mathbf{v}_i^{n+1,-}) - (\rho E)_i^n = -\mathcal{E}_{d_i}^n + \Delta t \overline{\partial_x(\mu u \partial_x u)}_i^{n+1,-}, \quad (1.18)$$

où nous avons utilisé la formule aux différences finies consistante :

$$\overline{\partial_x(\mu u \partial_x u)}_i^{n+1,-} = \mu \frac{1}{2\Delta x^2} \left((u_{i+1}^{n+1,-})^2 - 2(u_i^{n+1,-})^2 + (u_{i-1}^{n+1,-})^2 \right), \quad (1.19)$$

et où le terme d'erreur $\mathcal{E}_{d_i}^n$ est explicitement donné par

$$\mathcal{E}_{d_i}^n = \left\{ \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-}) - \mathbf{v}_h(x, t^n), \overline{\nabla^2 \{\rho E\}} \left(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-}) - \mathbf{v}_h(x, t^n) \right) \right\} \geq 0.$$

Dans le produit scalaire précédent la valeur moyenne de la hessienne d'énergie totale est définie par :

$$\overline{\nabla^2 \{\rho E\}} = \int_0^1 \nabla^2 \{\rho E\} \left(y \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-}) + (1-y) \mathbf{v}_h(x, t^n) \right) y(1-y) dy. \quad (1.20)$$

Remarque 1.9

Il importe de noter que la formule aux différences finies (1.17) est consistante avec l'opérateur exact concerné et en préserve la propriété de conservation. Il faut dès lors comprendre le bilan d'énergie (1.18) comme réalisant une approximation de la loi de conservation

$$\partial_t \rho E = \partial_x(\mu u \partial_x u),$$

mais ceci à une erreur près $\mathcal{E}_{d_i}^n$ qui, en général, est strictement positive en vertu de la stricte convexité de l'énergie totale établie au Lemme 1.6. Une telle erreur fait perdre au niveau discret la propriété de conservation de l'énergie totale, sa norme L^1 devant une fonction strictement décroissante du temps. Nous appellerons dans la suite une telle erreur : **erreur L^2 de représentation des dérivées de la solution discrète.**

Démonstration du Lemme 1.8

Le bilan d'énergie discret s'écrit clairement à l'issue du premier pas :

$$\{\rho E\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho S)_i^{n+1,-}) - \{\rho E\}(\rho_i^n, (\rho u)_i^n, (\rho S)_i^n).$$

En invoquant la convexité de l'application $\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S)$ établie au Lemme 1.6, écrivons pour $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$:

$$\begin{aligned} & \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^n)) - \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) = \\ & \nabla \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) \cdot (\mathbf{v}_h(x, t^n) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) + \\ & \left\{ \mathbf{v}_h(x, t^n) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -}), \overline{\nabla^2 \{\rho E\}} (\mathbf{v}_h(x, t^n) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) \right\}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

où dans le produit scalaire précédent nous avons introduit la valeur moyenne de la hessienne :

$$\overline{\nabla^2 \{\rho E\}} = \int_0^1 \nabla^2 \{\rho E\} (y \mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -}) + (1-y) \mathbf{v}_h(x, t^n)) y(1-y) dy. \quad (1.22)$$

Cette dernière matrice est symétrique définie positive en vertu de la stricte convexité de l'application $\{\rho E\}$. Le dernier terme de l'identité (1.21) n'est autre que $\mathcal{E}_{di}^n$ qui est donc (strictement) positif.

En arguant de

$$\begin{aligned} & \nabla \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) \cdot (\mathbf{v}_h(x, t^n) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) = \\ & -u_i^{n+1, -}((\rho u)_i^n - (\rho u)_i^{n+1, -}) + \partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) \times ((\rho S)_i^n - (\rho S)_i^{n+1, -}), \end{aligned} \quad (1.23)$$

avec

$$\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})) = \frac{(\rho_i^n)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{\mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S_i^{n+1, -}))},$$

un calcul direct conduit à :

$$\begin{aligned} & -u_i^{n+1, -}((\rho u)_i^n - (\rho u)_i^{n+1, -}) + ((\rho S)_i^n - (\rho S)_i^{n+1, -}) = \\ & -\mu \Delta t \frac{1}{2\Delta x^2} \left((u_{i+1}^{n+1, -})^2 - 2(u_i^{n+1, -})^2 + (u_{i-1}^{n+1, -})^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($\mathfrak{t}^{n+1, -} \rightarrow \mathfrak{t}^{n+1}$)

La solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})$, définie à l'instant $t^{n+1, -}$, étant constante par morceaux, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (1.24.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \quad (1.24.ii)$$

$$\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u = 0, \quad (1.24.iii)$$

associé au choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, -})$. Ici nous avons fait choix d'une fonction $\mathcal{F}$ particulière satisfaisant les hypothèses (1.5) pour définir la variable

$$\rho S = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p(\mathbf{u})}{\rho^\gamma} \right).$$

Les solutions discontinues du précédent système sont, ici, sélectionnées par les conditions d'entropie suivantes :

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u \leq 0. \quad (1.25)$$

Rappelons, en effet, que l'énergie totale vérifie une loi de conservation supplémentaire pour les solutions régulières de (1.24) et qu'en outre comprise comme une fonction des inconnues de (1.24) elle est en vertu du Lemme 1.6 strictement convexe. Le couple $(\rho E, (\rho E + p)u)$ constitue donc par définition un couple d'entropie de Lax. Tous les couples non triviaux sont obtenus en considérant (avec un certain abus de langage)

$$\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \Psi \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) \right),$$

où Ψ vérifie des conditions *ad hoc*, que nous ne précisons pas, assurant la convexité de la précédente application. Il est dès lors naturel de sélectionner les solutions discontinues de (1.24) par les inégalités d'entropie de Lax (1.25).

Désignons par $\mathbf{v}(x, t)$ la solution faible entropique de (1.24)-(1.25), constituée, pour des temps suffisamment petits, de la juxtaposition sans interaction de la solution, notée $w(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})$, des problèmes de Riemann posés à chaque interface.

Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_i(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}, \quad (1.26)$$

définissons les valeurs moyennes pour $i \in Z$:

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{v}(x, \Delta t) dx. \quad (1.27)$$

Ce second et dernier pas conclut la description de l'algorithme.

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u\}_{i+1/2}^{n+1,-}, \quad (1.28.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u^2 + p\}_{i+1/2}^{n+1,-} + \Delta t \overline{\partial_x (\mu \partial_x u)}_i^{n+1}, \quad (1.28.ii)$$

$$(\rho S)_i^{n+1} = (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^{n+1,-} + \Delta t \overline{\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} \mathcal{F}'(\mathcal{F}^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2}_i^{n+1}, \quad (1.28.iii)$$

où Δ_i trouve la définition suivante :

$$\Delta_i X = X_{i+1} - X_i.$$

Ici, et par exemple pour (1.28.i), la fonction flux numérique coïncide avec celle de Godunov

$$\{\rho u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = \{\rho u\}(w(0^+; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})).$$

Au terme de ce dernier pas, nous avons avec des notations claires le résultat suivant :

Lemme 1.10

Sous la condition CFL (1.26), l'inégalité d'énergie précisée suivante a lieu :

$$(\rho E)(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho S)_i^{n+1}) - (\rho E)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{(\rho E + p)u\}_{i+1/2}^{n+1, -} - \Delta t \overline{\partial_x(\mu u \partial_x u)}_i^n = -\mathcal{E}_i^n - \mathcal{E}_{d_i}^n, \quad (1.29)$$

où nous avons posé

$$\mathcal{E}_i^n = -\{\rho E\}(\mathbf{v}_i^{n+1}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho E\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx - \sum_{\text{chocs}} (-\sigma[\rho E] + [(\rho E + p)u]) \geq 0.$$

Ici, σ désigne la vitesse de propagation des solutions onde de choc éventuellement présentes dans le volume de contrôle $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t^n, t^{n+1})$.

Remarque 1.11

Le nouveau terme d'erreur $\mathcal{E}_i^n$ est appelé dans la suite : **erreur de projection L^2** . Deux contributions à ce terme d'erreur doivent être distinguées. La première résulte de la résolution du problème de Riemann (1.24) où ρE joue le rôle d'une entropie de Lax. La seconde résulte de l'opération de projection L^2 des variables d'évolution ρ , ρu et ρS . En vertu de la stricte convexité de l'énergie totale, comprise comme une fonction de ces variables, l'inégalité de Jensen assure que cette dernière contribution est, en général, strictement positive. En conséquence, l'erreur $\mathcal{E}_i^n$ s'additionne bien à l'erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes et ne peut en aucun cas la compenser.

Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat qui s'obtient de manière classique, par exemple lors de la démonstration de la consistance du schéma de Godunov avec toutes les inégalités d'entropie ([29]).

Nous ne démontrons pas ici que l'algorithme proposé préserve en réalité la positivité des grandeurs concernées. Nous renvoyons pour cela le lecteur aux prochaines sections où nous établirons de tels résultats de positivité sous la condition CFL (1.26) pour un système d'EDP généralisant le système (1.3). Les preuves que nous proposerons s'adaptent ici immédiatement.

En conséquence de ces résultats de positivité et du signe des erreurs exhibées survenant à chaque pas de temps, la norme L^1 de l'énergie totale est une fonction (strictement) décroissante du temps et ce contrairement à la propriété de conservation exigée. Soulignons, simplement, qu'à cette propriété de conservation est associée la condition de saut de Rankine-Hugoniot portant sur l'énergie totale. L'énergie totale étant non conservée au niveau discret, la relation de saut attendue ne peut en aucun cas être vérifiée.

Par ailleurs, il ne peut résulter de la propriété de décroissance en temps établie qu'une erreur numérique s'amplifiant avec le temps. Les exemples numériques, que nous montrons dans cette section, illustreront qu'une telle erreur devient rapidement inacceptable à un niveau de raffinement donné.

1.5 Méthode de projection L^2 pour le système équivalent (1.4)

Nous décrivons ici une approche de pas fractionnaires associée à la discrétisation du système (1.4). Cette approche est constituée de deux pas, le premier pas coïncidant avec celui adopté dans le contexte du système équivalent (1.3). A l'issue de ce premier pas, l'algorithme proposé conduit donc à une erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes. Nous décrivons ci-dessous le second pas et exhibons l'erreur L^2 consécutive à la projection linéaire de la variable de pression.

Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)

La solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})$, définie à l'instant $t^{n+1,-}$, étant constante par morceaux, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (1.30.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \quad (1.30.ii)$$

$$\partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1)p \partial_x u = 0, \quad (1.30.iii)$$

associé au choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})$. Les solutions du système hyperbolique (1.30) sont en général discontinues. Il s'avère que les discontinuités de type choc conduisent le produit $p \partial_x u$ à être ambigu au sens des distributions (cf. [2] et voir également dans les sections suivantes). Notre propos n'est pas ici de donner un sens à ce produit et nous renvoyons pour cela le lecteur à Dal Maso-Le Floch-Murat [13]. Il ressort de ces travaux qu'il est possible de donner un sens à cette dernière équation pour des solutions discontinues assurant l'**équivalence** du système ainsi défini et du système Euler 3×3 conservatif dans un cadre (à préciser) de solutions faibles incluant les solutions du problème de Riemann.

Ce résultat d'équivalence nous assure qu'il suffit de considérer la solution du problème de Riemann associé au système habituel

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (1.31.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \quad (1.31.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u = 0, \quad (1.31.iii)$$

fermé par les inégalités d'entropie usuelles.

Soulignons, bien entendu, que l'opération de projection L^2 doit ici porter sur ρ , ρu et p et non sur les variables d'évolution ρ , ρu et ρE où nous avons par construction l'identité suivante vraie presque partout :

$$p(x, \Delta t) = (\gamma - 1) \left((\rho E)(x, \Delta t) - \frac{((\rho u)(x, \Delta t))^2}{2\rho(x, \Delta t)} \right). \quad (1.32)$$

L'opération de projection L^2 de ρ , ρu et p conduit à définir sous la condition CFL (1.26) :

$$\rho_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx, \quad (\rho u)_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\rho u)(x, \Delta t) dx,$$

et

$$p_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(x, \Delta t) dx.$$

Ce qui conclut l'algorithme.

Il résulte de ces formules qu'au terme de ce second et dernier pas :

Lemme 1.12

Sous la condition CFL (1.26), l'inégalité d'énergie précisée suivante a lieu :

$$\begin{aligned} & (\rho E)(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, p_i^{n+1}) - (\rho E)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ (\rho E + p)u \}_{i+1/2}^{n+1} - \Delta t \overline{\partial_x (\mu u \partial_x u)}_i^n = \\ & -\tilde{\mathcal{E}}_i^n - \mathcal{E}_{d_i}^n, \end{aligned}$$

où par construction

$$(\rho E)(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \geq 0$$

et où le terme d'erreur trouve la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{E}}_i^n = -\frac{((\rho u)_i^{n+1})^2}{2\rho_i^{n+1}} + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{(\rho u)^2(x, \Delta t)}{2\rho(x, \Delta t)} dx \geq 0.$$

Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat qui s'obtient aisément à partir du Lemme 1.7 et de la formule définition (1.32).

Notons que, là encore, l'opération de projection L^2 d'une variable non conservative s'accompagne d'une erreur en général strictement positive en raison de la convexité de l'application $(\rho u)^2/(2\rho)$. Les erreurs L^2 , exhibées au Lemme 1.12, survenant à chaque pas de temps, impliquent que la norme L^1 de l'énergie totale est une fonction (strictement) décroissante du temps et ce contrairement à la propriété de conservation attendue. Il ne peut en résulter qu'une erreur numérique allant s'amplifiant avec le temps.

Les lemmes 1.10 et 1.12 respectivement consacrés aux systèmes (1.3) et (1.4) assurent que les solutions discrètes que nous leur avons associés par projection L^2 sont distinctes des solutions discrètes que nous aurions obtenu en discrétisant le système (1.1) : ces dernières solutions conservent nécessairement l'énergie totale. En ce sens l'équivalence des systèmes (1.3) et (1.4) avec (1.1) est perdue au niveau discret.

1.6 Mise en oeuvre numérique

Nous illustrons ici numériquement la stratégie de projection L^2 que nous avons associée à la discrétisation du système (1.3).

Afin d'éviter le calcul d'un problème de Riemann à chaque interface, et par souci de consistance avec les développements numériques proposés ultérieurement, nous utilisons une linéarisation de Roe. La méthode de Roe, ici considérée, peut être comprise comme un cas particulier de la méthode de Roe que nous développerons dans le contexte des équations de Navier-Stokes à deux pressions et nous renvoyons le lecteur aux sections concernées pour les détails.

Par ailleurs, nous avons utilisé lors du premier pas dédié à l'approximation de l'opérateur du second ordre une stratégie aux différences finies que nous introduirons par la suite et qui présente l'avantage d'annuler l'erreur L^2 de représentation des dérivées de la solution discrètes (au sens de la remarque 1.9). Dans ce test, seule subsiste l'erreur de projection L^2 survenant lors de la discrétisation de l'opérateur du premier ordre extrait.

Nous considérons ici l'approximation numérique de la solution du problème de Cauchy (1.3) associée à la donnée initiale suivante :

$$\begin{array}{lll} \rho_L = 1 & u_L = 2 & p_L = 0.014550672 \\ \rho_R = 20 & u_R = 0.05 & p_R = 0.96455067 \end{array}$$

pour un nombre de Reynolds de 10^3 .

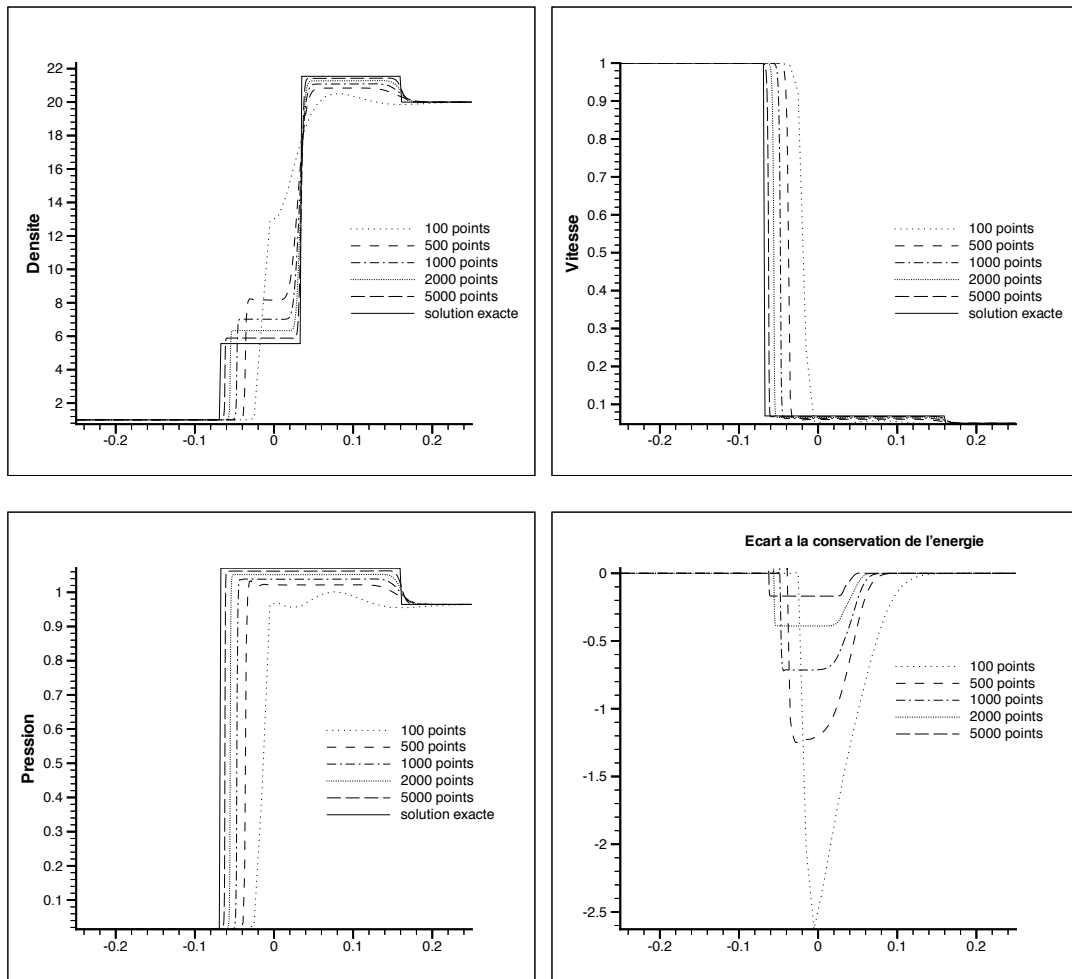
Lorsqu'une telle donnée initiale est associée au système du premier ordre extrait de (1.3) et non de (1.1) (rappelons que ces systèmes hyperboliques ne sont pas équivalents pour les solutions discontinues), la solution du problème de Riemann obtenue correspond à un 1-choc stationnaire alors que la solution du problème de Riemann associé au système (1.1) est composée de trois ondes simples.

Nous avons choisi ce test dans un souci de validation informatique. En effet, la méthode de Roe est connue pour capturer exactement les chocs stationnaires et nous avons vérifié cette propriété en faisant choix d'une viscosité nulle pour le système (1.3).

La solution exacte rapportée sur la figure 4.1 n'est autre que la solution du problème de Riemann associée au système (1.1). La décomposition en trois ondes simples doit dès lors être engendrée par le terme de dissipation sous forme non conservative présent dans (1.3).

La figure 4.1 présente la solution numérique de (1.3) pour différents niveaux de raffinement. Notons que l'erreur numérique décroît avec le pas d'espace. Toutefois, il importe de souligner que cette erreur, petite au temps considéré et pour un niveau de raffinement élevé, va se dégrader pour des temps ultérieurs. Enfin, le niveau de raffinement requis à l'instant considéré est beaucoup trop élevé pour que la méthode présentée trouve un intérêt pratique.

Il nous a semblé utile sinon nécessaire de rapporter de tels résultats qui prendront


 FIG. 4.1 - *Solution discrète du système (1.3) pour différents niveaux de raffinement*

leur véritable importance dans les sections suivantes où les équations d'évolution non conservatives sur une pression ou une entropie spécifique ne pourront pas être évitées.

Section 2

Modèle de fluides à deux lois de pression

2 Modèle de fluides à deux lois de pression

Nous considérons dans cette section une extension naturelle des équations de Navier-Stokes usuelles à un modèle de fluide à une vitesse moyenne et à deux pressions (ou encore à deux températures). Il serait préférable de désigner un tel modèle par celui d'un fluide à deux entropies spécifiques mais nous ne dérogerons pas à une règle *a priori* établie. Ainsi que nous le verrons, un tel modèle, et par opposition avec les équations de Navier-Stokes usuelles, n'admet pas sans hypothèse de modélisation restrictive de formulation équivalente complètement conservative dans le cadre de solutions régulières. En ce sens, le système d'EDP nonlinéaire le gouvernant est sous forme vraiment non conservative. Il implique des produits non conservatifs du premier ordre (*i.e.* entre l'inconnue et ses dérivées premières) ainsi que du second ordre (*i.e.* entre l'inconnue et ses dérivées secondes, ou encore entre l'inconnue et des produits de dérivées premières).

Ce modèle peut être compris comme une version simplifiée des systèmes de convection-diffusion régissant les modèles de turbulence compressibles communément qualifiés de modèles à deux lois de transport. La simplification apportée ici résulte de l'hypothèse de constance des viscosités et des conductivités thermiques. Les modèles de turbulence font l'objet des prochains chapitres mais ils partagent tous avec le présent système simplifié une difficulté générique : l'approximation numérique des solutions onde progressive associées. Due précisément à la nature vraiment non conservative des équations considérées, la perte d'équivalence discrète résultant de l'usage d'opérateurs de projection L^2 , telle qu'illustrée dans la précédente section, prendra ici toute son importance.

Notre objectif est ici d'étendre les éléments d'analyse numérique succinctement introduits lors de la précédente section au présent contexte pour mettre en évidence la nécessité d'une condition de compatibilité discrète dont l'introduction deviendra naturelle dès la fin de cette section. La satisfaction de cette condition de compatibilité motivera l'introduction d'un opérateur de projection nonlinéaire, élément clef d'une méthode d'approximation dont l'illustration numérique soulignera le bien fondé.

Répondant à la structure de la précédente section, les développements que nous proposons ici visent à définir plusieurs familles de systèmes équivalents dans la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux : en l'occurrence trois familles. L'importance et les différences qu'entretiennent chacune des familles considérées seront discutées et nous serons conduit à privilégier de manière naturelle l'une de ces trois familles en la rapprochant d'une condition de saut généralisée que nous préciserons. Soulignons par ailleurs que la restriction des résultats d'équivalence énoncés à la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux nous autorise bien l'accès aux solutions onde progressive, de première importance dans nos illustrations numériques, puisque nous donnerons des résultats d'existence en conséquence des études réalisées dans Berthon-Coquel [16], [17].

Le lecteur pourra enfin être surpris de notre acharnement à vouloir définir chacune des familles de systèmes équivalents en invoquant systématiquement des changements de variable qui assureront des propriétés de convexité pour des fonctions privilégiées de ces

mêmes variables. De telles applications seront montrées conduire à des couples d'entropie de Lax pour le système du premier ordre extrait. Cette notion est certes étrangère au présent contexte puisque nous ne ferons jamais tendre simultanément les deux viscosités (ainsi que les conductivités) vers zéro. Là encore, pour des raisons exclusivement d'ordre numérique, nous aurons besoin de propriétés de convexité et nous commettrons l'abus de langage (toutefois précisée en temps utile, cf. remarques 2.11 et 2.12) de continuer à appeler de tels couples : couples d'entropie de Lax.

2.1 Modèle mathématique

Nous considérons un modèle de fluide caractérisé par sa masse volumique ρ , sa vitesse moyenne u et deux pressions, notées p et p_τ et associées à deux coefficients adiabatiques constants, respectivement γ et γ_τ avec $\gamma > 1$ et $\gamma_\tau > 1$. Le modèle de fluide considéré est régi par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1) p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2 + (\gamma - 1) (\partial_x \kappa \partial_x T), \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1) p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\gamma_\tau - 1) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau), \end{cases} \quad (2.1)$$

où les températures impliquées trouvent les définitions suivantes : $T = p/\rho$ et $T_\tau = p_\tau/\rho$.

Il est important de noter que les équations composant le précédent système seront **toujours supposées être sous forme adimensionnée**. Il s'ensuit donc que les notations μ , μ_τ , κ et κ_τ désignent respectivement de nombres de Reynolds et des nombres de Prandtl. Par abus de langage, nous continuerons à les appeler viscosités et conductivités thermiques puisque que nous continuerons à appeler les inconnues par leur dénomination dimensionnée.

Ici et afin d'illustrer notre propos, les viscosités, notées μ et μ_τ , ainsi que les conductivités thermiques, notées κ et κ_τ , sont supposées être des constantes réelles positives. Nous supposons dans toute la suite que les viscosités μ et μ_τ ne sont **jamais** simultanément toutes deux nulles.

Nous proposons ci-dessous ce qui peut être compris comme un dictionnaire de formules satisfaites par les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ du système (2.1) et utiles à l'établissement de certains résultats laissés au lecteur. Nous les donnons sans démonstration car leur obtention est aisée à partir de la forme donnée aux EDP composant le système (2.1).

Les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de (2.1) vérifient loin du vide les équations sous forme non conservative suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho = 0, \\ \rho (\partial_t u + u \partial_x u) + \partial_x p + \partial_x p_\tau = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t p + \gamma p \partial_x u + u \partial_x p = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2 + (\gamma - 1) (\partial_x \kappa \partial_x T), \\ \partial_t p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u + u \partial_x p_\tau = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\gamma_\tau - 1) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau). \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous avons dès lors classiquement en introduisant les entropies spécifiques

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}},$$

les lois d'évolution symétriques suivantes :

$$\partial_t s + u \partial_x s = \frac{(\gamma - 1)}{\rho^\gamma} \left\{ \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \kappa \partial_x T) \right\}, \quad (2.3.i)$$

$$\partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau = \frac{(\gamma_\tau - 1)}{\rho^{\gamma_\tau}} \left\{ \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau)) \right\}. \quad (2.3.ii)$$

Il importe alors de noter l'identité suivante déduite des deux précédentes relations et qui jouera un rôle central dans les développements menés ci-après

$$\begin{aligned} \mu_\tau \times \frac{\rho^\gamma}{(\gamma - 1)} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} - \mu \times \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{(\gamma_\tau - 1)} \{ \partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau \} = \\ \partial_x (\mu_\tau \kappa \partial_x T - \mu \kappa_\tau \partial_x T_\tau), \end{aligned} \quad (2.4)$$

valable sous l'hypothèse de constance des viscosités μ et μ_τ .

Grâce à la forme conservative trouvée par le membre de gauche de la précédente identité, nous mènerons l'exposé des propriétés des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (2.1) sous l'hypothèse simplificatrice $\kappa = \kappa_\tau = 0$. Cette hypothèse n'est pas à proprement parler restrictive ainsi que nous le verrons à la fin de cette section mais elle autorise de fait la mise en évidence de la principale difficulté liée à l'approximation numérique des solutions de (2.1) sans la dénaturer et ce tout en simplifiant de manière substantielle l'écriture des équations proposées ci après. Nous nous concentrons donc dans la suite sur les propriétés du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1) p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2, \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1) p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \end{cases} \quad (2.5)$$

pour revenir au système complet (2.1) à la fin de la présente section.

2.2 Quelques propriétés du système (2.5)

L'énergie totale du fluide considéré est définie par le résultat suivant, dont la démonstration repose sur un calcul direct, exploitant la symétrie et le découplage des lois d'évolution sur les pressions :

Lemme 2.1

Les solutions régulières de (2.5) satisfont la loi de conservation suivante :

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \quad (2.6)$$

où ρE , énergie totale du gaz, est définie par la loi d'état :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} + \frac{(\rho u)^2}{2\rho}. \quad (2.7)$$

En notant $\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, p, p_\tau)$, l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, p > 0, p_\tau > 0 \right\}.$$

Le système (2.5) trouve la forme condensée suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \partial_x (\mathbf{D}_0(\mathbf{u}) \partial_x(\mathbf{u})) + (\partial_x \mathbf{u} | \mathbf{D}_1(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}), \quad (2.8)$$

où la forme développée (2.5) donne l'expression des applications $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$. L'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est définie par le produit contracté.

Dans un premier temps, nous énonçons les principales propriétés du système du premier ordre extrait de (2.5).

Lemme 2.2

(i) Le système du premier ordre extrait de (2.5) :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

est hyperbolique sur Ω . Il admet les valeurs propres

$$u - c, \quad u, \quad u + c \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{\gamma_\tau p_\tau}{\rho}.$$

Les valeurs propres $u \pm c$ sont simples et associées à des champs vraiment nonlinéaires tandis que la valeur propre u est double et associée à des champs linéairement dégénérés.

(ii) Les quantités u et $p + p_\tau$ sont conservées à la traversée d'une discontinuité associée aux champs linéairement dégénérés.

(iii) Les solutions régulières du système (2.9) satisfont, outre (2.6) avec $\mu = \mu_\tau = 0$, les lois de conservation supplémentaires :

$$\partial_t U(\mathbf{u}) + \partial_x F(\mathbf{u}) = 0, \quad U(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p}{\rho^\gamma}, \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}} \right), \quad F(\mathbf{u}) = u U(\mathbf{u}),$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une application régulière.

Nous omettons, ici, la preuve de ce résultat qui s'obtient aisément à partir des formules (2.2) et (2.3) (cf. Serre [12] et Godlewski-Raviart [28], [29] dans le cadre de la dynamique des gaz).

Les solutions régulières du système hyperbolique extrait (2.9) satisfont ainsi une infinité de lois de conservation non triviales. Trois classes de lois doivent être distinguées pour l'importance centrale qu'elles trouveront dans les développements menés ci-après.

Ces classes relèvent respectivement de la conservation de l'énergie totale ρE , de la conservation de l'entropie $\rho g(s)$ avec $s = \frac{p}{\rho^\gamma}$ et de son homologue $\rho h(s_\tau)$ où $s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}$. Ici, h et g désignent deux fonctions régulières précisées dans la suite.

Rappelons simplement que la conservation simultanée de la densité, du débit et de ces trois lois ne vaut, en général, que pour les solutions régulières du système extrait (2.9). Le devenir de ces lois pour les solutions éventuellement discontinues du système complet (2.5) fait l'objet de la prochaine section mais nous devons dès à présent préciser quelques propriétés algébriques les liant.

Dans ce but, imposons ici et dans toute la suite (sauf mention explicite du contraire) les deux types de conditions suivantes sur les fonctions h et g . En désignant par f l'une d'entre elles :

$$(H_1): \quad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \text{ strictement } \mathbf{décroissante} \text{ et vérifie pour } \alpha = \max(\gamma, \gamma_\tau)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} < -\frac{\alpha-1}{\alpha}x, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

ou

$$(H_2): \quad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \text{ strictement } \mathbf{croissante} \text{ et vérifie pour } \alpha = \max(\gamma, \gamma_\tau)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} < -\frac{\alpha-1}{\alpha}x, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Remarque 2.3

L'écriture des conditions (H₁) et (H₂) pourra surprendre mais nous n'avons pas voulu impliquer la composition habituelle par la fonction *log* (cf. Godlewsky-Raviart [29]), uniquement dans le souci de simplifier les expressions qui interviendront le plus fréquemment dans ce travail. Les inégalités rapportées dans (H₁), respectivement (H₂), expriment que la fonction f est dans les faits **convexe** (respectivement **concave**).

Sous ces hypothèses et en introduisant les notations

$$S = g(s) \quad \text{et} \quad S_\tau = h(s_\tau),$$

les propriétés de convexité suivantes ont lieu :

Lemme 2.4

Supposons $\gamma > 1$ et $\gamma_\tau > 1$.

(i) Supposons les fonctions g et h vérifier (H₁) ou (H₂), alors l'application $\{\rho E\} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec

$$\Omega_2 = \left\{ (\rho, \rho u, \rho S, \rho S_\tau) \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho S > 0, \rho S_\tau > 0 \right\},$$

définie par

$$\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S, \rho S_\tau) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) + \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \quad (2.10)$$

est convexe.

(ii) Supposons la fonction g satisfaire (H_1) et la fonction h vérifier (H_1) ou (H_2) , alors l'application $\{\rho S\} : \Omega_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec

$$\Omega_3 = \left\{ (\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \in \mathbb{R}^4; \right. \\ \left. \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) > 0, \rho S_\tau > 0 \right\},$$

définie par

$$\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) = \rho g \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \right) \right)$$

est convexe. Inversement si g satisfait (H_2) , alors cette même application est concave.

(iii) Supposons la fonction h satisfaire (H_1) et la fonction g vérifier (H_1) ou (H_2) , alors l'application $\{\rho S_\tau\} : \Omega_4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec

$$\Omega_4 = \left\{ (\rho, \rho u, \rho E, \rho S) \in \mathbb{R}^4; \right. \\ \left. \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) > 0, \rho S > 0 \right\},$$

définie par

$$\{\rho S_\tau\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S) = \rho h \left(\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau}} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) \right) \right)$$

est convexe. Inversement si h satisfait (H_2) , alors cette même application est concave.

Remarque 2.5

Notons que, puisque par hypothèse $\alpha = \max(\gamma, \gamma_\tau) > 1$, les hypothèses (H_1) et (H_2) excluent le choix pourtant naturel de la paire de fonctions $h = g = I_d$. Soulignons dès à présent que les hypothèses de convexité joueront un rôle central dans l'analyse numérique des méthodes d'approximation proposées dans les sections suivantes.

Remarque 2.6

Un abus de langage a été commis à l'occasion de l'énoncé de ce résultat de convexité puisqu'il aurait fallu, par exemple, indexer chacune des applications énergie totale $\{\rho E\}$, données par (2.10), par référence au choix d'un couple de fonctions (g, h) . Bien entendu, c'est par souci de simplicité que nous n'avons pas adopté une telle notation. Nous préciserons toutefois, lorsque cela deviendra nécessaire, la dépendance des applications concernées relativement à g et h .

La preuve de ce résultat technique est reportée à la section 2.5 où nous établirons en fait que les propriétés de convexité, respectivement concavité, sont en réalité strictes.

Puisque le système (2.9) est hyperbolique, ses solutions peuvent développer des discontinuités en temps fini. La forme non conservative du système (2.9) rend inopérante la théorie classique des distributions et nous renvoyons le lecteur à Dal Maso-LeFloch-Murat [13] et Colombeau-Leroux [14] pour la définition et l'étude des solutions discontinues pour des systèmes hyperboliques sous forme non conservative, à Raviart-Sainsaulieu [8] dans le cadre de modèles diphasiques et à Berthon-Coquel [16] dans le cadre du modèle (k, ϵ) .

Il faut distinguer parmi les discontinuités que peuvent exhiber les solutions de (2.5), les discontinuités associées aux champs linéairement dégénérés (*i.e.* pour la valeur propre double u) des discontinuités relevant des deux autres champs, eux vraiment nonlinéaires.

Nous appellerons les premières discontinuités *de contact* puisqu'en vertu de (ii) Lemme 2.2, $\sigma = u_L = u_R$, les secondes seront dites *de type choc*.

Notons que les discontinuités de contact ne conduisent à aucune ambiguïté dans les produits non conservatifs impliqués dans (2.9), *i.e.* $(\gamma - 1)p\partial_x u$ et $(\gamma_\tau - 1)p_\tau\partial_x u$: la vitesse est en effet nécessairement continue. Une telle propriété est perdue pour les discontinuités de type choc de sorte que les solutions onde de choc de (2.9) ne sont pas définies contrairement aux solutions onde de contact.

Notre propos étant l'approximation du système complet (2.5) et non des solutions du système extrait (2.9), nous précisons ci-dessous le devenir de ces discontinuités en présence des viscosités μ et μ_τ . Nous montrons en substance que les discontinuités de type choc de (2.9) sont régularisées et conduisent à des solutions onde progressive du système (2.5) et ce contrairement aux discontinuités de contact qui persistent. Les seules solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux naturellement discontinues associées à (2.5) seront encore dites solutions onde de contact par abus de langage et seront montrées ne conduire à aucune ambiguïté au sens des distributions dans les différents produits impliqués dans (2.5). Nous comprenons ici $\mathcal{C}^2$ par morceaux au sens de la définition 1.4.

Concernant les solutions onde de contact de (2.9), nous avons par une extension aisée du Théorème 1.5, laissée au lecteur :

Théorème 2.7

Soit $\mathbf{u}$ une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ par morceaux de (2.5). Les discontinuités éventuelles de $\mathbf{u}$ vérifient nécessairement

$$u_- = u_+ \quad \text{et} \quad (p_- + p_{\tau-}) - (p_+ + p_{\tau+}) = (\mu + \mu_\tau)(\partial_x u)_- - (\mu + \mu_\tau)(\partial_x u)_+, \quad (2.11)$$

et le saut de densité est arbitraire. Par ailleurs les identités suivantes sont simultanément satisfaites sans condition sur S_+ , S_- , $S_{\tau+}$ et $S_{\tau-}$:

$$-\sigma[\rho E] + [(\rho E + p + p_\tau)u] = [(\mu + \mu_\tau)u\partial_x u], \quad (2.12.i)$$

$$-\sigma[\rho S] + [\rho S u] = 0, \quad (2.12.ii)$$

$$-\sigma[\rho S_\tau] + [\rho S_\tau u] = 0, \quad (2.12.iii)$$

où $\sigma = u_- = u_+$ désigne la vitesse de propagation de la discontinuité de contact.

Soulignons simplement que la symétrie par rapport aux pressions des propriétés obtenues résulte du découplage des lois d'évolution sur les pressions.

Concernant les solutions onde progressive de (2.5), le résultat suivant assure qu'elles appartiennent à la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux :

Théorème 2.8

Supposons les viscosités μ et μ_τ non toutes deux nulles. Soit $\mathbf{u}_L \in \Omega$ un état donné et soit σ une constante réelle donnée supposés vérifier l'inégalité suivante :

$$\frac{u_L - \sigma}{c_L} > 1 \quad \text{avec} \quad c_L^2 = \frac{\gamma p_L}{\rho_L} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau L}}{\rho_L}. \quad (2.13)$$

Alors ils existent un unique état $\mathbf{u}_R \in \Omega$ et une solution régulière de (2.5) de la forme $\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(x - \sigma t)$ vérifiant

$$\lim_{x - \sigma t \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L \quad \text{et} \quad \lim_{x - \sigma t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_R.$$

Cette solution est unique à une translation près.

Symétriquement, soit $\mathbf{u}_R \in \Omega$ un état donné et soit σ une constante réelle donnée supposés vérifier l'inégalité suivante :

$$\frac{u_R - \sigma}{c_R} < -1 \quad \text{avec} \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R}{\rho_R} + \frac{\gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R}. \quad (2.14)$$

Alors ils existent un unique état $\mathbf{u}_L \in \Omega$ et une solution régulière de (2.5) de la forme $\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(x - \sigma t)$ vérifiant

$$\lim_{x - \sigma t \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L \quad \text{et} \quad \lim_{x - \sigma t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_R.$$

Cette solution est unique à une translation près.

Nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat qui peut être entendu comme un simple corollaire des travaux menés dans [16] où la viscosité μ_τ est variable. Précisons que le précédent théorème est vrai quelque soit les viscosités μ et μ_τ constantes dès que celles-ci sont non toutes deux nulles.

Nous soulignons maintenant une propriété partagée par les triplets $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$, exhibés au précédent théorème, et qualifiés dans la suite de relations de saut (pour une onde progressive). Cette propriété trouvera une conséquence fondamentale dans les prochaines sections dédiées à l'approximation numérique des solutions du système (2.5).

En raison des produits non conservatifs présents dans le système (2.5), les relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$, bien que parfaitement défini et univoque sous la condition (2.13)

ou (2.14), ne sont pas explicitement connues. En effet, sans hypothèse de modélisation supplémentaire, il n'est pas possible de les expliciter, par exemple, sous la forme :

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(\sigma; \mathbf{u}_L).$$

Toutefois, et ce point est crucial, les relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ ne dépendent que du rapport des viscosités μ et μ_τ et non des amplitudes respectives des viscosités μ et μ_τ , même si, bien entendu, la solution onde progressive en dépend. Cette propriété est à la base de travaux récents, consacré aux systèmes hyperboliques non conservatifs. Nous renvoyons le lecteur à Le Floch [2], Raviart-Sainsaulieu [8]. Bien que (2.5) ne soit pas un système hyperbolique, cette propriété est précisée étant donné l'importance centrale qu'elle occupe dans les développements menés ci-après.

Afin de préciser cette propriété, considérons la solution onde progressive $\hat{\mathbf{u}}(x - \sigma t)$ associée aux relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ et introduisons, après [2] et [8], la fonction

$$\mathbf{u}_\delta(x, t) = \hat{\mathbf{u}}\left(\frac{x - \sigma t}{\delta}\right),$$

où δ désigne un paramètre réel strictement positif.

Pour tout $\delta > 0$, $\mathbf{u}_\delta(x, t)$ est solution onde progressive du système (2.5) mais pour des viscosités μ^δ et μ_τ^δ données par :

$$\mu^\delta = \delta\mu, \quad \mu_\tau^\delta = \delta\mu_\tau,$$

et est associée aux mêmes relations de saut $(\sigma, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$.

Cette indépendance du profil visqueux par rapport au rescaling trouve la conséquence suivante dont une preuve peut être adaptée de [16] (voir également la remarque 2.16) :

Théorème 2.9

Considérons les relations de saut $(\sigma, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ au sens du théorème 2.8, définies pour des viscosités μ et μ_τ toutes deux non nulles. Alors nécessairement,

$$-\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \tag{2.15.i}$$

$$-\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p + p_\tau] = 0, \tag{2.15.ii}$$

$$-\sigma[\rho E] + [(\rho E + p + p_\tau)u] = 0, \tag{2.15.iii}$$

et nécessairement

$$-\sigma[\rho g(s)] + [\rho g(s)u] \neq 0, \tag{2.16.i}$$

$$-\sigma[\rho h(s_\tau)] + [\rho h(s_\tau)u] \neq 0. \tag{2.16.ii}$$

De manière à préciser (2.16), considérons pour tout $\delta > 0$, $\mathbf{u}_\delta$ une solution onde progressive rescalée associée aux relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$. Définissons avec des notations

claires :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{\rho}_\delta^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(\frac{(\widehat{\rho S})_\delta}{\rho_\delta}))} \left(\partial_t(\widehat{\rho S})_\delta + \partial_x(\widehat{\rho S} u)_\delta \right) (\xi) d\xi = \zeta, \quad (2.17)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{\rho}_\delta^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(\frac{(\widehat{\rho S}_\tau)_\delta}{\rho_\delta}))} \left(\partial_t(\widehat{\rho S}_\tau)_\delta + \partial_x(\widehat{\rho S}_\tau u)_\delta \right) (\xi) d\xi = \zeta_\tau. \quad (2.18)$$

Alors, les masses totales ζ et ζ_τ des bilans d'entropie concernés sont bornées et sont indépendantes du paramètre $\delta > 0$. De plus, elles ne dépendent pas du choix des fonctions h et g . Elles ne dépendent que des viscosités μ et μ_τ au travers de l'identité :

$$\mu_\tau \zeta(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mu \zeta_\tau(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R). \quad (2.19)$$

En paraphrasant ce résultat, les relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ peuvent être définies par les relations de saut (2.15.i), (2.15.ii), (2.15.iii) et par la relation de saut généralisée implicite (2.19). Il est immédiat que cette dernière relation ne dépend que du rapport des viscosités μ et μ_τ et qu'il en est donc de même pour $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$.

La relation de saut (2.19) ne peut, bien entendu, pas être explicitée plus avant mais moyennant des hypothèses de modélisation supplémentaires, nous en proposerons dans la prochaine section une forme explicite ainsi qu'un développement asymptotique en échelle du rapport des viscosités.

2.3 Systèmes équivalents

Fort de ces résultats, nous présentons trois changements de variable préservant les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux au sens de la Définition 1.4.

Le premier (i) utilise, de manière classique et naturelle, la loi de conservation de l'énergie totale exhibée au Lemme 2.1 et dont la conséquence est la relation de saut (2.15.iii). Choisir l'énergie totale au nombre des inconnues réduit ainsi le nombre d'équations non conservatives à une seule. Puisque (2.5) n'admet pas, sans hypothèse de modélisation supplémentaire, de formulation complètement conservative, les deux changements de variable (ii) et (iii) trouveront respectivement leur intérêt dans une formulation conservative de l'opérateur du premier ordre, respectivement une formulation conservative de l'opérateur du second ordre, directement motivée par la relation de saut généralisée (2.19).

Présentons tout d'abord les changements de variable (i) et (ii). L'équivalence pour les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux entre (2.5) et les systèmes résultants est une extension simple du Théorème 1.5 assurant pour ces derniers que la vitesse est nécessairement continue à la traversée d'une surface de discontinuité. Ils peuvent donc être compris sans ambiguïté au sens des distributions. Nous énonçons ainsi sans démonstration :

Lemme 2.10

Les deux systèmes suivants sont équivalents à (2.5) pour les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

(i) Soit l'application $\Psi_1 : \Omega \rightarrow \Psi_1(\Omega)$, définie par

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, p, p_\tau) \rightarrow \mathbf{v} = \Psi_1(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, p_\tau),$$

où ρE est définie par (2.7). En notant $\Omega_1 = \Psi_1(\Omega)$ défini par

$$\Omega_1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} > 0, p_\tau > 0 \right\},$$

si $\mathbf{u}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ par morceaux de (2.5), alors $\mathbf{v}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega_1)$ par morceaux du système suivant et réciproquement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1) p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2. \end{cases} \quad (2.20)$$

(ii) Soit l'application $\Psi_2 : \Omega \rightarrow \Psi_2(\Omega)$ définie par

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, p, p_\tau) \rightarrow \mathbf{v} = \Psi_2(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau),$$

où $S_\tau = h\left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}\right)$ avec $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction $\mathcal{C}^1$ strictement monotone. En notant $\Omega_2 = \Psi_2(\Omega)$ défini par

$$\Omega_2 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1}(S_\tau) > 0, \rho S_\tau > 0 \right\},$$

si $\mathbf{u}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ par morceaux de (2.5), alors $\mathbf{v}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega_2)$ par morceaux du système suivant et réciproquement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \mu_\tau h'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x u)^2. \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque 2.11

Il est important de noter que les changements de variable proposés dissymétrisent le rôle de l'entropie ρS qui doit être comprise comme une fonction des inconnues $(\rho, \rho u, \rho E, p_\tau)$ pour le premier et $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ pour le second. En conséquence des lois d'évolutions

gouvernant les inconnues considérées, cette fonction satisfait sans ambiguïté et sans condition supplémentaire la loi d'évolution suivante :

$$\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u = \frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \mu g'(g^{-1}(S)) (\partial_x u)^2.$$

Sous les hypothèses du lemme de convexité 2.4, le couple $(\rho S, \rho S u)$ peut être compris comme un couple d'entropie de Lax mais pour lequel le bilan d'entropie est non seulement signé puisque sa valeur est en réalité ici **imposé**.

Cette constatation simple trouve une conséquence centrale dans les méthodes numériques exposées ci-après, entièrement liée à la nature non conservative du problème.

Remarque 2.12

Il est bien entendu possible de faire jouer, sous les hypothèses du lemme de convexité 2.4, un rôle dual soit à l'entropie ρS_τ soit à l'énergie ρE pour définir autant de changements de variables préservant les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux de (2.5). Le dernier choix conduit, dès lors, le couple d'entropie de Lax $(\rho E, (\rho E + p + p_\tau)u)$ à devoir satisfaire un bilan d'entropie **imposé**, à savoir conservatif, ce que nous avons vu être irréaliste au niveau discret lors de la section 1.

Le troisième changement de variable (iii), que nous introduisons ci-dessous, évite toute dissymétrie entre les quantités thermodynamiques ρE , ρS et ρS_τ . Son écriture est *a priori* ambiguë au sens des distributions. Afin de lever cette ambiguïté, nous adoptons la définition des produits non conservatifs de Dal Maso, LeFloch et Murat [13]. Nous ne rappelons pas dans le détail cette définition désormais classique et renvoyons pour cela le lecteur à [13].

Faisons donc choix d'une famille fixe de chemins $\Phi : [0, 1] \times \Omega_3^2 \rightarrow \Omega_3$ avec

$$\Omega_3 = \left\{ (\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \in \mathbb{R}^4; \right. \\ \left. \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1}(S_\tau) > 0, h^{-1}(S_\tau) > 0 \right\}.$$

Cette famille Φ est choisie sous la forme $(\Phi_\rho, \Phi_{\rho u}, \Phi_{\rho E}, \Phi_{\rho S_\tau})$ où chacun des chemins Φ_X , avec des notations claires, est supposé Lipschitz et satisfaire les conditions de consistance :

- 1) $\Phi_X(0; X_-, X_+) = X_-$ et $\Phi_X(1; X_-, X_+) = X_+$ pour tous les X_-, X_+ concernés,
- 2) $\Phi_X(\xi; X, X) = X$ pour tout $\xi \in [0, 1]$ et tout X ,

ainsi que

$$3) \frac{\Phi_{\rho u}(\xi; \rho_- u, \rho_+ u)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)} = u \text{ pour tout } \xi \text{ dans } [0, 1], \rho_-, \rho_+ > 0 \text{ et } u \in \mathbb{R}.$$

Une telle famille vérifie les hypothèses (H₁)-(H₃) énoncées dans [13]. Soient deux états $\mathbf{u}_-$ et $\mathbf{u}_+$ pris dans un compact K de Ω_3^2 . Suivant ces auteurs, nous définissons à la

traversée d'une discontinuité éventuelle $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$ de vitesse de propagation σ , le produit non conservatif suivant par la mesure :

$$[G(\mathbf{u})(\partial_t \rho H(\mathbf{u}) + \partial_x \rho H(\mathbf{u})u)]_\Phi(x, t) = \int_0^1 \Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+) G(\Phi(\xi; \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)) \times \\ \left(-\sigma \frac{\partial H}{\partial \xi}(\Phi(\xi; \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)) + \frac{\Phi_{\rho u}(\xi; (\rho u)_-, (\rho u)_+)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)} \frac{\partial H}{\partial \xi}(\Phi(\xi; \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)) \right) d\xi \delta_{\{x=\sigma t\}}, \quad (2.22)$$

où G et H désignent deux applications suffisamment régulières de Ω_3 à valeur dans $\mathbb{R}$.

En désignant par $\mathbf{u}$ une solution régulière de (2.5) et en remarquant l'identité suivante :

$$G(\mathbf{u})(\partial_t \rho H(\mathbf{u}) + \partial_x \rho H(\mathbf{u})u) = \rho G(\mathbf{u})(\partial_t H(\mathbf{u}) + u \partial_x H(\mathbf{u})),$$

nous assurons la consistance de la précédente définition.

Armés de celle-ci, nous pouvons alors énoncer

Lemme 2.13

Soit l'application $\Psi_3 : \Omega \rightarrow \Psi_3(\Omega)$ définie par

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, p, p_\tau) \rightarrow \mathbf{v} = \Psi_3(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau),$$

où $S_\tau = h\left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}\right)$ avec $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction $\mathcal{C}^1$ strictement monotone. Notant $\Omega_3 = \Psi_3(\Omega)$ défini par

$$\Omega_3 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1}(S_\tau) > 0, \rho S_\tau > 0 \right\}.$$

Posons

$$S = g\left(\frac{p(\mathbf{v})}{\rho^\gamma}\right), \quad p(\mathbf{v}) = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1}(S_\tau) \right),$$

où $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ satisfaisant (H_1) ou (H_2) .

Alors, si $\mathbf{u}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ par morceaux de (2.5), alors $\mathbf{v}$ est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \Omega_3)$ par morceaux du système suivant et réciproquement :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.23.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (2.23.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \quad (2.23.iii)$$

$$\left[\frac{\rho^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \frac{\mu}{h'(h^{-1}(\frac{\rho S_\tau}{\rho}))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi - \\ \left[\frac{\rho^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} \frac{\mu_\tau}{g'(g^{-1}(\frac{\rho S}{\rho}))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) \right]_\Phi = 0, \quad (2.23.iv)$$

et ce indépendamment du choix de la famille de chemins Φ définissant les produits concernés

Avant de donner la preuve de ce résultat d'équivalence, les remarques suivantes s'imposent.

Remarque 2.14

La propriété d'indépendance relativement à Φ , énoncée ci-dessus, doit être rapprochée des identités (2.12.ii) et (2.12.iii) vérifiées sans condition à la traversée d'une discontinuité de contact. Elle est donc naturellement attendue.

Notons par ailleurs que nous aurions dû écrire la loi d'évolution (2.23.iv) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu + \mu_\tau} \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \frac{1}{h'(h^{-1}(\frac{\rho S_\tau}{\rho}))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi - \\ \frac{\mu_\tau}{\mu + \mu_\tau} \left[\frac{\rho^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} \frac{1}{g'(g^{-1}(\frac{\rho S}{\rho}))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) \right]_\Phi = 0. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Puisque nous ne feront jamais tendre les deux viscosités μ et μ_τ simultanément vers zéro, leur rapport étant fixé, nous avons privilégié la première écriture dans un souci de simplicité.

Remarque 2.15

Il importe de noter que, contrairement à (2.21) et par extension toutes autres formulations conduisant soit ρE , soit ρS , soit ρS_τ à être exclue du système d'équations et donc à jouer le rôle d'une entropie de Lax sous les hypothèses du lemme de convexité 2.4, il est possible de comprendre tour à tour ρS , puis ρS_τ , puis en réalité ρE comme fonction des inconnues sans jamais modifier la forme de (2.23). La dissymétrie observée dans la définition de Ψ_3 n'est donc qu'artificielle.

La dernière EDP (2.23.iv) peut, dès lors, être comprise **non comme l'imposition** d'un bilan de création d'entropie soit à $(\rho S, \rho S u)$ soit au couple $(\rho S_\tau, \rho S_\tau u)$, puisque leur rôle est symétrique, mais comme **l'imposition** d'une vitesse comparée (au sens des dérivées particulières) de création d'entropie.

Démonstration du Lemme 2.10

Nous montrons qu'à la traversée d'une surface de discontinuité, notée Σ , les solutions discontinues non triviales de (2.23) sont caractérisées par (2.11).

Un raisonnement similaire à celui mené sur les équations de Navier-Stokes (1.1) dans la démonstration du Théorème 1.5 assure que les équations régissant la densité ρ , la quantité de mouvement ρu et l'énergie totale ρE conduisent à des solutions discontinues non triviales si et seulement si (2.11) est satisfait.

En conséquence, il reste à étudier l'équation

$$\frac{\rho^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \mu \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) - \frac{\rho^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} \mu_\tau \frac{1}{g'(g^{-1}(S))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) = 0, \quad (2.25)$$

à la traversée d'une surface de discontinuité et à établir qu'elle est satisfaite, dans un sens à préciser, sous les conditions (2.11).

Appliquons la définition (2.22) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h'(h^1(\frac{\rho S_\tau}{\rho}))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi = \\ & \int_0^1 \frac{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau-1} \mu \frac{1}{h'(h^1(\frac{\Phi_{\rho S_\tau}(\xi; (\rho S_\tau)_-, (\rho S_\tau)_+)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)}))} \left(-\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\Phi_{\rho S_\tau}(\xi; (\rho S_\tau)_-, (\rho S_\tau)_+)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Phi_{\rho u}(\xi; (\rho u)_-, (\rho u)_+)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\Phi_{\rho S_\tau}(\xi; (\rho S_\tau)_-, (\rho S_\tau)_+)}{\Phi_\rho(\xi; \rho_-, \rho_+)} \right) d\xi \delta_{\{x=\sigma t\}}. \end{aligned}$$

La continuité de u à la traversée d'une surface de discontinuité implique

$$\sigma = u_- = u_+.$$

Il résulte alors de la condition de consistance 3) sur les chemins Φ :

$$\left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h'(h^1(S_\tau))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi = 0, \quad (2.26)$$

et ce quelque soit le choix de la famille de chemin Φ . De même, nous avons

$$\left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g'(g^{-1}(S))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) \right]_\Phi = 0, \quad (2.27)$$

pour toute famille de chemin Φ . En conséquence, les solutions discontinues non triviales de (2.23) sont caractérisées par (2.11).

Ces identités et leur indépendance par rapport à Φ doivent, bien entendu, être rapprochées des relations de saut (2.12.ii) et (2.12.iii) satisfaites à la traversée d'une discontinuité. ■

Remarque 2.16

Les solutions régulières de (2.5) vérifient

$$\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h'(h^{-1}(\frac{\rho S_\tau}{\rho}))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) = \mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u), \quad (2.28)$$

car $S_\tau = h(s_\tau)$. De même, les solutions régulières de (2.5) vérifient

$$\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g'(g^{-1}(\frac{\rho S}{\rho}))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) = \mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u), \quad (2.29)$$

car $S = g(s)$. Ces relations sont satisfaites pour toutes fonctions g et h vérifiant (H_1) ou (H_2) . En conséquence, l'équation (2.23.iv) s'identifie à

$$\mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) - \mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) = 0,$$

qui lorsque spécialisée au cas d'une solution onde progressive, solution régulière de (2.5), conduit à :

$$\mu \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) \right) (\xi) d\xi - \mu_\tau \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) \right) (\xi) d\xi = 0,$$

qui n'est autre que la relation de saut généralisée (2.19).

Plus généralement, nous énonçons

Lemme 2.17

Les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux de (2.23), et donc de (2.5), vérifient indépendamment du choix de la famille de chemin Φ :

$$\left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h' \left(h^{-1} \left(\frac{\rho s_\tau}{\rho} \right) \right)} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) \right]_{\Phi} = \mu \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) \right]_{\Phi}, \quad (2.30)$$

pour toute fonction h vérifiant (H_1) ou (H_2) , ainsi que l'identité

$$\left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g' \left(g^{-1} \left(\frac{\rho s}{\rho} \right) \right)} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) \right]_{\Phi} = \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) \right]_{\Phi}, \quad (2.31)$$

pour toute fonction g vérifiant (H_1) ou (H_2) .

Démonstration du Lemme 2.17

Ces identités sont vraies dans les zones de régularités. Il suffit de remarquer, en vertu de (2.26) et (2.27), qu'elles restent trivialement vraies à la traversée d'une discontinuité. ■

A la vue de ces résultats, le lecteur pourra paraître surpris puisque chacun des deux produits non conservatifs pris séparément est indépendant du choix de l'échelle d'entropie h ou g , ce qui est bien sur plus fort que le résultat d'équivalence énoncé au Lemme 2.13. La formulation (2.23) apparaît intrinsèque puisqu'elle ne privilégie aucune entropie de Lax, ni ρE , ni $\rho g(s)$, ni $\rho h(s_\tau)$, pour tout choix de g et h vérifiant (H_1) ou (H_2) . Une telle propriété d'indépendance était en réalité attendue.

En réalité et pour des raisons d'ordre numérique, nous aurons besoin de propriétés de convexité qui sont perdues pour le couple $g = I_d$ et $h = I_d$. De plus, la relation de saut généralisée (2.19), satisfaite par ce couple privilégié, demeurera inchangée lorsque les

conductivités thermiques κ et κ_τ seront choisies non nulles et ce contrairement à toute autre formulation (g, h) -dépendante, par exemple :

$$\begin{aligned} & \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} g' \left(g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) \right) (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi - \\ & \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} h' \left(h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \right) (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) \right]_\Phi = 0, \end{aligned}$$

pourtant totalement équivalente à celle que nous avons privilégiée dans le cas $\kappa = \kappa_\tau = 0$. Notons que les produits pris séparément ne vérifient plus les formules attendues du lemme 2.17.

Pour ces deux raisons, il était nécessaire de vérifier l'indépendance de la formulation équivalente (2.23) relativement au choix d'un couple (g, h) particulier.

Nous concluons la présente section par l'énoncé de deux conséquences, résultant de deux hypothèses de modélisation, de la formulation équivalente (2.23) du système (2.5). Ces conséquences permettent de donner à la relation de saut généralisée (2.19) soit une forme explicite, soit une forme approchée en terme de développement en échelle du rapport des viscosités μ et μ_τ . Ces conséquences permettront en outre la définition de problèmes de validation numérique agréables dans les sections concernées.

La première, valable sous l'hypothèse de modélisation $\gamma = \gamma_\tau$, conduit le système (2.5) à être, dans ce cas particulier, équivalent à un système complètement conservatif. La seule équation non conservative composant (2.23) trouve, en effet, pour le choix $g = h = I_d$, la forme conservative :

$$\partial_t \rho (\mu s_\tau - \mu_\tau s) + \partial_x \rho (\mu s_\tau - \mu_\tau s) u = 0. \quad (2.32)$$

Nous avons, en conséquence,

Lemme 2.18

Supposons $\gamma = \gamma_\tau$ et les fonctions $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ du Lemme 2.10, égales à l'identité. Les relations de saut $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$, associées au système (2.5), satisfont les relations de Rankine-Hugoniot suivante :

$$\begin{aligned} & -\sigma[\rho] + [\rho u] = 0, \\ & -\sigma[\rho u] + [\rho u^2 + p + p_\tau] = 0, \\ & -\sigma[\rho E] + [(\rho E + p + p_\tau)u] = 0, \\ & \mu \left(-\sigma[\rho s_\tau] + [\rho s_\tau u] \right) - \mu_\tau \left(-\sigma[\rho s] + [\rho s u] \right) = 0, \end{aligned}$$

où $[X] = X_R - X_L$ désigne le saut de la quantité X , ainsi que les inégalités d'entropie suivantes :

$$\begin{aligned} & -\sigma[\rho g(s)] + [\rho g(s)u] \leq 0, \\ & -\sigma[\rho h(s_\tau)] + [\rho h(s_\tau)u] \leq 0, \end{aligned}$$

pour toutes fonctions g et h vérifiant (H_1) .

Dans cet énoncé et à l'instar de la remarque 2.15, il faut comprendre l'une des trois grandeurs thermodynamiques ρE , ρs ou ρs_τ comme fonction des quatre autres inconnues. Il est dès lors possible d'explicitier la relation $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(\sigma; \mathbf{u}_L)$ sous la condition d'admissibilité (2.16). Notons que la dernière relation de saut exprime la loi

$$\mu_\tau(s_R - s_L) = \mu(s_{\tau R} - s_{\tau L}) \neq 0,$$

dans le cas d'une onde progressive.

Plus généralement, lorsque $\gamma \neq \gamma_\tau$, le système (2.5), bien que non conservatif, admet deux systèmes limites équivalents sous forme complètement conservative.

En effet, le fluide modélisé admet deux régimes limites distincts obtenus en faisant tendre le rapport des viscosités μ et μ_τ vers zéro. Dans ces deux cas limites, les solutions onde progressive existent en vertu du Théorème 2.8 et le résultat suivant établit leur lien avec les solutions onde progressive du système (2.5) :

Théorème 2.19

En faisant tendre $\frac{\mu_\tau}{\mu}$ vers zéro, les solutions onde progressive du système (2.5) convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers les solutions onde progressive du système de lois de conservation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x (\mu \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x (\mu u \partial_x u), \\ \partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u = 0, \\ \partial_t \rho g(s) + \partial_x \rho g(s) u \leq 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

où $s_\tau = h\left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}\right)$ avec h une fonction vérifiant (H_1) ou (H_2) et g satisfaisant (H_1) .

Symétriquement, en faisant tendre $\frac{\mu}{\mu_\tau}$ vers zéro, les solutions onde progressive du système (2.5) convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers les solutions onde progressive du système de lois de conservation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x (\mu_\tau \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x (\mu_\tau u \partial_x u), \\ \partial_t \rho s + \partial_x \rho s u = 0, \\ \partial_t \rho h(s_\tau) + \partial_x \rho h(s_\tau) u \leq 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

où $s = g\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$ avec g une fonction vérifiant (H_1) ou (H_2) et h satisfaisant (H_1) .

La preuve du Théorème 2.19 s'obtient par une simple adaptation des démonstrations proposées dans [17] où la viscosité μ_τ est variable (cf. en particulier les Théorèmes 3.9 et 3.10 de [17]).

Les relations de saut étant explicitement connues dans les deux cas limites, ce Théorème suggère d'approcher la relation de saut généralisée (2.19) par un développement en échelle de $\frac{\mu_\tau}{\mu}$, respectivement $\frac{\mu}{\mu_\tau}$, dont la validité est prouvée dans [17]. Nous renvoyons le lecteur à [17] pour l'expression d'un tel développement.

2.4 A propos des conductivités thermiques

Nous nous sommes, jusqu'à présent, consacrés aux propriétés des solutions du système (2.1) sous l'hypothèse de deux conductivités thermiques nulles. Il est important de noter que, contrairement à ce qui précède, privilégier des conductivités thermiques non nulles tout en supposant les deux viscosités simultanément nulles conduit les solutions onde progressive à développer des discontinuités dites de choc isotherme (cf. Zel'dovich-Raizer [40], Gilbarg [27] dans le cadre Navier-Stokes usuel). Il s'avère que sans hypothèse de modélisation restrictive ($\gamma = \gamma_\tau$), les produits non conservatifs impliqués présentent des ambiguïtés au sens des distributions.

Il est, de plus, connu au moins dans le contexte des équations de Navier-Stokes usuelles que la prise en compte d'une conductivité thermique non nulle en supplément de la viscosité préserve le résultat d'existence global des solutions onde progressive associées (cf. Gilbarg [27]) tant que le rapport μ/κ ne tend pas vers zéro. Dans le présent travail, nous n'avons pas cherché à confirmer une telle propriété dans le contexte des équations de Navier-Stokes à deux températures. La nature vraiment non conservative du système obligerait à devoir considérer un espace des phases de grande dimension (supérieur à cinq en général).

En conséquence, nous n'énoncerons pas ici de résultat d'équivalence entre diverses formulations du système (2.1) dans la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux. Notre propos est simplement ici d'indiquer formellement que si les solutions onde progressive existent globalement dès lors la relation de saut généralisée mise en avant au Théorème 2.9 subsiste sans modification sous l'hypothèse de constance des viscosités μ et μ_τ .

Rappelons en effet que les solutions $\mathcal{C}^2$ de (2.1) vérifient :

$$\mu_\tau \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} = \mu_\tau \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \mu_\tau \kappa \partial_x T), \quad (2.35.i)$$

$$\mu \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} \{ \partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau \} = \mu_\tau \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \mu \kappa_\tau \partial_x T_\tau), \quad (2.35.ii)$$

qui lorsque spécialisées dans le cas d'une solution onde progressive (si elle est régulière) conduisent à

$$\mu_\tau \int_{\mathbf{R}} \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} (\xi) d\xi = \mu_\tau \mu \int_{\mathbf{R}} (\partial_x u)^2 (\xi) d\xi, \quad (2.36)$$

$$\mu \int_{\mathbf{R}} \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} \{ \partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau \} (\xi) d\xi = \mu_\tau \mu \int_{\mathbf{R}} (\partial_x u)^2 (\xi) d\xi. \quad (2.37)$$

D'où il résulte formellement la condition de saut généralisée (analogue à (2.19)) :

$$\mu_\tau \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} (\xi) d\xi = \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} \{ \partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau \} (\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

2.5 Preuve du lemme de convexité 2.4

L'objet de cette section est d'établir le lemme de convexité 2.4. Sa validité résulte d'une succession de lemmes techniques que nous détaillons ci-après. Soulignons que toutes les notions de stricte convexité discutées ici sont locales, en particulier nous nous placerons toujours loin du vide.

Nous commençons par établir le premier résultat suivant. De manière à simplifier son écriture, nous réexprimons les hypothèses (H₁) et (H₂) en réécrivant $g(x) = G \circ \ln(x)$ pour x positif afin d'obtenir respectivement les conditions équivalentes

$$(H'_1) \quad \mathcal{G}(y)' < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{G}''(y)}{\mathcal{G}'(y)} < \frac{1}{\gamma}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (2.39)$$

respectivement

$$(H'_2) \quad \mathcal{G}(y)' > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{G}''(y)}{\mathcal{G}'(y)} < \frac{1}{\gamma}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

L'équivalence des conditions ainsi réexprimées avec leurs homologues (H₁) et (H₂) résulte des identités suivantes :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} G'(\ln(x)) \quad \text{pour tout } x > 0, \\ \frac{g''(x)}{g'(x)} &= \frac{1}{x} \left(\frac{G''(\ln(x))}{G'(\ln(x))} - 1 \right) \quad \text{pour tout } x > 0. \end{aligned}$$

Fort de cette équivalence nous énonçons :

Lemme 2.20

Supposons $\gamma > 1$. Considérons l'application $\{\rho S\} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\{\rho S\}(\rho, \rho\varepsilon) = \rho G \left(\ln \left((\gamma - 1) \frac{\rho\varepsilon}{\rho^\gamma} \right) \right), \quad (2.41)$$

où G désigne une application régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(i) L'application (2.41) est strictement convexe si et seulement si l'application G satisfait (H'₁).

(ii) Cette application est strictement concave si et seulement si l'application G satisfait (H'₂).

Démonstration du Lemme 2.20

Un calcul direct conduit à :

$$D_1 := \partial_{\rho\rho}^2 \{\rho S\} = \frac{\gamma}{\rho} (\gamma G'''(y) - G''(y)) \quad (2.42)$$

$$D_2 := \left[\partial_{\rho\rho}^2 \times \partial_{\rho\varepsilon\rho\varepsilon}^2 - (\partial_{\rho\rho\varepsilon}^2)^2 \right] \{\rho S\} = \frac{(\gamma - 1)^3}{\rho^{2\gamma} e^{2y}} (-G''(y)) \times (\gamma G'''(y) - G''(y)), \quad (2.43)$$

où nous avons posé

$$y = \ln \left((\gamma - 1) \frac{\rho\varepsilon}{\rho^\gamma} \right).$$

Nous rappelons que l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho\varepsilon)$ est strictement convexe si et seulement si les mineurs principaux D_1 et D_2 sont tous deux strictement positifs, respectivement concave si et seulement si $D_1 < 0$ et $D_2 > 0$. Ceci achève la démonstration. ■

En conséquence de ce résultat nous avons :

Lemme 2.21

Supposons $\gamma > 1$. Considérons l'application $\{\rho\varepsilon\} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\{\rho\varepsilon\}(\rho, \rho S) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right), \quad (2.44)$$

où g désigne une application vérifiant soit (H_1) soit (H_2) . Alors l'application (2.44) est (toujours) strictement convexe.

Démonstration du Lemme 2.21

Pour fixer les idées nous adoptons ici l'hypothèse (H_1) de sorte que l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho\varepsilon)$ est strictement convexe. Nous indiquerons en temps utile comment établir ce résultat lorsque l'hypothèse (H_2) est invoquée.

La convexité de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho\varepsilon)$, établie au Lemme 2.20 implique par définition la validité de l'inégalité suivante pour toute paire d'états $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ dans $\mathbb{R}_+^2$:

$$\begin{aligned} & \{\rho S\}(\rho_R, (\rho\varepsilon)_R) - \{\rho S\}(\rho_L, (\rho\varepsilon)_L) \leq \\ & \partial_\rho \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) + \partial_{\rho\varepsilon} \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho\varepsilon)_R - (\rho\varepsilon)_L), \end{aligned} \quad (2.45)$$

cette inégalité étant généralement stricte en vertu de la stricte convexité. Réécrivons l'inégalité précédente selon :

$$\begin{aligned} & -\partial_{\rho\varepsilon} \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)((\rho\varepsilon)_R - (\rho\varepsilon)_L) \leq \\ & \partial_\rho \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) - (\{\rho S\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de stricte décroissance faite sur g assure que l'application $\{\rho\varepsilon\}(\rho, \rho S)$, est bien définie et qu'en outre nous avons le principe de décroissance suivant :

$$\partial_{\rho\varepsilon} \{\rho S\}(\mathbf{u}) = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(\frac{\rho S}{\rho})) < 0.$$

Il résulte dès lors de (2.46) l'inégalité suivante :

$$((\rho\varepsilon)_R - (\rho\varepsilon)_L) \leq -\frac{\partial_\rho\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho\varepsilon}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}(\rho_R - \rho_L) + \frac{\{\rho S\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho\varepsilon}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}, \quad (2.47)$$

où l'on peut comprendre désormais ρS en tant que variable et l'énergie $\rho\varepsilon$ en tant que fonction de $(\rho, \rho S)$ puisque

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_\rho\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho\varepsilon}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)} &= \partial_\rho\{\rho\varepsilon\}(\rho_L, (\rho S)_L), \\ \frac{1}{\partial_{\rho\varepsilon}\{\rho S\}(\mathbf{u}_L)} &= \partial_{\rho S}\{\rho\varepsilon\}(\rho_L, (\rho S)_L). \end{aligned}$$

Nous concluons donc à la stricte convexité de l'application $\{\rho\varepsilon\}(\rho, \rho S)$.

Plaçons-nous, à présent, sous l'hypothèse (H_2) où la propriété de stricte concavité implique que l'inégalité (2.45) est inversée. Cette fois l'hypothèse de stricte croissance faite sur g assure qu'au final l'inégalité attendue (2.47) a bien lieu, ce qui achève la démonstration. ■

Ce second résultat implique immédiatement :

Lemme 2.22

Supposons $\gamma > 1$ et $\gamma_\tau > 1$.

(i) Considérons l'application $\{\rho e\} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\{\rho e\}(\rho, \rho S, \rho S_\tau) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) + \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right), \quad (2.48)$$

où g et h désignent deux fonctions supposées satisfaire soit (H_1) ou soit (H_2) . Alors l'application (2.48) est (toujours) strictement convexe.

(ii) Considérons l'application $\{\rho E\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S, \rho S_\tau) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} g^{-1} \left(\frac{\rho S}{\rho} \right) + \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right), \quad (2.49)$$

où g et h désignent deux fonctions supposées satisfaire soit (H_1) ou soit (H_2) . Alors l'application (2.49) est (toujours) strictement convexe.

Ce dernier résultat nous permet enfin de conclure à la validité du lemme de convexité 2.4 en vertu de Lemme suivant établi pour $\{\rho S\}$ (le rôle de $\{\rho S_\tau\}$ étant totalement symétrique).

Lemme 2.23

Supposons $\gamma > 1$ et $\gamma_\tau > 1$. Considérons l'application $\{\rho S\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) = \rho g \left(\frac{\gamma-1}{\rho^\gamma} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau-1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \right) \right). \quad (2.50)$$

(i) Supposons la fonction g satisfaire (H_1) et la fonction h satisfaire soit l'hypothèse (H_1) soit l'hypothèse (H_2) . Alors l'application (2.50) est strictement convexe.

(ii) Inversement, supposons la fonction g satisfaire (H_2) et la fonction h satisfaire soit l'hypothèse (H_1) soit l'hypothèse (H_2) . Alors l'application (2.50) est strictement concave.

Démonstration du Lemme 2.23

La convexité de l'application $\{\rho E\}(\rho, \rho u, \rho S, \rho S_\tau)$ établie au Lemme 2.22 implique par définition la validité de l'inégalité suivante pour toute paire d'états $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ dans Ω^2 :

$$\begin{aligned} & \{\rho E\}(\rho_R, (\rho u)_R, (\rho S)_R, (\rho S_\tau)_R) - \{\rho E\}(\rho_L, (\rho u)_L, (\rho S)_L, (\rho S_\tau)_L) \leq \\ & \partial_\rho \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) + \partial_{\rho u} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho u)_R - (\rho u)_L) + \\ & \partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho S)_R - (\rho S)_L) + \partial_{\rho S_\tau} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho S_\tau)_R - (\rho S_\tau)_L), \end{aligned}$$

cette inégalité étant généralement stricte en vertu de la stricte convexité. Réécrivons l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} & -\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho S)_R - (\rho S)_L) \leq \\ & \partial_\rho \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)(\rho_R - \rho_L) + \partial_{\rho u} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho u)_R - (\rho u)_L) + \\ & \partial_{\rho S_\tau} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)((\rho S_\tau)_R - (\rho S_\tau)_L) - (\{\rho E\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de stricte décroissance (respectivement croissance) faite sur g dans le cadre de l'hypothèse (H_1) (respectivement (H_2)) assure que l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$, est bien définie et qu'en outre nous avons le principe de monotonie suivant :

$$\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}) = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))} < 0 \quad (\text{respectivement } > 0).$$

Il en résulte dès lors de (2.51) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & ((\rho S)_R - (\rho S)_L) \leq \quad (\text{respectivement } \geq) \\ & -\frac{\partial_\rho \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}(\rho_R - \rho_L) - \frac{\partial_{\rho u} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}((\rho u)_R - (\rho u)_L) + \\ & \frac{\partial_{\rho u} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho S_\tau} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}((\rho S_\tau)_R - (\rho S_\tau)_L) - \frac{\{\rho E\}(\mathbf{u}_R) - \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}{\partial_{\rho S} \{\rho E\}(\mathbf{u}_L)}, \end{aligned}$$

où l'on peut comprendre désormais ρE en tant que variable et l'entropie ρS en tant que fonction de $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ en concluant comme lors du Lemme 2.21. ■

Section 3

Equations et inéquations pour les solutions discrètes : Condition de compatibilité avec la relation de saut généralisée

3 Equations et inéquations pour les solutions discrètes : Condition de compatibilité avec la relation de saut généralisée

Les quatre prochaines sections sont dédiées à l'approximation numérique des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux des équations de Navier-Stokes à deux températures (2.1). A cette fin, il est dès maintenant indispensable de préciser les propriétés que nous imposerons de satisfaire aux solutions discrètes que nous aurons à construire.

En effet, rapportons dès à présent les principales conclusions des résultats numériques obtenus ci-après. La comparaison de solutions discrètes à une classe de solutions exactes nous conduira, après examen des résultats numériques, à rejeter des méthodes d'approximation *a priori* naturelles mais dont les erreurs L^1 numériques apparaîtront inacceptables à un degré de raffinement donné et ce à un instant donné. Soulignons que nous établirons pour ces mêmes méthodes que si l'erreur L^1 est acceptable à l'instant considérée, elle ne saurait le rester aux dates ultérieures puisque, dans un sens à préciser, l'erreur sera montrée être une fonction généralement strictement croissante du temps et ce, conformément au préambule numérique 1, dans le contexte d'une stratégie de projection purement L^2 . En outre et à un instant fixé, le degré de raffinement requis pour cette même stratégie afin d'obtenir une erreur acceptable apparaîtra de nouveau être trop important pour que la méthode puisse prétendre à une quelconque utilité pratique. Enfin lorsque ces difficultés seront exacerbées dans les sections consacrées aux modèles de turbulence compressible par des viscosités fonctions fortement nonlinéaires des inconnues, nous constaterons numériquement des phénomènes de croissance linéaire de l'erreur par rapport à $1/\Delta x$, où avec des notations usuelles Δx désigne le pas d'espace.

Pour autant, la méthode de type Godunov n'impliquant que des projections L^2 et que nous construirons pour la rejeter, sera montrée vérifier (par opposition à l'approche "classique") toutes les conditions de stabilité et de précision habituelles dans le contexte des équations de Navier-Stokes à une température: *i.e.* sous forme conservative. En ce sens, cette méthode pourrait paraître naturelle: la nature vraiment non conservative du système (2.1) fait d'elle en réalité une hérésie.

Ces conditions sont en substance:

- les propriétés de stabilité suivantes :
 - i) la préservation de la positivité de la densité et des pressions p et p_τ (dès que le vide est absent de la solution exacte),
 - ii) la satisfaction d'un ensemble complet d'inégalités d'entropie discrètes,
 - iii) la satisfaction d'un principe du maximum sur les entropies spécifiques s et s_τ ,
- la propriété de précision exigeant l'exacte capture des discontinuités de contact stationnaire.

Notons que l'ensemble des conditions de stabilité ainsi énoncées n'a de sens que lorsque les conductivités thermiques sont identiquement nulles puisque autrement seules les entropies $\rho \log s$ et $\rho \log s_\tau$ restent compatible avec le second principe de la thermodynamique.

Dans l'espoir de rendre l'erreur L^1 acceptable pour un degré de raffinement usuel et ce indépendamment du temps, nous sommes donc conduits à contraindre plus sévèrement l'ensemble des précédentes exigences et bien sûr à montrer comment dès lors le satisfaire dans le contexte d'une méthode de volumes finis concrètement implémentable.

Nous imposerons dans les faits un troisième type d'exigence, à savoir une condition de compatibilité avec la vitesse comparée de création d'entropie discrète (cf. remarque 2.15), directement motivée par la relation de saut généralisée (2.19). Cette condition de compatibilité trouvera une définition précise ci-après et nous la qualifierons dans toute la suite de condition de compatibilité avec la relation de saut généralisée (2.19) ou toute autre extension de cette relation de saut telles que celles que nous aurons à considérer dans d'autres sections.

Au même titre que les erreurs L^2 de projection ainsi que de représentation des dérivées discrètes exhibées lors du préambule numérique 1 ont été illustrées numériquement s'opposer à la conservation de l'énergie totale et donc de la condition de Rankine-Hugoniot associée, nous montrerons que ces mêmes erreurs s'opposeront ici à la satisfaction de la condition de compatibilité que nous aurons introduite. L'examen des résultats numériques suffira à attester la violation de la relation de saut généralisée (2.19). Soulignons si besoin est, que ces erreurs L^2 sont indissociablement responsables certes de la violation de la condition de compatibilité mais également indissociablement responsables de toutes les propriétés de stabilité mises en avant ci-dessus.

En fait, nous proposerons dans un premier temps une discrétisation des opérateurs du second ordre exempte de toute erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes tout en préservant l'ensemble des propriétés de stabilité précédentes.

Subsistera donc uniquement l'erreur de projection L^2 induite par le choix des variables d'évolution, celle-ci s'avérant être incontournable dans une stratégie de projection purement linéaire puisque ici il n'existe pas de choix de variables purement conservatives.

Nous montrerons dans un second temps comment corriger une méthode de type Godunov par projection L^2 par l'introduction d'une technique de projection nonlinéaire, venant s'adjoindre de manière simple et effective à l'issue de chaque pas de temps. Nous établirons l'existence et l'unicité du résultat de la projection nonlinéaire en invoquant précisément le fait que la méthode par projection L^2 est une bonne méthode : *i.e.* elle satisfait des conditions d'entropie discrètes ainsi que des principes du maximum sur les entropies spécifiques s et s_τ discrètes. Nous montrerons alors que la méthode par projection nonlinéaire préserve à son tour toutes ces propriétés de stabilité. De manière heuristique, la projection nonlinéaire que nous proposons redistribue les erreurs L^2 , qu'elles soient de type projection ou de type représentation des dérivées, de manière à forcer au niveau discret une vitesse comparée de création d'entropie discrète compatible avec la relation de saut généralisée (2.19).

On pourrait être gêné à l'idée que la technique de correction des erreurs L^2 que nous proposons prétend corriger en redistribuant seulement ces mêmes erreurs. Nous proposons dans ce cas une autre heuristique, celle-ci ne s'adressant pas au lecteur familier de l'analyse numérique des méthodes par projection L^2 .

L'approximation numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation est grandement facilitée par la propriété que possèdent les relations de saut $(\sigma, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ associée à une solution onde progressive (et donc à la solution onde de choc sous-jacente) d'être indépendante de la forme du tenseur associé à l'opérateur du second ordre. La solution onde progressive n'a de sens que si elle existe: *i.e.* si à l'opérateur du second ordre correspond un bon tenseur de dissipation. Numériquement parlant, une méthode de projection L^2 sous forme **conservative** et satisfaisant toutes les conditions de stabilité requises possède également un bon tenseur de dissipation. Toutefois, ce dernier n'a aucune raison d'admettre la même forme que le tenseur ayant sur le plan continu permis d'établir l'existence des solutions onde progressive. Il suffit en particulier de noter dans le contexte des équations de Navier-Stokes habituelles qu'une méthode de type Godunov dissipe la densité lors de son évolution en temps et ce contrairement aux équations exactes. Cette absence de proportionnalité entre tenseur numérique et physique ne porte pas (trop) à conséquence dans le cas de systèmes sous forme complètement conservative puisque les relations de saut en sont indépendantes et ce plus précisément au sens où si la méthode discrète converge, alors elle ne peut que converger vers une solution faible du système exact.

La situation est toutefois radicalement différente lorsque le système à approcher numériquement est sous forme non conservative. Cette fois, les solutions onde progressive, dès qu'elles existent pour le choix d'un bon tenseur exact, satisfont des conditions de saut généralisées qui dépendent intrinsèquement de la forme du tenseur choisi. Il faut donc heuristiquement forcer le tenseur de dissipation numérique, responsable des propriétés de stabilité attendues, à être proportionnel au moins à la partie du tenseur exacte ayant conduit à des conditions de saut généralisées mais pas nécessairement à la partie impliquée dans les équations complètement conservatives. A défaut d'assurer cette condition de proportionnalité, on s'expose à exhiber par le calcul des solutions discrètes donnant toutes les assurances de converger vers une fonction mais qui lorsque comparée à la solution exacte dès que disponible, conduit à l'effroi. Nous donnerons dans ce travail de telles illustrations numériques. La fonction limite ainsi obtenue est probablement solution faible du système du premier ordre extrait mais pour un **autre choix** de tenseur exact et donc pour un autre problème.

3.1 Equations et inéquations pour les solutions discrètes

Nous décrivons ici les équations ainsi que les inéquations que nous imposerons aux solutions discrètes de satisfaire en un sens discret à préciser.

De manière à motiver la distinction que nous opérerons au niveau discret entre des

équations pourtant satisfaites simultanément et sans condition supplémentaire par les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (2.5), nous proposons de résumer ici les principaux résultats établis lors de la précédente section. Indiquons toutefois qu'il est possible au lecteur de se dispenser de la lecture de ces rappels pour directement considérer les équations et inéquations présentées à la fin de ce paragraphe.

Rappelons dans un premier temps que toute solution $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (2.5) satisfait simultanément et sans condition supplémentaire les trois lois de conservation :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \end{cases} \quad (3.1)$$

ainsi que les identités, que nous qualifierons dans la suite d'**inégalités d'entropie précisées** :

$$\begin{cases} \partial_t \rho g(s) + \partial_x \rho g(s) u &= \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \mu g'(s) (\partial_x u)^2 &\leq 0, \\ \partial_t \rho h(s_\tau) + \partial_x \rho h(s_\tau) u &= \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} \mu_\tau h'(s_\tau) (\partial_x u)^2 &\leq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

pour tout choix de fonctions g et h satisfaisant (H_1) et donc toutes les **égalités** définies au sens du Lemme 2.13 :

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau - 1} \left(\frac{\mathcal{F}(s, s_\tau)}{h'(s_\tau)} \right) (\partial_t \rho h(s_\tau) + \partial_x \rho h(s_\tau) u) \right]_\Phi - \\ & \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \left(\frac{\mathcal{F}(s, s_\tau)}{g'(s)} \right) (\partial_t \rho g(s) + \partial_x \rho g(s) u) \right]_\Phi = 0, \end{aligned}$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ désigne une application régulière.

Sous les hypothèses faites sur g , h et $\mathcal{F}$, les systèmes constitués des trois premières lois de conservation et complétés de l'une quelconque des EDP précédentes sont équivalents dans la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

Nous montrerons ci-après que l'un de ces systèmes étant fixé, *i.e.* un choix de g , h et $\mathcal{F}$ étant privilégié, les solutions discrètes que nous lui associerons violeront en règle générale et en sens à préciser toutes les autres identités. En d'autres termes, nous aurons perdu au niveau discret la propriété d'équivalence précédemment indiquée. Soulignons dès maintenant que dans le travail rapporté dans le présent mémoire, il en sera *a priori* de même pour l'opérateur de projection nonlinéaire que nous introduirons mais avec des conséquences de plusieurs ordres de grandeur inférieurs que pour les autres méthodes que nous aurons à considérer. L'expérience numérique en attestera.

Si l'équivalence est généralement perdue au niveau discret, il s'agit en conséquence de privilégier l'un des systèmes précédents en particulierisant un choix de fonctions g , h et $\mathcal{F}$. Ce faisant, les équations supplémentaires ne peuvent plus dès lors être satisfaites avec égalité stricte au niveau discret. En conséquence, il s'agit également de s'assurer que les

erreurs occasionnées ne viendront pas s'opposer ni à la stabilité de la méthode d'approximation numérique devant être associée au système privilégié ni même à l'existence de la solution discrète.

La remarque 2.16 suggère fortement de particulariser $g = h := Id$ et $\mathcal{F} := \mathbf{1}$ pour ainsi privilégier le système composé des trois lois de conservation et complété par la loi d'évolution :

$$\mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) - \mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) = 0.$$

Rappelons que celle-ci est associée de manière intrinsèque à la relation de saut généralisée devant compléter les trois relations de saut de Rankine-Hugoniot.

Cependant et pour un tel choix, il s'avère que nous ne savons pas garantir l'existence d'une solution discrète. En effet, le défaut de convexité trouvé par la paire $g = h := Id$ (cf. le lemme de convexité 2.4) ne nous autorisera plus certains arguments classiques dont la validité relève essentiellement de la propriété de convexité.

Toutefois et en adoptant le choix $\mathcal{F} := \mathbf{1}$ que nous ne quitterons plus, le lemme 2.17 assure les identités suivantes, valables indépendamment du choix de la famille de chemin Φ :

$$\left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h' \left(h^{-1} \left(\frac{\rho s_\tau}{\rho} \right) \right)} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) \right]_\Phi = \mu \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} (\partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u) \right]_\Phi, \quad (3.3)$$

pour toute fonction h vérifiant (H_1) ou (H_2) , ainsi que

$$\left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g' \left(g^{-1} \left(\frac{\rho s}{\rho} \right) \right)} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) \right]_\Phi = \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} (\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u) \right]_\Phi, \quad (3.4)$$

pour toute fonction g vérifiant (H_1) ou (H_2) .

Cette propriété d'indépendance nous assure qu'il est possible, tout en préservant de manière intrinsèque le lien avec la relation de saut généralisée, d'exclure le choix simple $g = h = Id$ pour particulariser des fonctions g et h relevant des hypothèses du lemme de convexité 2.4. Il se trouve qu'une autre raison technique, cette fois liée au signe d'une dérivée partielle thermodynamique précisée par exemple au lemme 6.2, nous conduit dans toute la suite à privilégier des fonctions g et h relevant toutes deux de la même hypothèse : *i.e.* soit l'hypothèse (H_1) soit l'hypothèse (H_2) .

Le cadre de travail étant posé, nous imposerons aux solutions discrètes d'être consis-

tantes en un sens à préciser avec le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \mu \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \left(\frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))} \right) (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) \right]_\Phi - \\ \mu_\tau \left[\frac{\rho^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{g'(g^{-1}(S))} \right) (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) \right]_\Phi = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où Φ désigne une famille de chemins arbitraire, vérifiant les hypothèses du lemme d'équivalence 2.13. Ici, g et h désignent un couple de fonctions particulières vérifiant toutes deux soit (H_1) soit (H_2) .

En outre et de manière à garantir l'existence des solutions discrètes, nous exigerons de ces solutions d'être consistantes en un sens à préciser avec toutes les inégalités d'entropies suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho \phi(s) + \partial_x \rho \phi(s) u \leq 0, \\ \partial_t \rho \psi(s_\tau) + \partial_x \rho \psi(s_\tau) u \leq 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

pour tout choix de fonctions ϕ et ψ satisfaisant (H_1) .

Il importe de rapprocher le choix de ces équations et inéquations, dont nous exigerons la satisfaction au niveau discret, des égalités et inégalités établies aux théorèmes 2.7 et 2.9.

Enfin, il est nécessaire de préciser explicitement les quatre inconnues du problème qui nous préoccupe. Ces inconnues satisfont les quatre lois d'évolution composant le système (3.5) et seront astreintes au niveau discret à satisfaire les deux types d'inégalités précédentes.

Il faut donc comprendre $\{\rho \phi(s)\}$ et $\{\rho \psi(s_\tau)\}$ comme des fonctions de ces quatre inconnues. Par ailleurs et dans l'écriture du système (3.5), il est bien entendu nécessaire de comprendre également soit ρE , soit ρS_τ , soit ρS , comme une fonction des inconnues restantes (sous les hypothèses du lemme de convexité 2.4).

De manière à fixer les idées, nous définissons conformément à l'énoncé du lemme d'équivalence 2.13 relatif au système (3.5), le vecteur des inconnues par :

$$\mathbf{v} := {}^T (\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau), \quad (3.7)$$

sur l'espace des états précisé lors de ce lemme. Nous proposons donc de dissymétriser artificiellement le rôle de ρS , devant être ici compris comme fonction de $\mathbf{v}$. Nous renvoyons le lecteur à la remarque 2.15 soulignant qu'un tel choix est arbitraire et ne porte pas à conséquence ni sur le plan continu ni sur le plan discret à la condition d'utiliser l'opérateur de projection nonlinéaire. Il s'agissait toutefois de faire un choix d'inconnues.

Remarque 3.1

Il pourrait paraître gênant de ne plus exiger d'égalité dans l'énoncé des inégalités d'en-

trope précisées pour leur préférer une simple condition de consistance avec le signe des membres de droite. Toutefois et ainsi que nous l'avons déjà souligné, il semble impossible au niveau discret d'assurer, dans le contexte d'une méthode de projection, simultanément la conservation de l'énergie totale et les deux inégalités d'entropie telles que précisées. Il faudra dès lors comprendre, au niveau discret, les membres de gauche des inégalités d'entropie non précisées comme réalisant des approximations des membres de droite des inégalités d'entropie précisées, consistantes avec leur signe fixe. Il s'agira donc de discrétisations des termes de dissipation visqueuse, certes à une erreur près, mais compatibles avec la relation de saut généralisée imposée en conséquence des deux inégalités d'entropie précisées. Enfin, il est légitime de chercher à quantifier une telle erreur et nous ne répondons que partiellement à ce point dans la suite (cf. remarque 6.18 et le lemme associé 6.17).

3.2 Conditions de consistance et condition de compatibilité

Nous énonçons ici les conditions de consistance permettant de préciser en quel sens les solutions discrètes que nous aurons à construire satisferont les équations et inéquations décrites au terme du précédent paragraphe.

Nous adoptons ici le formalisme des méthodes de volumes finis explicites en temps tel que détaillé dans les ouvrages de Godlewski-Raviart [28] et [29]. Par souci de simplicité, nous ne considérons ici qu'une seule dimension d'espace. Toutefois, il sera clair que l'extension à plusieurs variables d'espace de la condition de compatibilité énoncée ci-dessous est immédiate. Nous renvoyons par exemple à Coquel-LeFloch [46] pour la réécriture d'une méthode de volumes finis à plusieurs variables d'espace en terme de décomposition convexe de schémas quasi-monodimensionnels.

Toujours par souci de simplicité, nous adoptons sans restriction l'hypothèse d'un pas d'espace constant noté Δx , le pas de temps noté Δt sera choisi sous une restriction de type CFL globale en espace et à préciser.

Les solutions discrètes, notées dans la suite $\mathbf{v}_h(x, t)$, seront toujours supposées être constantes par morceaux, telles que :

$$\mathbf{v}_h(x, t) = \mathbf{v}_i^n, \quad (x, t) \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t^n, t^{n+1}), \quad i \in Z, \quad n \in N,$$

où nous avons posé $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$ et $t^n = n\Delta t$.

Soulignons que nous ne décrivons l'approximation de la donnée initiale exacte qu'à l'occasion de l'introduction de la méthode par projection nonlinéaire. Ici, nous supposons donc la donnée initiale discrète connue pour n'avoir à considérer que l'instant courant $t^n = n\Delta t$ avec $n \geq 1$.

Disposant de la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$ à cet instant, nous proposons de faire avancer cette solution jusqu'à la date t^{n+1} en adoptant la méthode de volumes finis suivante.

Définissons dans un premier temps, la réactualisation des trois variables conservatives :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_\rho(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n), \quad (3.8.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho u}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u)}_i^n, \quad (3.8.ii)$$

$$(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho E}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u)}_i^n. \quad (3.8.iii)$$

Ici, les quantités

$$\overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u)}_i^n \quad \text{et} \quad \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u)}_i^n$$

désignent des formules aux différences consistantes qui seront précisées dans la suite. Nous exigeons d'elles de préserver bien entendu la propriété de conservation des inconnues ρu et ρE .

Les fonctions flux numériques, impliquées dans (3.8), sont supposées satisfaire les conditions habituelles de consistance et de régularité Lipschitzienne telles que définies dans Godlewski-Raviart [29]. Ainsi et par exemple en considérant la fonction flux numérique associée à la variable densité, nous supposons toujours la satisfaction des deux conditions suivantes :

- i) $\mathbf{f}_\rho(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \rho u$ pour tout $\mathbf{v} \in \Omega$,
- ii) pour toutes paires d'états $(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ et $(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ appartenant à un compact fixe $K \subset \Omega$, il existe une constante C ne dépendant que de K telle que :

$$|f_\rho(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) - f_\rho(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)| \leq C (\|\mathbf{v}_L - \mathbf{w}_L\| + \|\mathbf{v}_R - \mathbf{w}_R\|).$$

La dernière variable d'évolution du problème, ρS_τ , est réactualisée par la relation :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho S_\tau}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) + \mathcal{E}_{\tau i}^n,$$

où la fonction flux numérique impliquée est supposée consistante et Lipschitzienne. Nous avons posé :

$$\mathcal{E}_{\tau i}^n = \mathcal{E}_\tau(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n),$$

où par hypothèse, la fonction dissipation d'entropie discrète $\mathcal{E}_\tau$ est

- i) négative ou nulle dès que h vérifie (H₁),
- ii) respectivement positive ou nulle dès que h vérifie (H₂).

Remarque 3.2

Nous ne tenterons pas ici de définir la régularité minimale exigée de cette fonction. En effet, il faut comprendre ici cette fonction dissipation d'entropie discrète comme réalisant une discrétisation de l'opérateur

$$\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x u)^2,$$

mais en général à une erreur près. Nous imposons toutefois à cette erreur d'être consistante avec le signe fixe de l'opérateur exact impliqué. Dans le contexte des méthodes de projection purement L^2 , une telle erreur n'existe pas par construction et ceci contrairement à la méthode par projection nonlinéaire où cette erreur signée résulte de la redistribution des erreurs L^2 entre ρS_τ et une entropie privilégiée ρS . Il s'ensuit donc que cette fonction dépend explicitement, outre des inconnues discrètes à la date t^n , de puissances de $1/\Delta x$ (cf. Coquel-LeFloch [46]).

Par consistance avec les inégalités d'entropie (3.6), nous entendons conformément à l'usage (cf. Godlewski-Raviart [28] et [29] par exemple) que les solutions discrètes vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \{\rho\phi(s)\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1} \right) - \\ (\rho\phi(s))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho\phi(s)} \left(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n \right) = \mathcal{E}_{\phi_i}^n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \{\rho\psi(s_\tau)\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1} \right) - \\ (\rho\psi(s_\tau))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho\psi(s_\tau)} \left(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n \right) = \mathcal{E}_{\psi_i}^n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où les fonctions flux d'entropie numériques sont encore supposées être consistantes et Lipschitziennes. Ici les fonctions dissipation d'entropie numériques définissant :

$$\mathcal{E}_{\phi_i}^n = \mathcal{E}_\phi \left(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n \right), \quad \mathcal{E}_{\psi_i}^n = \mathcal{E}_\psi \left(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n \right),$$

sont supposées être négatives ou nulles puisque ici ϕ et ψ vérifient l'hypothèse (H_1) .

Armé de ces conditions de consistance, nous introduisons la condition de compatibilité attendue. A cette fin, il est nécessaire de préciser la définition des moyennes que nous avons à opérer dans les deux produits non conservatifs impliqués dans la loi d'évolution associée à la relation de saut généralisée (2.19). Nous écrivons ici cette loi pour deux fonctions ϕ et ψ supposées satisfaire l'hypothèse (H_1) .

De manière à définir par exemple la moyenne :

$$\frac{\overline{\rho^{\gamma-1} \frac{1}{\phi(s)}}^n}{\gamma - 1 \phi(s)_i},$$

nous introduisons la fonction $A(\gamma, \phi; \cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ pour poser

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\rho^{\gamma-1} \frac{1}{\phi(s)}}^n}{\gamma - 1 \phi(s)_i} &:= A \left(\gamma, \phi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n \right), \\ \frac{\overline{\rho^{\gamma_\tau-1} \frac{1}{\psi(s_\tau)}}^n}{\gamma_\tau - 1 \psi(s_\tau)_i} &:= A \left(\gamma_\tau, \psi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{\tau i-1}^n, s_{\tau i}^n, s_{\tau i+1}^n \right). \end{aligned}$$

Cette fonction est supposée être continue par rapport aux variables discrètes ρ et s (et donc respectivement ρ et s_τ) et vérifier de plus les conditions de consistance suivantes :

i) Pour tout triplet (ρ_L, ρ_C, ρ_R) de $\mathbb{R}_+^3$ et tout triplet (s_L, s_C, s_R) de $\mathbb{R}_+^3$, nous avons

$$A(\gamma, \phi; \rho_L, \rho_C, \rho_R, s_L, s_C, s_R) < 0,$$

dès que la fonction ϕ vérifie l'hypothèse (H₁). Notons que nous avons exigé la stricte négativité de cette fonction et que bien entendu nous aurions exigé la stricte positivité de cette même fonction sous l'hypothèse : ϕ vérifie (H₂).

ii) Pour tout $\rho > 0$ et $s > 0$, nous avons

$$A(\gamma, \phi; \rho, \rho, \rho, s, s, s) = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{\phi'(s)}.$$

iii) Faisant choix de $\phi = \psi = I_d$ et $\gamma = \gamma_\tau = \alpha > 1$, nous avons pour tout triplet (ρ_L, ρ_C, ρ_R) de $\mathbb{R}_+^3$, tous triplets (s_L, s_C, s_R) de $\mathbb{R}_+^3$ et $(s_{\tau L}, s_{\tau C}, s_{\tau R})$ de $\mathbb{R}_+^3$:

$$\frac{A(\alpha, I_d; \rho_L, \rho_C, \rho_R, s_L, s_C, s_R)}{A(\alpha, I_d; \rho_L, \rho_C, \rho_R, s_{\tau L}, s_{\tau C}, s_{\tau R})} = 1.$$

Cette dernière condition est bien entendu motivée par l'existence du système équivalent complètement conservatif rapporté au lemme 2.18 sous l'hypothèse $\gamma = \gamma_\tau$.

Nous imposerons aux solutions discrètes de satisfaire la

Condition de compatibilité discrète :

Il existe deux fonctions ϕ et ψ répondant à l'hypothèse (H₁) et une définition de la moyenne A satisfaisant les conditions de consistance i), ii) et iii) telles que les inégalités d'entropie discrètes respectivement pour $\rho\phi(s)$ et $\rho\psi(s_\tau)$ vérifient :

$$\begin{aligned} & \mu_\tau A(\gamma, \phi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n) \times \\ & \quad \left\{ \{\rho\phi(s)\}_i^{n+1} - (\rho\phi(s))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho\phi(s)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \right\} - \\ & \mu A(\gamma_\tau, \psi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{\tau i-1}^n, s_{\tau i}^n, s_{\tau i+1}^n) \times \\ & \quad \left\{ \{\rho\psi(s_\tau)\}_i^{n+1} - (\rho\psi(s_\tau))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho\psi(s_\tau)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ici, nous avons posé :

$$\{\rho\phi(s)\}_i^{n+1} = \{\rho\phi(s)\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}),$$

avec une définition analogue pour $\{\rho\psi(s_\tau)\}_i^{n+1}$.

Bien entendu, cette condition de compatibilité demande expressément aux fonctions de dissipation d'entropie numérique associées à ϕ et ψ de vérifier la relation de proportionnalité suivante :

$$\begin{aligned} & \mu_\tau A(\gamma, \phi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n) \times \mathcal{E}_{\phi_i}^n - \\ & \mu A(\gamma_\tau, \psi; \rho_{i-1}^n, \rho_i^n, \rho_{i+1}^n, s_{\tau i-1}^n, s_{\tau i}^n, s_{\tau i+1}^n) \times \mathcal{E}_{\psi_i}^n = 0, \end{aligned}$$

exprimant le respect au niveau discret de la vitesse comparée de création d'entropie. Soulignons enfin que la relation (3.11) exige des deux bilans d'entropie discrets de ne pouvoir s'annuler que simultanément conformément à l'hypothèse de stricte négativité de l'opérateur de moyenne A .

Remarque 3.3

Nous n'avons ici considéré que des méthodes complètement explicites en temps par souci de simplicité dans les notations. En réalité et de manière à éviter une condition CFL trop contraignante, la discrétisation des opérateurs du second ordre sera choisie implicite en temps. Le domaine de dépendance des fonctions dissipation d'entropie numérique s'en trouve modifié en conséquence.

Remarque 3.4

Nous établirons dans la suite que la méthode par projection L^2 ne satisfait pas la condition de compatibilité précédemment énoncée : il n'existe pas de couples d'entropies

$$(\rho\phi(s), \rho\phi(s)u) \quad \text{et} \quad (\rho\psi(s_\tau), \rho\psi(s_\tau)u)$$

vérifiant avec égalité à zéro la relation discrète (3.11). L'examen des résultats numériques montrera qu'une telle méthode ne permet généralement pas la capture des solutions onde progressive.

Nous montrerons ensuite que la technique de projection nonlinéaire, comprise comme correction de la précédente méthode de projection L^2 , force la validité de la relation de compatibilité pour un couple de fonctions ϕ et ψ particulier. Un tel couple sera obtenu en faisant choix de $\psi = h$, *i.e.* la fonction associée à la variable projetée ρS_τ . Le choix de la fonction $\phi = g$ est arbitraire tant qu'il vérifie la même hypothèse que h (à savoir soit (H_1) soit (H_2)). L'examen des résultats numériques montrera que les solutions discrètes trouvent un bien meilleur accord (sinon excellent, le lecteur en jugera) avec les solutions onde progressive exactes.

Le lecteur pourra être surpris que nous menions de front les hypothèses (H_1) et (H_2) plutôt que de privilégier seulement l'hypothèse (H_1) assurant la convexité des applications concernées. Toutefois, l'hypothèse de décroissance des fonctions vérifiant (H_1) conduit à des inversions répétées d'inégalités dans les démonstrations que nous aurons à proposer. Afin d'éviter de telles inversions, nous faisons choix de fonctions croissantes et donc relevant de l'hypothèse (H_2) , dans la section consacrée à l'opérateur de projection nonlinéaire. Même si les applications concernées sont dès lors concaves contrairement à l'habitude, nous avons estimé que les démonstrations paraissaient plus lisibles sous l'hypothèse (H_2) .

Section 4

Schéma classique

4 Schéma classique

Nous présentons succinctement l'approche la plus communément, sinon systématiquement, adoptée pour l'approximation numérique du système équivalent (2.20) (voir toutefois la remarque 4.2 ci-dessous). Selon cette approche, que nous qualifierons de *classique*, le produit non conservatif $(\gamma_\tau - 1)p_\tau \partial_x u$ est rejeté au second membre pour être considéré en tant que terme source et discrétisé par une formule aux différences finies *ad hoc*. Le principal intérêt d'une telle stratégie est, bien entendu, que l'opérateur du premier ordre extrait résultant trouve dès lors une formulation conservative.

Cette dernière est donnée par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = 0, \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec la relation de fermeture habituelle

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right).$$

Notons qu'en accord avec cette approche, la quantité p_τ/ρ s'apparente à une grandeur convectée satisfaisant pour les solutions régulières de (4.1) :

$$\partial_t \frac{p_\tau}{\rho} + u \partial_x \frac{p_\tau}{\rho} = 0. \quad (4.2)$$

Le système (4.1) est hyperbolique mais nous préciserons, toutefois, les inconvénients qui y sont attachés.

Suivant cette approche, nous discrétisons le système (2.20) en adoptant deux pas que nous décrivons ci-dessous.

4.1 Premier pas : Opérateur du second ordre ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)

Supposant connue une solution approchée $\mathbf{v}_h(x, t^n)$ à la date t^n , choisie constante par morceaux, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t p_\tau = (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \end{cases} \quad (4.3)$$

pour la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^n)$.

La densité demeurant constante et par souci de consistance avec les méthodes numériques développées dans les sections suivantes, nous résolvons en lieu et place de (4.3) le système équivalent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$S_\tau = h \left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}} \right).$$

Nous renvoyons le lecteur à la section 5.1 où nous proposerons des formules aux différences finies pour (4.4) assurant l'équivalence au niveau discret avec (4.3) et ce quelque soit le choix de la fonction h vérifiant (H₁) ou (H₂).

4.2 Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$)

En désignant $\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, p_\tau)$, avec des notations classiques, le système considéré lors du second pas trouve la forme condensée suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0.$$

Le résultat suivant met en avant les inconsistances engendrées par une telle approche :

Lemme 4.1

(i) *Le système (4.1) est hyperbolique. Il admet les valeurs propres*

$$u - a, \quad u, \quad u + a \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{\gamma}{\rho} (p + p_\tau).$$

Les valeurs propres $u \pm a$ sont simples et associées à des champs vraiment nonlinéaires tandis que la valeur propre u est double et associée à des champs linéairement dégénérés.

(ii) *Les quantités u et $p + p_\tau$ sont conservées à la traversée d'une discontinuité de contact.*

(iii) *Les solutions régulières du système (4.1) satisfont les lois de conservation supplémentaires :*

$$\partial_t U(\mathbf{u}) + \partial_x F(\mathbf{u}) = 0, \quad U(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{F} \left(\frac{p + p_\tau}{\rho^\gamma} \right), \quad F(\mathbf{u}) = u U(\mathbf{u}),$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application régulière.

(iv) *La solution du problème de Riemann associé à (4.1) satisfait*

$$p(x, t) + p_\tau(x, t) \geq 0, \quad p_\tau(x, t) \geq 0,$$

mais ne satisfait pas nécessairement

$$p(x, t) \geq 0.$$

Nous omettons, ici, la preuve de ce résultat qui s'obtient de façon usuelle (cf. [12], [28], [29] dans le cadre de la dynamique des gaz). Notons que (iv) résulte d'une étude du problème de Riemann de (4.1) proposée par J. M. Hérard [47].

A la lecture du Lemme 4.1, la vitesse du son associée à (4.1) apparaît être toujours inférieure à la vraie vitesse de son c avec

$$c^2 - a^2 = (\gamma_\tau - \gamma) \frac{p_\tau}{\rho},$$

où nous avons supposé $1 < \gamma \leq \gamma_\tau$ et ceci sans restriction puisque les rôles de p et p_τ sont symétriques. Cette inconsistance viole la condition sous caractéristique de Whitam [37] et peut dès lors, dans la pratique, aboutir à des instabilités numériques.

Par ailleurs, les entropies de Lax du système (4.1) ne coïncident avec aucune des entropies de Lax du véritable système du premier ordre extrait de (2.20) lorsque $\gamma \neq \gamma_\tau$ (*i.e.* dès que le système (2.20) est vraiment non conservatif). Cette dernière inconsistance fait que nous ne chercherons pas à établir pour cette approche la violation de la condition de compatibilité (3.11). La lecture des résultats numériques suffira à notre propos.

Remarque 4.2

Contrairement à l'approche classique, nous aurions pu préférer traiter l'équation d'évolution sur p dans son intégrité afin d'éviter toutes les inconsistances liées au rejet des produits non conservatifs au second membre. Cette approche consistante sur le plan continu a par exemple été proposée indépendamment par Forestier-Hérard-Louis [1] et LeRoux-Vatel [3]. Pour des raisons analogues à celles que nous avons développées dans le contexte des équations de Navier-Stokes à une température et que nous développerons dans les sections suivantes, la consistance avec la condition de compatibilité (3.11) ne semble pas pouvoir être espérée. Par ailleurs, il nous a semblé utile d'illustrer numériquement les erreurs liées aux inconsistances dues à l'approche classique (presque) systématiquement mise en oeuvre.

La discrétisation de (4.1) est facilitée par le résultat agréable suivant du à Larrourou [9] :

Lemme 4.3

Considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \tilde{p}) = 0, \\ \partial_t \rho \tilde{E} + \partial_x (\rho \tilde{E} + \tilde{p}) u = 0, \\ \partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

où

$$\rho \tilde{E} = \frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} + \frac{(\rho u)^2}{2\rho}.$$

En posant

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p + p_\tau, \\ \rho \tilde{E} &= \rho E + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma - 1} p_\tau,\end{aligned}$$

alors les systèmes (4.1) et (4.5) admettent les mêmes solutions faibles et sont donc équivalents.

En d'autres termes, (4.1) est équivalent au système Euler 3×3 habituel pour la loi de pression totale apparente $\tilde{p}$ entièrement découplée de l'équation de transport (4.2).

Fort de ce résultat, il est possible d'appliquer les techniques d'approximation des équations d'Euler pour la résolution numérique de (4.1). Nous renvoyons le lecteur à Larroututrou [9] pour les détails, à Godlewski-Raviart [29] pour une présentation générale des méthodes d'approximation numérique associées aux systèmes hyperboliques de loi de conservation.

Ici, nous faisons choix d'une méthode de Roe puisque celle-ci reste la plus couramment utilisée dans les applications, notre propos étant précisément d'illustrer numériquement l'approche que nous avons qualifiée de classique.

4.3 Troisième pas : Prise en compte du “terme source” ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)

Pour conclure l'algorithme, nous avons fait choix d'une formule aux différences finies consistante avec le “terme source” $(\gamma_\tau - 1)p_\tau \partial_x u$ *ad hoc* qui n'a conduit à aucune instabilité numérique de type L^2 dans la pratique.

Section 5

Méthode de type Godunov par projection L^2

5 Méthode de type Godunov par projection L^2

Nous proposons ci-dessous une méthode de pas fractionnaires dédiée à la discrétisation du système équivalent (2.21). Nous démontrerons que cette méthode satisfait toutes les propriétés de stabilité et de précision mises en avant dans l'introduction générale de cette partie. Toutefois, l'analyse détaillée des bilans d'entropie discrets nous permettra de conclure à l'impossibilité de satisfaire la consistance de la présente méthode, "bien que naturelle", avec la condition de compatibilité (3.11).

Les résultats numériques illustreront clairement que la présente méthode conduit, en général, à des erreurs numériques L^1 inacceptables à un degré de raffinement donné.

La violation de la condition de compatibilité sera montrée être exclusivement due à l'erreur de projection L^2 de la variable d'évolution en temps lors du pas consacré à l'approximation du système du premier ordre extrait. En effet, nous proposons ci-dessous une approximation de l'opérateur du second ordre extrait, exempte de toute erreur L^2 dans la représentation des dérivées de la solution discrète (au sens de la remarque 1.9).

5.1 Premier pas : Opérateur dissipatif extrait ($t^n \rightarrow t^{n+1,-}$)

Supposons connue à la date t^n la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, choisie **constante** par morceaux. Nous proposons d'approcher la solution du problème de Cauchy :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (5.1.i)$$

$$\partial_t \rho u = \partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (5.1.ii)$$

$$\partial_t \rho E = \partial_x((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \quad (5.1.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \quad (5.1.iv)$$

associée à la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, à l'aide d'une discrétisation aux différences finies consistante. Celle-ci est choisie implicite en temps afin de s'affranchir d'une limitation de type CFL trop contraignante.

Considérons pour tout $i \in Z$:

$$\rho_i^{n+1,-} = \rho_i^n, \quad (5.2.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1,-} = (\rho u)_i^n + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u)_i}^{n+1,-}, \quad (5.2.ii)$$

$$(\rho E)_i^{n+1,-} = (\rho E)_i^n + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u)_i}^{n+1,-}, \quad (5.2.iii)$$

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,-} = (\rho S_\tau)_i^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2}^{n+1,-}, \quad (5.2.iv)$$

où les opérateurs aux différences finies impliqués trouvent les expressions consistantes suivantes :

$$\overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u)_i}^{n+1,-} = (\mu + \mu_\tau) \frac{1}{\Delta x^2} (M^n u_{i+1} - 2M^n u_i + M^n u_{i-1}), \quad (5.3.i)$$

$$\overline{\partial_x(\mu + \mu_\tau)u\partial_x u_i}^{n+1,-} = (\mu + \mu_\tau) \frac{1}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1})^2 - 2(M^n u_i)^2 + (M^n u_{i-1})^2 \right), \quad (5.3.ii)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} &= \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau - 1}} \overline{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}^{n+1,-} \mu_\tau \\ &\quad \frac{1}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right), \end{aligned} \quad (5.3.iii)$$

avec

$$\overline{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}^{n+1,-} = \begin{cases} \frac{S_{\tau_i}^{n+1,-} - S_{\tau_i}^n}{h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,-}) - h^{-1}(S_{\tau_i}^n)}, & \text{si } S_{\tau_i}^{n+1,-} \neq S_{\tau_i}^n, \\ h'(h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,-})), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.4)$$

L'opérateur M^n désigne, ici, une moyenne en temps définie par

$$M^n X = \frac{X^{n+1,-} + X^n}{2} \quad (5.5)$$

Il importe de noter que (5.3.i) et (5.3.ii) préservent la propriété de conservation des opérateurs exacts concernés. De plus, la formule (5.3.iii) possède bien, et toujours, le signe de $h'(h^{-1}(S_\tau))$.

La densité ρ demeurant inchangée, les équations discrètes (5.2.ii) se trouvent être découplées des autres. Dans la pratique et donc en présence de conditions aux limites, il s'agit de résoudre un problème (matriciel) symétrique défini positif en l'inconnu $M^n u$. Ici et donc pour le problème où i parcourt Z en entier, nous ne cherchons pas à énoncer des conditions assurant l'existence de $M^n u$ et nous l'admettons. Les inconnues $(\rho E)_i^{n+1,-}$ et $(\rho S_\tau)_i^{n+1,-}$ sont ensuite explicitement déterminées.

En effet, la condition $S_{\tau_i}^{n+1,-} \neq S_{\tau_i}^n$, exprimée en (5.4), est équivalente à exiger

$$\left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right) \neq 0.$$

Ainsi dans tous les cas, $S_{\tau_i}^{n+1,-}$ est solution de :

$$S_{\tau_i}^{n+1,-} = h(s_{\tau_i}^{n+1,-}),$$

où par construction $s_{\tau_i}^{n+1,-}$ est donné par la relation explicite :

$$s_{\tau_i}^{n+1,-} = s_{\tau_i}^n + \Delta t \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau}} \frac{\mu_\tau}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right). \quad (5.6)$$

En conséquence, les formules proposées sont indépendantes du choix de h et donc de la variable d'évolution choisie ρS_τ . Cet intérêt est conforté par le résultat suivant :

Lemme 5.1

En adoptant les formules aux différences finies (5.3), les identités suivantes ont lieu simultanément :

$$s(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) = s_i^n + \Delta t \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^\gamma} \frac{\mu}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right), \quad (5.7)$$

et pour toute fonction g vérifiant (H_1) ou (H_2)

$$\{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) = (\rho S)_i^n + \Delta t \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma-1}} \overline{g'(g^{-1}(S))}_i^{n+1,-} \frac{\mu}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right), \quad (5.8)$$

où nous avons posé

$$\overline{g'(g^{-1}(S))}_i^{n+1,-} = \begin{cases} \frac{S_i^{n+1,-} - S_i^n}{g^{-1}(S_i^{n+1,-}) - g^{-1}(S_i^n)}, & \text{si } S_i^{n+1,-} \neq S_i^n, \\ g'(g^{-1}(S_i^{n+1,-})), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.9)$$

Remarque 5.2

Nous aurons à considérer ultérieurement des viscosités fonctions des inconnues. Nous précisons dès maintenant que les résultats obtenus dans cette section au titre de viscosités constantes s'étendent sans difficulté au cas général en adoptant les formules aux différences finies suivantes immédiatement déduites des formules (5.3) :

$$\begin{aligned} \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)\partial_x u_i)}^{n+1,-} &= \frac{1}{\Delta x^2} \\ ((\mu + \mu_\tau)_{i+1/2}^n (M^n u_{i+1} - M^n u_i) + (\mu + \mu_\tau)_{i-1/2}^n (\mu_\tau u_i - M^n u_{i-1})), \end{aligned} \quad (5.10.i)$$

$$\begin{aligned} \overline{\partial_x(\mu + \mu_\tau)u\partial_x u_i}^{n+1,-} &= \frac{1}{2\Delta x^2} \\ ((\mu + \mu_\tau)_{i+1/2}^n ((M^n u_{i+1})^2 - (M^n u_i)^2) - (\mu + \mu_\tau)_{i-1/2}^n ((M^n u_i)^2 - (M^n u_{i-1})^2)), \end{aligned} \quad (5.10.ii)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \overline{h'(h^{-1}(S_\tau))(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} &= \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau - 1}} \overline{h'(h^{-1}(S_\tau))}_i^{n+1,-} \mu_\tau \frac{1}{2\Delta x^2} \\ (\mu_{i+1/2}^n (M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + \mu_{i-1/2}^n (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2), \end{aligned} \quad (5.10.iii)$$

où nous utilisons encore la définition (5.4). Nous avons posé ici $(\mu + \mu_\tau)_{i+1/2}^n = \mu_{i+1/2}^n + \mu_{\tau i+1/2}^n$.

Démonstration du Lemme 5.1

En arguant de l'identité $\rho_i^{n+1,-} = \rho_i^n$, nous calculons directement

$$s(\mathbf{v}_i^{n+1,-}) - s_i^n = \frac{1}{(\rho_i^{n+1,-})^\gamma} \left(p(\mathbf{v}_i^{n+1,-}) - p_i^n \right)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^\gamma} \left((\rho E)_i^{n+1,-} - (\rho E)_i^n - \rho_i^{n+1,-} M^n u_i (u_i^{n+1,-} - u_i^n) - \frac{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} \left(h^{-1} \left(\frac{(\rho S_\tau)_i^{n+1,-}}{\rho_i^{n+1,-}} \right) - h^{-1} \left(\frac{(\rho S_\tau)_i^n}{\rho_i^n} \right) \right) \right),$$

où M^n est défini en (5.5).

Le choix des formules aux différences (5.10) assure la relation

$$(\rho E)_i^{n+1,-} - (\rho E)_i^n - M^n u_i ((\rho u)_i^{n+1,-} - (\rho u)_i^n) - \frac{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} (s_{\tau i}^{n+1,-} - s_{\tau i}^n) = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (\mu_{i+1/2}^n (M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + \mu_{i-1/2}^n (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2),$$

qui n'est autre que la relation attendue. L'identité (5.8) se déduit de (5.7) par un simple jeu d'écriture conduisant à introduire la moyenne consistante (5.9). Ceci conclut la preuve. ■

Nous avons donc prouvé

Lemme 5.3

Les solutions discrètes de tous les systèmes équivalents à (5.1) coïncident dès qu'elles sont construites sur les formules aux différences (5.3), (5.7) ou (5.8).

Remarque 5.4

La précédente preuve indique clairement qu'une autre définition de $\overline{h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,-}}$ ne permet plus de linéariser en s_τ la nonlinéarité :

$$h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}) - h^{-1}(S_{\tau i}^n).$$

Elle indique, de plus, que l'identité

$$\frac{1}{2} \frac{((\rho u)_i^{n+1,-})^2}{\rho_i^{n+1,-}} - \frac{1}{2} \frac{((\rho u)_i^n)^2}{\rho_i^n} = M^n u_i ((\rho u)_i^{n+1,-} - (\rho u)_i^n)$$

est responsable de l'apparition de la moyenne en temps (5.5) dans les formules aux différences (5.3). L'extension des formules (1.17) décrites dans le cadre du système Navier-Stokes à une pression (cf. section 1) est, bien entendu, possible mais il faut alors invoquer la convexité de l'application $\{\rho S\}$ pour conclure à la décroissance de $\{\rho S\}$ et donc faire apparaître une erreur L^2 dans la représentation discrète de l'opérateur $(\partial_x \cdot)^2$. Cette erreur fait perdre le principe d'équivalence discrète énoncé au Lemme 5.3.

Remarque 5.5

La précédente preuve indique, enfin, que c'est l'invariance en temps de la densité au cours de ce pas qui permet d'éviter le recours à la convexité de $\{\rho S\}$ en "figeant" plusieurs des

nonlinéarités et en autorisant la linéarisation, par le choix de la moyenne (5.9), de la relation définissant l'entropie spécifique s . C'est la raison pour laquelle nous adopterons dans ce travail (presque) systématiquement une stratégie de pas fractionnaires séparant l'opérateur du premier ordre des autres opérateurs avec pour souci de minimiser les sources d'erreur L^2 .

Nous disposons donc, au terme de ce premier pas, d'une approximation de l'opérateur du second ordre extrait préservant l'équivalence au niveau discret et vérifiant les propriétés suivantes, énoncées sans démonstration :

Lemme 5.6

Supposons h et g satisfaire (H_1) , respectivement (H_2) , alors les inégalités suivantes ont lieu :

$$S_i^{n+1,-} := S(\mathbf{v}_i^{n+1,-}) \leq S_i^n, \quad (5.11.i)$$

$$S_{\tau_i}^{n+1,-} \leq S_{\tau_i}^n, \quad (5.11.ii)$$

respectivement

$$S_i^{n+1,-} := S(\mathbf{v}_i^{n+1,-}) \geq S_i^n, \quad (5.12.i)$$

$$S_{\tau_i}^{n+1,-} \geq S_{\tau_i}^n. \quad (5.12.ii)$$

5.2 Second pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)

La solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})$, définie à l'instant $t^{n+1,-}$, étant constante par morceaux, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (5.13.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = 0, \quad (5.13.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = 0, \quad (5.13.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u = 0, \quad (5.13.iv)$$

associé au choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})$. Les solutions discontinues du précédent système sont, ici, sélectionnées par les conditions d'entropie suivantes :

$$\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u \leq 0, \quad (5.14)$$

où l'application $\{\rho S\}$ vérifie les hypothèses du Lemme de convexité 2.4. Ici, nous exigeons les précédentes inégalités relatives aux entropies de Lax $(\rho S, \rho S u)$ pour tout choix de g vérifiant (H_1) mais la fonction h , devant vérifier (H_1) et définissant $S_\tau = h(s_\tau)$, doit être comprise comme fixée puisque nous allons projeter l'inconnue ρS_τ . Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Désignons par $\mathbf{v}(x, t)$ la solution faible entropique de (5.13)-(5.14), constituée, pour des temps suffisamment petits, de la juxtaposition sans interaction de la solution, notée $w(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})$, des problèmes de Riemann posé à chaque interface.

Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_i(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}, \quad (5.15)$$

définissons les valeurs moyennes pour $i \in Z$:

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{v}(x, \Delta t) dx. \quad (5.16)$$

Nous achevons ainsi la description de l'algorithme:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u\}_{i+1/2}^{n+1,-}, \quad (5.17.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u^2 + p + p_\tau\}_{i+1/2}^{n+1,-} + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u)_i}^{n+1,-}, \quad (5.17.ii)$$

$$(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i+1/2}^{n+1,-} + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)u \partial_x u)_i}^{n+1,-}, \quad (5.17.iii)$$

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^{n+1,-} + \Delta t \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2, \quad (5.17.iv)$$

où Δ_i trouve la définition suivante:

$$\Delta_i X = X_{i+1} - X_i.$$

Ici, et par exemple pour (5.17.i), la fonction flux numérique coïncide avec celle de Godunov

$$\{\rho u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = \{\rho u\}(w(0^+; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})),$$

où $w(\cdot; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})$ désigne la solution du problème de Riemann posé à l'interface $x_{i+1/2}$.

Au terme de ce dernier pas, nous énonçons avec des notations claires le résultat suivant en précisant de nouveau que la fonction h définissant S_τ et vérifiant (H₁) (ou (H₂)) doit être comprise comme fixée alors que le choix de g est libre tant que g satisfait (H₁) (ou (H₂)):

Théorème 5.7

Sous la condition CFL (5.15), les principes du maximum suivants sont satisfaits:

$$S_i^{n+1} := \frac{1}{\rho_i^{n+1}} \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1} \right) \leq \max \left(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n \right), \quad (5.18.i)$$

$$S_{\tau i}^{n+1} \leq \max \left(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n \right), \quad (5.18.ii)$$

dès que h et g satisfont (H_1) . Si h et g satisfont (H_2) , alors elles doivent être remplacées par

$$S_i^{n+1} \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (5.19.i)$$

$$S_{\tau_i}^{n+1} \geq \min(S_{\tau_{i-1}}^n, S_{\tau_i}^n, S_{\tau_{i+1}}^n). \quad (5.19.ii)$$

Par ailleurs, les inégalités d'entropie précisées suivantes ont lieu :

$$\{\rho S\}(\mathbf{v}_i^{n+1}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = -\mathcal{E}_i^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2}_i^{n+1,-}, \quad (5.20)$$

où nous avons utilisé les formules (5.8) et (5.9), et les définitions

$$\{\rho S u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = \{\rho S u\}(w(0^+; \mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-})), \quad (5.21)$$

et

$$\mathcal{E}_i^n = -\{\rho S\}(\mathbf{v}_i^{n+1}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1,2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx - \sum_{\text{choc}} (-\sigma[\rho S] + [\rho S u]), \quad (5.22)$$

où σ désigne la vitesse des ondes de choc éventuellement concernées.

Avant de donner la preuve de ce résultat, nous assurons la positivité des pressions par

Lemme 5.8

Sous la condition CFL (5.15), le schéma par projection L^2 préserve la positivité des pressions p et p_τ dès que la densité est positive.

Démonstration du Lemme 5.8

Supposons h et g satisfaire (H_1) , la preuve dans le cas où (H_2) est satisfaite par h et g étant similaire. En invoquant (5.18), la décroissance de h et g implique

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &\geq (\rho_i^{n+1})^\gamma g^{-1} \left(\max(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n) \right), \\ p_{\tau_i}^{n+1} &\geq (\rho_i^{n+1})^\gamma h^{-1} \left(\max(S_{\tau_{i-1}}^n, S_{\tau_i}^n, S_{\tau_{i+1}}^n) \right), \end{aligned}$$

qui n'est autre que le résultat attendu en raison de la positivité de h^{-1} et g^{-1} . ■

Nous donnons à présent la preuve du Lemme 5.7 :

Démonstration du Lemme 5.7

Nous ne donnons pas la preuve des inégalités d'entropie précisées (5.20) car sous cette forme elles sont classiques. Soulignons simplement que l'identité (5.8) est responsable de l'expression de $\mathcal{E}_i^n$: i.e. l'erreur dans le bilan d'entropie n'est due qu'au choix de la variable d'évolution $\mathbf{v}$ et de sa projection L^2 (5.16).

Montrons les principes du maximum attendus.

Les entropies ρS_τ et ρS jouant des rôles dissymétriques lors du second pas, la première est conservée, la seconde ne l'est pas; les preuves s'appuieront sur des arguments différents. Le premier fait appel à la propriété de S_τ d'être une grandeur transportée et à des propriétés exhibées à ce titre par Larrouturou [20]. Le second fait appel à une propriété exhibée par Tadmor [35] qui assure en substance un principe du maximum, respectivement minimum, pour S dès que l'application $\{\rho S\}$ est convexe, respectivement concave (voir également Perthame [36]).

Bien que désormais classiques, nous rappelons ces deux principes ainsi que leur conséquence pour une méthode de Godunov car nous aurons à "combiner" ces deux principes lors de la prochaine section où nous devrons re-symétriser les rôles de ρS et ρS_τ .

Concernant, dans un premier temps, l'entropie ρS_τ , S_τ possède d'après le choix du système (5.13) la propriété d'être solution d'une équation de transport :

$$\partial_t \rho X + \partial_x \rho X u = 0,$$

i.e.

$$\partial_t X + u \partial_x X = 0,$$

où il n'y a pas d'ambiguïté puisque $[X] = 0$ à la traversée d'une k-onde de choc avec $k=1$ ou 3 et $[u] = 0$ à la traversée de la discontinuité de contact.

Nous avons en conséquence, le résultat suivant, que nous invoquerons par la suite :

Lemme 5.9

Soient $\mathbf{v}_L$ et $\mathbf{v}_R$ deux états fixés. Désignons par $w(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ la solution du problème de Riemann associée au système (5.13). Alors, l'entropie spécifique S_τ , associée à $w(\cdot; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ vérifie

$$X\left(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) = \begin{cases} X_L, & \frac{x}{t} < u^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R), \\ X_R, & \frac{x}{t} > u^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R), \end{cases}$$

où $u^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ désigne la vitesse de la discontinuité de contact éventuelle et $X(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ vaut $S_\tau(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$.

Une conséquence de ce résultat est que sous la condition CFL (5.15), les moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{\rho X}_L &= \frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \rho\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) X\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) dx \\ &= (\rho X)_L - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left((\rho X u)(w(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) - (\rho X u)_L \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\rho X}_R &= \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \rho\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) X\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) dx \\ &= (\rho X)_R - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left((\rho X u)_R - (\rho X u)(w(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \right), \end{aligned}$$

vérifient le principe du maximum suivant :

$$\min(X_L, X_R) \leq \overline{X_L} \quad \text{et} \quad \overline{X_R} \leq \max(X_L, X_R), \quad (5.23)$$

où nous avons posé

$$\overline{X_L} = \frac{\overline{\rho X_L}}{\overline{\rho_L}} \quad \text{et} \quad \overline{X_R} = \frac{\overline{\rho X_R}}{\overline{\rho_R}},$$

avec, bien entendu,

$$\overline{\rho_L} = \frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \rho\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) dx \quad \text{et} \quad \overline{\rho_R} = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \rho\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R\right) dx.$$

De plus, nous avons la formule suivante, due à Larrouturou [20] :

$$(\rho Xu)(w(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) = (\rho u)(w(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \times \begin{cases} X_L & \text{si } (\rho u)(w(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) > 0, \\ X_R & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.24)$$

La preuve des principes (5.18.ii) et (5.19.ii), relatifs à S_τ , se déduit aisément de (5.23) sous la condition CFL (5.15) en invoquant les inégalités (5.11.ii) et (5.12.ii) obtenues lors du premier pas.

Nous donnons maintenant la preuve des inégalités analogues portant sur S .

Nous calquons, ici, une preuve due à Coquel-Perthame [30] dont nous aurons à reprendre plus loin certains éléments.

Pour toute paire d'états $(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$, S reste constante dans les régions de régularité de la solution du problème de Riemann. Par ailleurs, à la traversée d'une discontinuité nous avons (cf. Lemme 2.9)

$$\mathcal{M}(S_+ - S_-) \leq 0,$$

où nous avons supposé l'application $\{\rho S\}$ convexe. Ici,

$$\mathcal{M} = \rho_+(u_+ - \sigma) = \rho_-(u_- - \sigma)$$

désigne le débit exprimé dans le repère de la discontinuité. Rappelons, en vertu des théorèmes 2.7 et 2.8, que $\mathcal{M} = 0$ pour une discontinuité de type contact, $\mathcal{M} > 0$ pour une 1-onde de choc et $\mathcal{M} < 0$ pour une 3-onde de choc. Nous avons donc clairement

$$S(w(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \leq S(\mathbf{v}_L) \quad \text{pour } \xi < u^*, \quad (5.25.i)$$

$$S(w(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \leq S(\mathbf{v}_R) \quad \text{pour } \xi > u^*, \quad (5.25.ii)$$

où u^* désigne la vitesse de propagation de la discontinuité de contact éventuelle.

Dès lors, sous la condition CFL (5.15), nous avons

$$S(\mathbf{v}(x, \Delta t)) \leq \max(S_{i-1}^{n+1,-}, S_i^{n+1,-}, S_{i+1}^{n+1,-}), \quad x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}),$$

et puisque la densité reste positive :

$$\{\rho S\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) \leq \rho(x, \Delta t) \max(S_{i-1}^{n+1,-}, S_i^{n+1,-}, S_{i+1}^{n+1,-}), \quad x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}).$$

En invoquant la convexité de $\{\rho S\}$, nous déduisons donc que pour chaque cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} S_i^{n+1} &\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx, \\ &\leq \rho_i^{n+1} \max(S_{i-1}^{n+1,-}, S_i^{n+1,-}, S_{i+1}^{n+1,-}), \end{aligned}$$

d'où la conclusion attendue en vertu du Lemme 5.6. ■

Notre propos est, à présent, d'établir que le schéma par projection L^2 , que nous venons d'introduire, vérifie un ensemble complet d'inégalités d'entropie discrètes. L'examen des bilans d'entropie précisés nous permettra de conclure que ce schéma viole la condition de compatibilité (3.11) bien qu'il satisfasse toutes les autres propriétés escomptées.

Au terme du second et dernier pas de la présente méthode, l'inconnue ρS_τ , où S_τ est définie relativement à $\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}$ par le choix de la fonction h fixée, vérifie

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)^2}_i^{n+1,-},$$

où nous avons utilisé la formule aux différences (5.3.iii) ainsi que les fonctions flux numérique dont la définition est donnée par (5.21).

Nous précisons le devenir de cette égalité obtenue par construction et ce pour d'autres couples $(\rho H(s_\tau), \rho H(s_\tau)u)$. Soulignons que nous cherchons à estimer

$$\rho_i^{n+1} H(s_{\tau_i}^{n+1}) - \rho_i^n H(s_{\tau_i}^n) \quad \text{avec} \quad s_{\tau_i}^{n+1} = h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1}),$$

c'est à dire pour la méthode numérique définie par projection de la variable $\rho h(s_\tau)$, et non par projection de $\rho H(s_\tau)$ qui est ici fonction des variables $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$.

De manière à simplifier l'exposé, nous écrivons dans la suite :

$$H = \varphi \circ h,$$

où φ devra vérifier les conditions suivantes :

(H₃) : φ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, strictement croissante, strictement convexe.

de sorte que nous avons la propriété de convexité suivante où nous avons posé

$$S_{\tau\varphi} = \varphi(S_\tau).$$

Lemme 5.10

Supposons h satisfaire la condition (H_1) .

(i) φ satisfaisant (H_3) , l'application $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \rightarrow \{\rho S_{\tau\varphi}\}$ définie par

$$\{\rho S_{\tau\varphi}\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) = \rho \varphi \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \quad (5.26)$$

est convexe (et non strictement).

(ii) ψ satisfaisant (H_3) , l'application $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_{\tau\psi}) \rightarrow \{\rho S\}_\psi$ définie par

$$\{\rho S\}_\psi(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_{\tau\psi}) = \rho g \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} (\psi \circ h)^{-1} \left(\frac{\rho S_{\tau\psi}}{\rho} \right) \right) \right)$$

où g vérifie la condition (H_2) , est strictement convexe.

Démonstration du Lemme 5.10

Concernant l'assertion (i), un calcul direct la matrice hessienne de l'application (5.26) de montre que les mineurs sont tous positifs ou nuls dès que φ est (strictement) convexe.

Afin d'établir l'assertion (ii), vérifions que l'application $\psi \circ h$ vérifie (H_1) dès que h vérifie (H_1) . Un calcul direct conduit en effet à :

$$\begin{aligned} (\psi \circ h)'(x) &= h'(x) \psi'(h(x)) < 0, \\ \frac{(\psi \circ h)''}{(\psi \circ h)'}(x) &= \frac{h''(x)}{h'(x)} + h'(x) \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} < \frac{h''(x)}{h'(x)}, \end{aligned}$$

pour tout x positif et ce grâce à l'hypothèse (H_3) ainsi qu'à la décroissance de la fonction h . Ce qui permet donc de conclure. ■

Armés de ces propriétés, nous énonçons le premier résultat suivant :

Lemme 5.11

Sous la condition CFL (5.15), l'inégalité d'entropie précisée suivante à lieu :

$$\begin{aligned} \{\rho S_{\tau\varphi}\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - \rho_i^n \varphi(S_{\tau_i}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho \varphi(S_\tau) u\}_{i+1/2}^{n+1,-} = \\ -(\mathcal{E}_\varphi)_i^{n+1,-} + \Delta t \mu_\tau \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^n)^{\gamma_\tau - 1}} (\varphi \circ h)'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x u)_i^{2^{n+1,-}}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

où la formule aux différences (5.3.iii) appliquée à H définit la moyenne utilisée, la fonction flux numérique étant définie de façon analogue à (5.21). Dans (5.27), nous avons par construction

$$\rho_i^{n+1} \varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) = \{\rho S_{\tau\varphi}\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1})$$

et par définition

$$(\mathcal{E}_\varphi)_i^n = -\rho_i^{n+1}\varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) + \rho_i^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\{\rho S_\tau\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx}{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx}\right) \geq 0, \quad (5.28)$$

$\mathbf{v}$ désignant la solution du problème de Cauchy (5.13).

L'inégalité précédente étant en général stricte, ce résultat exprime que la solution discrète déduite de la projection de ρS_τ est distincte de la solution discrète que l'on aurait obtenue en projetant $\rho\varphi(S_\tau)$. La preuve de ce résultat, donnée ci après, montrera que les solutions discontinues du système (5.13) vérifient la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t \rho\varphi(S_\tau) + \partial_x \rho\varphi(S_\tau) = 0$$

qui peut dès lors concourir à définir un système équivalent en remplaçant la variable ρS_τ par $\rho\varphi(S_\tau)$. L'équivalence discrète est, toutefois, perdue comme l'indique l'inégalité précisée (5.27).

Démonstration du Lemme 5.11

La démonstration est donnée en deux temps correspondant aux deux pas composant la méthode.

A l'issue du premier pas, l'identité (5.7) et le Lemme 5.3 assurent l'inégalité suivante :

$$\rho_i^{n+1,-}\varphi(S_{\tau_i}^{n+1,-}) - \rho_i^n\varphi(S_{\tau_i}^n) = \Delta t \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^n)^{\gamma_\tau - 1}} \overline{H'(h^{-1}(S_\tau))(\partial_x u)^2_i}^{n+1,-},$$

avec la formule aux différences (5.3.iii) appliquée à $H = \varphi \circ h$.

Ecrivons qu'au terme du second pas et par définition :

$$S_{\tau_i}^{n+1} = \frac{(\rho S_\tau)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S_\tau\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx,$$

soit dès lors

$$\varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) = \varphi\left(\frac{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S_\tau\}(x, \Delta t) dx}{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx}\right).$$

En constatant que

$$d\nu = \frac{\rho(x, \Delta t) dx}{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx}$$

définit une mesure de probabilité, *i.e.* positive et de masse unité sur $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, l'inégalité de Jensen implique, en vertu de la convexité de φ , l'inégalité suivante :

$$\varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) \leq \frac{1}{\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho\varphi(S_\tau)\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx,$$

soit

$$\rho_i^{n+1} \varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) \leq \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho \varphi(S_{\tau})\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx.$$

Puisque S_{τ} est une grandeur transportée, l'application du lemme 5.9 relatif aux grandeurs transportées, avec $X = \varphi(S_{\tau})$, montre que $\varphi(S_{\tau})$ vérifie en réalité, pour les solutions du problème de Cauchy (5.13), la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t \rho \varphi(S_{\tau}) + \partial_x \rho \varphi(S_{\tau}) u = 0.$$

Il vient donc des formules de projection (5.16) et sous la condition CFL (5.15) :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho \varphi(S_{\tau})\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx = \rho_i^{n+1, -} \varphi(S_{\tau_i}^{n+1, -}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho \varphi(S_{\tau}) u\}_{i+1/2}^{n+1, -}, \quad (5.29)$$

où les flux numériques impliqués sont définis par (5.21). Nous venons donc d'établir (5.27). ■

Ayant exhibé les inégalités d'entropie précisées (5.27), valables pour tous les couples d'entropie de Lax $(\rho S_{\tau \varphi}, \rho S_{\tau \varphi} u)$, nous considérons à présent les couples d'entropie de Lax $(\{\rho S\}_{\psi}, \{\rho S\}_{\psi} \frac{\rho u}{\rho})$ pour énoncer la tautologie suivante :

Lemme 5.12

L'identité suivante à lieu :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}_{\psi}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, \rho_i^{n+1} \psi(S_{\tau_i}^{n+1})) = \\ \{\rho S\}_{\psi}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_{\tau})_i^{n+1}), \end{aligned} \quad (5.30)$$

et plus généralement, pour tout état $\mathbf{v} \in \Omega$,

$$\{\rho S\}_{\psi}(\rho, (\rho u), (\rho E), \rho S_{\tau \psi}) = \{\rho S\}_{\psi}(\rho, (\rho u), (\rho E), (\rho S_{\tau})),$$

avec

$$S_{\tau \psi} = \psi(S_{\tau}),$$

et ce pour toute fonction ψ .

Nous avons pris soin d'écrire (5.30) afin de souligner que $(\rho S_{\tau \psi})_i^{n+1}$ doit être défini par $\rho_i^{n+1} \psi(S_{\tau_i}^{n+1})$ et non par la projection L^2 de $\{\rho \psi(S_{\tau})\}(\mathbf{v}(x, \Delta t))$ sur la cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. L'identité (5.27) aurait, bien entendu, été faussée.

En conséquence de cette tautologie, nous avons

Corollaire 5.13

Fixons la fonction g , supposée satisfaire (H_1) ou (H_2) , alors l'erreur de projection L^2 , donnée par

$$\begin{aligned} -\{\rho S\}_{\psi}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, \rho_i^{n+1} \psi(S_{\tau_i}^{n+1})) + \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S\}_{\psi}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx - \sum_{\text{choc}} \left(-\sigma[\{\rho S\}_{\psi}] + [\{\rho S\}_{\psi} u] \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

est indépendante du choix de la fonction ψ et ne dépend que de la fonction h . Elle coïncide donc avec la formule d'erreur (5.22).

Armé du Lemme 5.12 et du Corollaire 5.13, nous sommes en mesure de conclure par

Théorème 5.14

Le schéma par projection L^2 , défini par (5.2)-(5.3)-(5.17) ne satisfait pas la condition de compatibilité (3.11).

En d'autres termes, il n'existe pas de couple de fonctions φ et ψ vérifiant (H_1) ou (H_2) telle que les bilans d'entropie discrets relatifs aux paires

$$(\rho S_{\tau\varphi}, \rho S_{\tau\varphi} u) \quad \text{et} \quad (\{\rho S\}_\psi, \{\rho S\}_\psi u)$$

s'annulent systématiquement simultanément.

Démonstration du Théorème 5.14

Supposons que la solution discrète à l'instant t^n est telle que dans un voisinage de la cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ pour un i fixé, S_τ est constant et reste égal à cette valeur sur la cellule considérée à l'instant t^{n+1} . Il suffit par exemple de considérer une donnée initiale pour laquelle S_τ et u sont uniformément constants et d'analyser la méthode au premier pas. Ici, bien entendu, les autres variables ne sont pas supposées constantes sur $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t^n, t^{n+1})$.

Sous de telles hypothèses, nous avons en arguant de la formule de flux de type Larroutou, l'identité suivante valable pour toute fonction φ :

$$\rho_i^{n+1} \varphi(S_{\tau_i}^{n+1}) = \varphi(S_{\tau_i}^n) \times \left\{ \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u\}_{i+1/2}^n \right\},$$

puisque à l'issue du premier pas $S_\tau(x, \Delta t)$ étant une fonction constante sur la cellule considérée, l'examen de la formule d'erreur de projection (5.28) relative à $(\rho S_{\tau\varphi}, \rho S_{\tau\varphi} u)$ assure que celle-ci s'annule.

Puisque $S_{\tau_i}^{n+1} = S_{\tau_i}^n$ par hypothèse, l'identité suivante est trivialement vérifiée en vertu de la relation précédente :

$$(\rho\varphi(S_\tau))_i^{n+1} - (\rho\varphi(S_\tau))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho\varphi(S_\tau)u\}_{i+1/2}^n = 0,$$

en particulier pour toute fonction φ relevant de l'hypothèse (H_3) de sorte que $\rho\varphi \circ h(S_\tau)$ est bien une application convexe de ses arguments.

Si la condition de compatibilité (3.11) devait être satisfaite, il existerait nécessairement une fonction g telle que le bilan d'entropie discret associé à ρS s'annule également sur la cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ à la date considérée. L'examen du bilan d'entropie discret concerné montre qu'il n'en est rien sauf à violer les hypothèses de convexité. Ceci conclut la preuve. ■

5.3 Mise en oeuvre numérique

La méthode de pas fractionnaire précédemment introduite est appliquée à l'obtention de solutions approchées du système équivalent (2.21). Notre propos est de comparer numériquement l'approche que nous avons qualifiée de classique à la présente stratégie de projection L^2 .

Puisque nous avons privilégié la méthode de Roe dans le cadre dit classique, nous adoptons ici une linéarisation de Roe pour l'approximation de chacun des problèmes de Riemann (5.13). Il est bien connu que sans correction, une méthode de Roe n'est pas consistante avec les inégalités d'entropie (5.20) et qu'en conséquence l'argumentation précédemment développée ne s'applique pas. Il aurait été possible d'appliquer à notre contexte la méthode de relaxation d'énergie proposée récemment par Coquel-Perthame [30] de manière à préserver point par point l'argumentation précédente tout en assurant une propriété de précision de la méthode de Roe : l'exacte capture des discontinuités de contact stationnaires.

Nous n'avons, volontairement, pas choisi cette direction et ce exclusivement de manière à assurer la consistance dans la comparaison de l'ensemble des méthodes d'approximation proposées dans ce travail. Notons que nous n'avons pas observé de violation de positivité pour le présent algorithme sur l'ensemble des tests numériques proposés.

Dans ce contexte, nous décrivons la linéarisation de type Roe que nous avons adoptée. En utilisant les notations classiques

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= {}^T(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau), \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= {}^T(\rho u, \rho u^2 + p + p_\tau, (\rho E + p + p_\tau)u, \rho S_\tau u),\end{aligned}$$

le système (5.13) trouve la forme condensée suivante :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0. \quad (5.32)$$

Nous introduisons les notations

$$\kappa = \gamma - 1, \quad \kappa_\tau = \gamma_\tau - 1 \quad \text{et} \quad H = \frac{\rho E + p + p_\tau}{\rho}.$$

De plus, conformément à ce qui précède, nous posons :

$$p = \rho^\gamma g(S) \quad \text{et} \quad p_\tau = \rho^{\gamma_\tau} h(S_\tau). \quad (5.33)$$

Nous rappelons qu'une linéarisation de type Roe, notée $\mathbf{A}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$, doit satisfaire les trois propriétés suivantes pour tout $(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \in \Omega^2$ et tout $\mathbf{v} \in \Omega$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad \text{est diagonalisable à valeurs propres réelles,} \quad (5.34.i)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \cdot (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_L), \quad (5.34.ii)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{v}). \quad (5.34.iii)$$

Sur la base de récents travaux (Coquel-Marmignon [18], Abgrall [19]), nous considérons la moyenne suivante de la matrice Jacobienne du flux exact :

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{u}^2 + \partial_\rho(\widetilde{p + p_\tau}) & (2 - \kappa)\bar{u} & \kappa & \partial_{\rho S_\tau}(\widetilde{p + p_\tau}) \\ -\bar{H}\bar{u} + \bar{u}\partial_\rho(\widetilde{p + p_\tau}) & \bar{H} - \kappa\bar{u}^2 & \gamma\bar{u} & \bar{u}\partial_{\rho S_\tau}(\widetilde{p + p_\tau}) \\ -\bar{u}\bar{S}_\tau & \bar{S}_\tau & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

La notation $\bar{X}$ désigne la moyenne de Roe

$$\bar{X} = \frac{\sqrt{\rho_L}X_L + \sqrt{\rho_R}X_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Il est important de rappeler que la moyenne de Roe classique est motivée par l'existence d'un jeu de variables pour lesquelles les nonlinéarités présentes dans le flux exact trouvent une forme quadratique. Il est bien connu que l'opération de moyenne des dérivées partielles thermodynamiques doit conduire à une reconstruction du saut de pression en fonction du saut des variables conservatives, *i.e.* $\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L$. En conséquence, nous définissons

$$\partial_\rho(\widetilde{p + p_\tau}) = \overline{\partial_\rho p} + \widehat{\partial_\rho p_\tau}, \quad (5.36)$$

$$\partial_{\rho S_\tau}(\widetilde{p + p_\tau}) = \widehat{\partial_{\rho S_\tau} p} + \partial_{\rho S_\tau} \widehat{p_\tau}, \quad (5.37)$$

où nous avons posé

$$\overline{\partial_\rho p} = \frac{\kappa}{2}\bar{u}^2 - \frac{\kappa}{\kappa_\tau}\widehat{\partial_\rho p_\tau}, \quad (5.38)$$

$$\widehat{\partial_{\rho S_\tau} p} = -\frac{\kappa}{\kappa_\tau}\partial_{\rho S_\tau} \widehat{p_\tau}. \quad (5.39)$$

La matrice de Roe ainsi proposée doit satisfaire les conditions de consistance (5.34). Un simple calcul met en évidence que la condition (5.34.ii) est réalisée si et seulement si

$$\Delta p_\tau = \widehat{\partial_\rho p_\tau} \Delta \rho + \partial_{\rho S_\tau} \widehat{p_\tau} \Delta \rho S_\tau, \quad (5.40)$$

où $\Delta X = X_R - X_L$ désigne le saut de la quantité X , car alors Δp est *ipso facto* correctement reconstruit.

Afin de vérifier (5.40), il nous faut déterminer $\widehat{\partial_\rho p_\tau}$ et $\partial_{\rho S_\tau} \widehat{p_\tau}$ qui représentent des quantités moyennes de

$$\partial_\rho p_\tau = \kappa_\tau (\gamma_\tau \rho^{\gamma_\tau - 1} h(S_\tau) - S_\tau \rho^{\gamma_\tau - 1} h'(S_\tau)), \quad (5.41)$$

$$\partial_{\rho S_\tau} p_\tau = \kappa_\tau \rho^{\gamma_\tau - 1} h'(S_\tau). \quad (5.42)$$

En considérant (x_R, x_L) et (y_R, y_L) deux couples de réels donnés et (τ_R, τ_L) un couple de réels donné tel que $\tau_R + \tau_L \neq 0$, l'opérateur de τ -moyenne suivant est considéré :

$$\frac{\tau \leftrightarrow x}{\tau_R + \tau_L} = \frac{\tau_R x_R + \tau_L x_L}{\tau_R + \tau_L}, \quad \frac{\tau \leftrightarrow y}{\tau_R + \tau_L} = \frac{\tau_L y_R + \tau_R y_L}{\tau_R + \tau_L}.$$

L'identité suivante est alors satisfaite (voir par exemple Abgrall [19], Coquel-Marmignon [18], Godlewski-Raviart [29]) :

$$\Delta xy = \frac{\tau \xleftrightarrow{\varphi}}{x} \Delta y + \frac{\tau \xleftrightarrow{\varphi}}{y} \Delta x.$$

Au vu de la loi (5.33), l'identité discrète (5.40) requise peut être écrite :

$$\Delta \rho^{\gamma_\tau} h(S_\tau) = \partial_\rho \widehat{\rho^{\gamma_\tau} h}(S_\tau) \Delta \rho + \partial_{\rho S_\tau} \widehat{\rho^{\gamma_\tau} h}(S_\tau) \Delta \rho S_\tau. \quad (5.43)$$

Cette condition de consistance met en jeu les incréments des variables conservatives ρ et ρS_τ tandis que les nonlinéarités impliquées sont exprimées en terme de ρ et S_τ . Afin de rendre possible la linéarisation nous proposons une famille de moyenne de (5.41) et (5.42) mettant en oeuvre la φ -moyenne précédemment introduite :

$$\partial_\rho \widehat{\rho^{\gamma_\tau} h}(S_\tau) = \gamma_\tau (\rho^{\gamma_\tau - 1} \widehat{h}(S_\tau)) - \rho^{\gamma_\tau - 1} \widehat{h'}(S_\tau) \overline{S_\tau} \quad \text{et} \quad \partial_{\rho S_\tau} \widehat{\rho^{\gamma_\tau} h}(S_\tau) = \rho^{\gamma_\tau - 1} \widehat{h'}(S_\tau),$$

avec

$$\gamma_\tau (\rho^{\gamma_\tau - 1} \widehat{h}(S_\tau)) = \begin{cases} \frac{\varphi(\rho) \xleftrightarrow{\varphi}}{h(S_\tau)} \frac{\Delta \rho^{\gamma_\tau}}{\Delta \rho} & \text{si } \rho_R \neq \rho_L, \\ \frac{\varphi(\rho) \xleftrightarrow{\varphi}}{h(S_\tau)} \gamma_\tau \rho^{\gamma_\tau - 1} & \text{si } \rho_R = \rho_L, \end{cases}$$

$$\rho^{\gamma_\tau - 1} \widehat{h'}(S_\tau) = \begin{cases} \frac{\varphi(\rho) \xleftrightarrow{\varphi}}{\rho^{\gamma_\tau}} \frac{\Delta h(S_\tau)}{\Delta S_\tau} & \text{si } S_{\tau R} \neq S_{\tau L}, \\ \frac{\varphi(\rho) \xleftrightarrow{\varphi}}{\rho^{\gamma_\tau}} \frac{\rho}{\rho} h'(S_\tau) & \text{si } S_{\tau R} = S_{\tau L}, \end{cases}$$

où φ est une fonction positive de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\underline{\rho} = \sqrt{\rho_R} \sqrt{\rho_L}$.

Le choix de ces opérateurs de moyenne conduit au résultat suivant :

Lemme 5.15

Pour les opérateurs de moyenne précédemment définis, la matrice linéarisée de Roe, définie par (5.35), satisfait les propriétés (5.34.ii) et (5.34.iii) quelque soit le choix de la fonction φ .

Fort de ce résultat, nous considérons l'étude de la validité de la condition d'hyperbolicité (5.34.i). Nous n'émettons aucune hypothèse sur le signe de $\gamma_\tau - \gamma$ et il est possible de montrer ([18]) :

Lemme 5.16

Supposons la fonction φ définie par :

$$\varphi(\rho) = \rho^{\gamma_\tau - \frac{1}{2}}.$$

Alors, pour les opérateurs de moyenne précédemment définis, la matrice linéarisée de Roe, définie par (5.35), satisfait la propriété (5.34.i). Cette matrice admet les valeurs propres suivantes :

$$\bar{u} - \sqrt{\bar{c}^2}, \quad \bar{u}, \quad \bar{u} + \sqrt{\bar{c}^2},$$

où

$$\bar{c}^2 = \kappa(\bar{H} - \bar{u}^2) + \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_\tau}\right) \frac{\varphi(\rho) \hookrightarrow}{h(S_\tau)} \frac{\Delta \rho^{\gamma_\tau}}{\Delta \rho} \geq 0.$$

Remarque 5.17

Il est important de noter que la propriété (5.34.i) est satisfaite pour toute fonction φ si $\gamma < \gamma_\tau$. Cette inégalité, relatives aux coefficients adiabatiques, résulte du fait que nous avons privilégié l'entropie ρS_τ . Il est clair que, si dans la méthode précédente l'entropie ρS avait été privilégiée, la condition (5.34.i) aurait été satisfaite pour toute fonction φ dès que $\gamma_\tau < \gamma$.

Nous sommes alors en mesure de donner une expression des flux numériques. Ceux-ci étendent, dans le contexte de cette étude, de récents travaux relatifs à des mélanges de gaz caloriquement parfait (Larrouturou [20]) et à la dynamique des gaz faiblement ionisés [18].

Afin de simplifier les expressions des flux, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \phi^\pm &= \frac{|\bar{u} \pm \sqrt{\bar{c}^2}|}{2\bar{c}^2} \left(\Delta(p + p_\tau) \pm \rho \sqrt{\bar{c}^2} \Delta u \right), \quad \phi^0 = \frac{|\bar{u}|}{\bar{c}^2} \left(\bar{c}^2 \Delta \rho - \Delta(p + p_\tau) \right) \\ \text{et } \Theta &= |\bar{u}| \left(\Delta \rho E - \bar{H} \Delta \rho - \rho \bar{u} \Delta u \right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

A l'aide de ces notations et en posant

$$\Phi = \phi^- + \phi^0 + \phi^+ \quad \text{et} \quad \Psi = \phi^+ - \phi^-, \quad (5.45)$$

il peut être montré que les flux numériques de la méthode de Roe se réexpriment de la façon suivante :

$$f_\rho(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{v}_L)_\rho + \mathbf{f}(\mathbf{v}_R)_\rho - \Phi \right\}, \quad (5.46.i)$$

$$f_{\rho u}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{v}_L)_{\rho u} + \mathbf{f}(\mathbf{v}_R)_{\rho u} - \left(\Phi \bar{u} + \sqrt{\bar{c}^2} \Psi \right) \right\}, \quad (5.46.ii)$$

$$f_{\rho E}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{v}_L)_{\rho E} + \mathbf{f}(\mathbf{v}_R)_{\rho E} - \left(\Phi \bar{H} + \bar{u} \sqrt{\bar{c}^2} \Psi + \Theta \right) \right\}, \quad (5.46.iii)$$

$$f_{\rho S_\tau}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{v}_L)_{\rho S_\tau} + \mathbf{f}(\mathbf{v}_R)_{\rho S_\tau} - \left(\Phi \bar{S}_\tau - |\bar{u}| (\bar{S}_\tau \Delta \rho - \Delta \rho S_\tau) \right) \right\}. \quad (5.46.iv)$$

En conséquence, la solution discrète de (5.13) est donnée par

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n+1,-} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(\mathbf{v}_i^{n+1,-}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1,-}) - f(\mathbf{v}_{i-1}^{n+1,-}, \mathbf{v}_i^{n+1,-}) \right). \quad (5.47)$$

La dissipation est introduite en utilisant les formules aux différences finies (5.3) décrites lors du premier pas.

Section 6

Méthodes de type Godunov par projection nonlinéaire

6 Méthodes de type Godunov par projection nonlinéaire

Les développements proposés lors de la précédente section suggèrent clairement les quelques remarques suivantes.

S'il est possible d'éviter une erreur L^2 de représentation des dérivées de la solution discrète, il semble en revanche impossible d'éviter, lors du pas dévolu au système du premier ordre extrait, l'erreur de projection L^2 liée au choix des variables d'évolution $(\rho, \rho u, \rho E, \cdot)$ ayant nécessairement conduit soit ρS soit ρS_τ à être une entropie de Lax. Cette erreur a été montrée s'opposer à la satisfaction de la condition de compatibilité proposée. En ce sens, nous violons la condition de saut généralisée (2.19) ainsi que l'illustrent les expériences numériques présentées ci-après.

Nous montrons ci-dessous, comment satisfaire cette condition de compatibilité et obtenir un bien meilleur accord entre solution exacte et solution discrète par l'introduction d'une méthode de projection nonlinéaire. Ainsi que nous l'illustrerons, cette technique est générale puisqu'elle vient s'adjoindre, au titre du dernier pas et nécessairement dernier pas, en tant que correction de toutes méthodes de projection L^2 , *i.e.* linéaires.

De manière heuristique, elle re-symétrise les rôles des couples d'entropie ρS et ρS_τ en redistribuant l'erreur L^2 (ou les erreurs L^2) de façon à satisfaire la condition de compatibilité discrète (3.11).

Nous montrons, de plus, que cette correction par projection nonlinéaire préserve toutes les propriétés de stabilité offertes par une (bonne) stratégie de projection L^2 .

Il faut dès maintenant préciser que si l'opération de projection nonlinéaire proposée permet de satisfaire la condition de compatibilité introduite, elle ne l'assure au sens de la définition 3.11 que pour un couple particulier d'entropie

$$\rho S = \rho g(s) \quad \text{et} \quad \rho S_\tau = \rho h(s_\tau),$$

précisément le couple subissant la projection nonlinéaire. Les fonctions h et g , ainsi privilégiées, satisfont les hypothèses (H_1) ou les hypothèses (H_2) ; le choix est indifférent qu'en à la conclusion mais affecte les arguments des démonstrations proposées puisque h et g sont soit décroissantes soit croissantes. Les démonstrations nous sont apparues plus lisibles sous l'hypothèse de croissance (H_2) puisqu'elle évite les inversions d'inégalité.

Cette raison nous a conduit à privilégier (H_2) et en conséquence la **concavité** de l'application ρS ou ρS_τ .

Il convient enfin de souligner que la notion de projection nonlinéaire n'a évidemment d'utilité que lorsque les deux viscosités μ et μ_τ sont toutes deux non nulles. Nous exigeons toutefois de cet opérateur de projection d'être consistant avec les deux cas limites respectivement exhibés au Théorème 2.19 (*i.e.* $\mu_\tau/\mu \rightarrow 0$ et $\mu/\mu_\tau \rightarrow 0$): c'est à dire de coïncider dans ces deux cas limites avec un opérateur de projection L^2 portant sur la variable conservative résultante.

6.1 Donnée initiale et projection nonlinéaire

Nous illustrons, ici, la notion de projection nonlinéaire en précisant l'approximation constante par morceaux $\mathbf{v}_0^{\Delta x}$ que nous associons dans la suite à une donnée initiale $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ pour le système (2.23). Cette donnée initiale est supposée satisfaire les conditions requises permettant d'assurer l'existence des projections L^2 introduites ci-après.

Nous supposons ici les viscosités μ et μ_τ toutes deux non nulles. Nous procéderons aux remarques requises en temps utile.

Étape de projection L^2

Avec des notations claires, disposant de $(\rho_0(x), (\rho u)_0(x), p_0(x), p_{\tau 0}(x))$, définissons les trois grandeurs thermodynamiques associées : $\{\rho E\}_0(x)$, $\{\rho S\}_0(x)$ et $\{\rho S_\tau\}_0(x)$ où nous avons fait choix d'un couple de fonctions (h, g) satisfaisant (H_2) .

Définissons ensuite les cinq projections L^2 suivantes :

$$\rho_i^{0,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho_0(x) dx, \quad (\rho u)_i^{0,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\rho u)_0(x) dx,$$

avec des définitions analogues pour $(\rho E)_i^{0,-}$, $(\rho S)_i^{0,-}$ et $(\rho S_\tau)_i^{0,-}$.

Les moyennes $\rho_i^{0,-}$, $(\rho u)_i^{0,-}$ et $(\rho E)_i^{0,-}$ étant privilégiées, il est bien entendu impossible, en général, de faire choix de $(\rho S)_i^{0,-}$ et $(\rho S_\tau)_i^{0,-}$ sans introduire d'ambiguïté dans la définition des pressions $p_i^{0,-}$ et $p_{\tau i}^{0,-}$ puisque par exemple, $\{\rho S\}$ étant une application concave, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{0,-}, (\rho u)_i^{0,-}, (\rho E)_i^{0,-}, (\rho S_\tau)_i^{0,-}) &\geq \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\rho S)(\rho_0(x), (\rho u)_0(x), (\rho E)_0(x), (\rho S_\tau)_0(x)) dx &= (\rho S)_i^{0,-}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

est en général stricte.

Lever cette ambiguïté constitue la motivation du second et dernier pas.

Étape de projection nonlinéaire

De manière à assurer la conservation de la densité, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, posons pour $i \in Z$:

$$\begin{aligned} \rho_i^0 &= \rho_i^{0,-}, \\ (\rho u)_i^0 &= (\rho u)_i^{0,-}, \\ (\rho E)_i^0 &= (\rho E)_i^{0,-}, \end{aligned}$$

et redéfinissons (par exemple)

$$(\rho S)_i^0 := \{\rho S\}(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^0),$$

il s'agit donc de redéfinir $(\rho S_\tau)_i^0$ comme solution de l'équation nonlinéaire :

$$\begin{aligned} \overline{\mu_\tau \frac{(\rho)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i}}^{0,-} \left(\{\rho S\} \left(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^0 \right) - (\rho S)_i^{0,-} \right) - \\ \overline{\mu \frac{(\rho)^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}}^{0,-} \left((\rho S_\tau)_i^0 - (\rho S_\tau)_i^{0,-} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

où les moyennes impliquées dans les produits trouvent par exemple la définition suivante :

$$\overline{\frac{(\rho)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i}}^{0,-} = \frac{(\rho_i^{0,-})^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S_i^{0,-}))}, \quad (6.3)$$

et une définition analogue pour $\overline{\frac{(\rho)^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}}^{0,-}$. D'autres définitions de ces moyennes sont bien entendu possibles et nous reviendrons sur ce point ultérieurement. La relation définition (6.2) ainsi précisée, nous montrons ci-après que $(\rho S_\tau)_i^0$ existe et est unique. Il en est donc de même de $(\rho S)_i^0$.

Notons que $(\rho S)_i^0$ et $(\rho S_\tau)_i^0$ ont désormais un rôle symétrique puisque par construction et contrairement à (6.1) :

$$(\rho S)_i^0 = \{\rho S\} \left(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^0 \right),$$

avec bien entendu

$$(\rho S_\tau)_i^0 = \{\rho S_\tau\} \left(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S)_i^0 \right).$$

Il est donc possible de comprendre la relation définition (6.2) en donnant à ρS le rôle de variable et donc à ρS_τ celui d'une entropie de Lax. Le résultat de la projection est le même.

Cette seconde étape constitue clairement une opération de projection nonlinéaire qui définit de manière unique le couple de pressions p_i^0 et $p_{\tau i}^0$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 6.1

L'opération de projection nonlinéaire (6.2) définit de manière unique les pressions p_i^0 et $p_{\tau i}^0$ et préserve leur positivité dès que la densité initiale $\rho_0(x)$ est positive.

Avant de proposer la preuve de ce théorème, il convient de préciser la propriété suivante : l'opérateur de projection nonlinéaire (6.2) est par construction consistant avec les cas limites conservatifs exhibés respectivement au Théorème 2.19.

En effet, dès que la viscosité μ_τ est choisie nulle, (6.2) dégénère en l'identité triviale :

$$(\rho S_\tau)_i^0 = (\rho S_\tau)_i^{0,-},$$

qui est la définition attendue.

Symétriquement et parce que l'opérateur de projection nonlinéaire (6.2) ne dissymétrise pas les rôles de ρS et ρS_τ , lorsque la viscosité μ est choisie nulle, (6.2) dégénère en la définition attendue :

$$(\rho S)_i^0 = (\rho S)_i^{0,-}.$$

Par attendue, nous entendons ici qu'il faut assurer la conservation de la variable à conserver ainsi que la croissance de l'entropie de Lax concave privilégiée.

La technique de démonstration que nous proposons, ici dans le contexte de la donnée initiale discrète, s'appliquera avec les variantes requises aux pas de temps ultérieurs. Nous la détaillons dès à présent.

La validité du Théorème 6.1 repose sur la propriété de concavité de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ ainsi que la propriété de monotonie mise en évidence dans le résultat suivant :

Lemme 6.2

Supposons h et g satisfaire (H_2) . Alors l'application strictement concave

$$(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \rightarrow \{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau),$$

est une fonction décroissante de la variable ρS_τ à $(\rho, \rho u, \rho E)$ fixé.

Démonstration du Lemme 6.2

Un calcul immédiat assure que

$$\partial_{\rho S_\tau} \{\rho S\} = -\frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1} \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\rho^{\gamma-1}} \frac{g'(g^{-1}(S))}{h'(h^{-1}(S_\tau))},$$

d'où la conclusion puisque h et g possèdent la même monotonie sous les hypothèses (H_2) . Notons que sous les hypothèses (H_1) , la conclusion du Lemme précédent subsiste. ■

Le principe de la démonstration du Théorème 6.1 est le suivant.

Ayant fait choix de h et g satisfaisant (H_2) , la concavité de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ implique au terme de l'étape de projection L^2 , les principes du minima immédiats suivants :

Lemme 6.3

Supposons h et g vérifier (H_2) , alors

$$(\rho S_\tau)_i^{0,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\rho S_\tau)_0(x) dx \geq \min_{x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})} \{(\rho S_\tau)_0(x)\}, \quad (6.4.i)$$

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{0,-}, (\rho u)_i^{0,-}, (\rho E)_i^{0,-}, (\rho S_\tau)_i^{0,-}) &\geq (\rho S)_i^{0,-} = \\ &\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\rho S)_0(x) dx \geq \min_{x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})} \{(\rho S)_0(x)\}. \end{aligned} \quad (6.4.ii)$$

Ensuite, le principe de décroissance énoncé au Lemme 6.2 nous permet d'établir, en conséquence de l'étape de projection nonlinéaire dont nous justifions la validité ci-après, les principes du minima suivants :

Théorème 6.4

Supposons h et g vérifier (H_2) , alors

$$(\rho S_\tau)_i^0 \geq (\rho S_\tau)_i^{0,-}, \quad (6.5.i)$$

$$(\rho S)_i^0 \geq (\rho S)_i^{0,-}, \quad (6.5.ii)$$

mais

$$\{\rho S\}(\rho_i^{0,-}, (\rho u)_i^{0,-}, (\rho E)_i^{0,-}, (\rho S_\tau)_i^{0,-}) \geq (\rho S)_i^0. \quad (6.6)$$

La preuve du résultat de positivité des pressions se déduit dès lors des deux lemmes précédents en arguant de l'hypothèse de croissance de h et g .

En effet, la densité restant inchangée lors de l'opération de projection nonlinéaire, nous déduisons, loin du vide, de (6.5) :

$$p_\tau^0 \geq (\rho_i^0)^{\gamma_\tau} h^{-1} \left(\min_{x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})} \{(\rho S_\tau)_0(x)\} \frac{1}{\rho_i^0} \right), \quad (6.7.i)$$

$$p_i^0 \geq (\rho_i^0)^\gamma g^{-1} \left(\min_{x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})} \{(\rho S)_0(x)\} \frac{1}{\rho_i^0} \right). \quad (6.7.ii)$$

Afin d'établir les inégalités (6.5), nous montrons qu'il existe un unique nombre $\mathcal{M}_i^0 \geq 0$, résultant de la projection nonlinéaire (6.2), tel que

$$(\rho S_\tau)_i^0 = (\rho S_\tau)_i^{0,-} + \mathcal{C}_i^{0,-} \mathcal{M}_i^0, \quad (6.8)$$

où par définition

$$\mathcal{C}_i^{0,-} = \frac{\mu_\tau \overline{(\rho)^{\gamma-1}} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i}^{0,-}}{\mu \overline{(\rho)^{\gamma_\tau-1}} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}^{0,-}} \quad (6.9)$$

désigne une constante strictement positive. Cette constante est, bien entendu, telle que

$$\{\rho S\}(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^{0,-} + \mathcal{C}_i^{0,-} \mathcal{M}_i^0) = (\rho S)_i^{0,-} + \mathcal{M}_i^0 \quad (6.10)$$

coïncide avec $(\rho S)_i^0$.

Notons alors que la positivité de $\mathcal{M}_i^0$ permettra de conclure aux inégalités (6.5) attendues. Nous avons en effet :

Lemme 6.5

Supposons h et g satisfaire (H_2) . Alors pour chaque $i \in Z$, il existe un unique $\mathcal{M}_i^0$ positif satisfaisant (6.8) et (6.10). De plus, $\mathcal{M}_i^0$ est strictement positif dès que la donnée initiale exacte n'est pas constante sur l'intervalle $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$.

Démonstration de Lemme 6.5

Fixons $i \in Z$ et considérons la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(m) = \{\rho S\}(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^{0,-} + \mathcal{C}_i^{0,-} m) - (\rho S)_i^{0,-} - m.$$

En corollaire du lemme technique 6.2 et puisque $\mathcal{C}_i^{0,-} > 0$ par construction, cette fonction est continue strictement décroissante et vérifie :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \theta(m) = -\infty.$$

Afin de conclure la démonstration, il suffit de prouver que $\theta(0) \geq 0$.

Calculons

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \{\rho S\}(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho E)_i^0, (\rho S_\tau)_i^{0,-}) - (\rho S)_i^{0,-}, \\ &= \{\rho S\}(\rho_i^{0,-}, (\rho u)_i^{0,-}, (\rho E)_i^{0,-}, (\rho S_\tau)_i^{0,-}) - (\rho S)_i^{0,-}, \end{aligned}$$

puisque par construction

$$\rho_i^0 = \rho_i^{0,-}, \quad (\rho u)_i^0 = (\rho u)_i^{0,-} \quad \text{et} \quad (\rho E)_i^0 = (\rho E)_i^{0,-}.$$

Le principe du minimum (6.4.ii) implique l'inégalité désirée et cette inégalité est stricte dès que la donnée initiale n'est pas constante sur $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. ■

Remarque 6.6

L'idée de combiner la propriété de convexité à une propriété de monotonie des entropies de Lax est due, à notre connaissance et dans un contexte certes différent puisque conservatif, à Coquel-Perthame [30].

Remarque 6.7

A la lecture de la preuve du Théorème 6.1, il est clair que toute autre définition consistante des moyennes (6.3) n'impliquant la donnée initiale qu'à l'instant $t^{0,-}$ et conduisant la nouvelle constante $\tilde{\mathcal{C}}_i^{0,-}$ (6.9) à être strictement positive, assure *ipso facto* l'existence et l'unicité de deux pressions positives $\tilde{p}_i^0$ et $\tilde{p}_{\tau_i}^0$.

Il est dès lors naturel de rechercher une définition intrinsèque des moyennes des produits à opérer dans la relation définition (6.2). Une telle définition permettrait la consistance discrète avec la propriété d'indépendance de la définition des produits non conservatifs relativement au choix d'une famille de chemins telle qu'énoncée au Lemme 2.17.

Nous pourrions être tentés, après lecture de la section 5.1 de faire choix des définitions :

$$\overline{(\rho)^{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i}}^0 = \frac{(\rho_i^{0,-})^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{g^{-1}(S_i^0) - g^{-1}(S_i^{0,-})}{S_i^0 - S_i^{0,-}}, \quad (6.11)$$

avec une définition analogue pour $\frac{(\rho)^{\gamma\tau-1}}{\gamma\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}$ de telle sorte que nous assurions l'identité suivante :

$$\frac{(\rho)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \left((\rho S)_i^0 - (\rho S)_i^{0,-} \right) = \frac{(\rho_i^{0,-})^\gamma}{\gamma-1} (s_i^0 - s_i^{0,-}). \quad (6.12)$$

L'opérateur de projection nonlinéaire devient pour ce choix de moyennes :

$$\mu_\tau \frac{(\rho_i^{0,-})^\gamma}{\gamma-1} (s_i^0 - s_i^{0,-}) - \mu \frac{(\rho_i^{0,-})^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau-1} (s_{\tau i}^0 - s_{\tau i}^{0,-}) = 0,$$

où il faut comprendre dès lors

$$\{\rho E\}(\rho_i^0, (\rho u)_i^0, (\rho s)_i^0, (\rho s_\tau)_i^0) := (\rho E)_i^0 = (\rho E)_i^{0,-}.$$

Il semble, à tort, que grâce à la précédente définition des moyennes nous retrouvions la propriété d'indépendance exhibée au Lemme 2.17. A tort car

$$s_i^{0,-} = g^{-1}((\rho S)_i^{0,-} / \rho_i^{0,-}) \quad \text{et} \quad s_{\tau i}^{0,-} = h^{-1}((\rho S_\tau)_i^{0,-} / \rho_i^{0,-}),$$

ont été définies par projection L^2 de $(\rho S)_0(x)$ et $(\rho S_\tau)_0(x)$ en général **non constant** sur l'intervalle de projection $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. Les hypothèses de concavité faites sur g et h interdisent dès lors toute nature intrinsèque à la relation (6.12) et ces hypothèses de concavité sont essentielles à la preuve du Théorème 6.1.

Cette remarque suffit à expliquer pourquoi et dans le présent travail, nous n'obtiendrons la consistance avec la condition de compatibilité (3.11) que pour un couple g et h privilégié. Nous n'aborderons plus ce point dans le travail présenté ici.

Soulignons, enfin, que cette remarque ne met pas en défaut la validité du Lemme 5.3 puisque la donnée initiale discrète, $\mathbf{v}_h(., t^n)$ est supposée **constante** sur chaque cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$.

6.2 Une méthode de type Godunov par projection nonlinéaire

Nous montrons ici comment utiliser de manière très simple le concept de projection nonlinéaire que nous venons d'illustrer dans le contexte de la représentation de la donnée initiale. Dans ce but, nous adjoignons au titre de troisième et dernier pas cette technique de correction nonlinéaire à la méthode de Godunov par projection L^2 que nous avons décrite lors de la section 5. Par construction, cette troisième étape permettra d'assurer la condition de compatibilité (3.11) requise. Notons que les théorèmes de positivité que nous associerons à cette classe de méthodes de type Godunov par projection nonlinéaire reposent de manière essentielle sur la positivité des erreurs L^2 commises lors des opérations de projections linéaires. Les conditions de convexité nous sont de nouveau utiles, bien qu'elles soient responsables en l'absence de correction nonlinéaire de la violation de la condition de compatibilité.

De manière à illustrer la souplesse de cette technique de correction nonlinéaire, nous ne suivrons pas nécessairement point par point l'algorithme de Godunov par projection L^2 tel qu'il a été décrit et ce notamment lors du premier pas où nous autoriserons l'existence d'erreurs L^2 de représentation des dérivées discrètes. Par ailleurs, nous appliquerons dans la prochaine section cette technique de correction nonlinéaire à une autre méthode de Godunov pour laquelle nous exigerons de l'énergie totale d'être une entropie de Lax.

Nous rappelons succinctement les principales inégalités obtenues lors de la précédente section et qui nous seront utiles à l'établissement de résultats d'existence des grandeurs nonlinéairement projetées ainsi que leur positivité.

Par souci de simplicité dans l'exposé des résultats, nous supposerons toujours les viscosités μ et μ_τ toutes deux non nulles.

Premier pas : Opérateur du premier ordre ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)

Supposons connue à la date t^n la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, choisie constante par morceaux. Nous proposons de faire évoluer en temps cette solution discrète jusqu'à l'instant $t^{n+1,=}$ en adoptant la méthode de Godunov par projection L^2 décrite section 5. Contrairement à cette dernière section, le premier pas est ici dédié à la prise en compte de l'opérateur du premier ordre extrait et ce dans un souci de clarté dans l'exposition.

Nous avons à l'issue de ce premier pas, le résultat suivant énoncé sans démonstration (voir section 5) :

Lemme 6.8

Avec des notations claires et sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_i(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}, \quad (6.13)$$

nous avons les principes du minima suivants :

$$S_i^{n+1,=} := \{S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (6.14.i)$$

$$S_{\tau i}^{n+1,=} \geq \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n). \quad (6.14.ii)$$

Par ailleurs, l'inégalité d'entropie précisée suivante a lieu :

$$\{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\{\rho S\}u\}_{i+1/2}^n = \mathcal{E}_i^n,$$

où la fonction flux d'entropie numérique $\{\{\rho S\}u\}$ est donnée par

$$\{\{\rho S\}u\}_{i+1/2}^n = \{\{\rho S\}u\}(w(0^+, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)). \quad (6.15)$$

Ici, l'erreur de projection L^2 trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n &= \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx + \sum_{\text{choc}} \left(-\sigma[\rho S] + [\rho S u] \right) \geq 0, \end{aligned}$$

où σ désigne la vitesse de propagation des éventuelles ondes de choc.

La précédente inégalité est généralement stricte due à la stricte concavité de l'application $\{\rho S\}$.

Il importe de noter que la fonction flux d'entropie numérique donnée par (6.15) ne répond pas à la formule (5.24) associée à une quantité convectée. Ainsi la dissymétrie dans le traitement de ρS (entropie de Lax) et ρS_τ (grandeur convectée) se traduit par des fonctions flux numériques de nature différente. Nous proposons de montrer ci-dessous qu'il est possible de réexprimer l'inégalité d'entropie de Lax discrète en utilisant les fonctions flux numériques répondant aux formules (5.24) en lieu et place de la fonction flux d'entropie numérique de Godunov. Cette substitution s'accompagne d'une erreur de type L^2 que nous montrons être positive sous l'hypothèse de concavité. Nous avons, en effet :

Lemme 6.9

Sous la condition CFL (6.13), les inégalités d'entropie précisées suivantes sont vérifiées :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,=} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n = 0 \quad (6.16)$$

et

$$\{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n = \mathcal{E}_{c_i}^n, \quad (6.17)$$

où le terme d'erreur $\mathcal{E}_{c_i}^n$ est positif. Dans (6.16) et (6.17), les fonctions flux numérique $\{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n$ et $\{\rho S u\}_{i+1/2}^n$ répondent toutes deux à la formule de Larouturou (5.24).

Nous n'exhibons pas la forme explicite de l'erreur $\mathcal{E}_{c_i}^n$, les notations nécessaires étant lourdes mais la preuve établira clairement que cette erreur est de type L^2 et qu'elle est (strictement) positive.

L'intérêt de l'utilisation de la formule de Larouturou dans les inégalités d'entropie discrètes (6.16) et (6.17) est bien entendu de re-symétriser le membre de gauche des équations discrètes tout en permettant d'établir après projection nonlinéaire la validité d'inégalités d'entropie discrètes pour ρS et ρS_τ . La preuve proposée ci-dessous peut être comprise comme étant une manière d'établir la consistance de la méthode de Godunov par projection L^2 avec toutes les inégalités d'entropie de Lax. Son principal avantage est de faire intervenir des fonctions flux d'entropie numériques de type (5.24) ainsi que nous l'illustrerons par la suite.

Démonstration du Lemme 6.9

Nous utilisons ici des éléments de l'argumentation développée pour conclure à la preuve du Théorème 5.7; en l'occurrence le principe du maximum sur l'entropie spécifique (5.25) que nous écrivons ici pour une entropie **concave** et non pas convexe. Avec les notations introduites dans la section 5, nous avons :

$$S(w(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \geq S(\mathbf{v}_L) \quad \text{pour } \xi < u^*, \quad (6.18.i)$$

$$S(w(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) \geq S(\mathbf{v}_R) \quad \text{pour } \xi > u^*, \quad (6.18.ii)$$

où u^* désigne la vitesse de propagation de la discontinuité de contact éventuelle.

Par ailleurs, désignons par $X(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ la fonction définie de la manière suivante :

$$X(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{cases} S_L, & \xi < u^*, \\ S_R, & \xi > u^*, \end{cases} \quad (6.19)$$

de sorte que la fonction $\rho(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \times X(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ vérifie par construction et au sens des distributions la loi de conservation :

$$\partial_t \rho X + \partial_x \rho X u = 0.$$

En vertu du principe du minimum sur l'entropie spécifique (6.18) nous déduisons de la définition de X :

$$S(w(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) - X(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \geq 0 \quad \text{pour presque tout } \xi.$$

Dès lors, en arguant de la positivité de la densité nous avons la chaîne d'inégalités suivantes valable sous la condition CFL (6.13) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho S\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) \, dx &\geq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(\mathbf{v}(x, \Delta t)) X(\mathbf{v}(x, \Delta t)) \, dx = \\ &(\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n, \end{aligned} \quad (6.20)$$

où, par construction, la fonction flux numérique répond à la formule de Larrouturnou (5.24).

Ici, la définition de la fonction $X(\mathbf{v}(x, \Delta t))$ se déduit aisément de la définition (6.19). Il suffit, enfin, d'invoquer la concavité de $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ pour obtenir l'inégalité

$$\{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n \geq 0$$

et ainsi conclure la démonstration. ■

Ceci achève la description du premier pas.

Second pas : Opérateur du second ordre ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$)

La solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=})$ étant constante par morceaux, nous proposons de la faire évoluer en temps jusqu'à la date $t^{n+1,-}$ en adoptant des formules aux différences finies consistantes :

$$\overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i)}^{n+1,-}, \quad \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u)_i}^{n+1,-}, \quad \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2}^{n+1,-}.$$

Par consistance, nous entendons non seulement la consistance au sens des différences finies mais nous imposons également que les deux premiers opérateurs discrets préservent

la propriété de conservation des opérateurs exacts impliqués et que le dernier admet toujours le signe constant de $h'(h^{-1}(S_\tau))$. Des exemples de telles formules aux différences ont été proposées lors de la précédente section ainsi qu'à l'occasion de la section consacrée aux équations de Navier-Stokes à une pression. Ce dernier choix, rappelons le, induit une erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes (cf. section 1).

De manière à fixer les idées, nous faisons choix de ces dernières formules :

$$\overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)\partial_x u)_i}^{n+1,-} = (\mu + \mu_\tau) \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1,-} - 2u_i^{n+1,-} + u_{i-1}^{n+1,-}), \quad (6.21.i)$$

$$\overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)u\partial_x u)_i}^{n+1,-} = (\mu + \mu_\tau) \frac{1}{2\Delta x^2} ((u_{i+1}^{n+1,-})^2 - 2(u_i^{n+1,-})^2 + (u_{i-1}^{n+1,-})^2), \quad (6.21.ii)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \overline{h'(h^{-1}(S_\tau))\mu_\tau(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} &= \frac{\gamma_\tau - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,-})) \\ &\quad \mu_\tau \frac{1}{2\Delta x^2} ((u_{i+1}^{n+1,-} - u_i^{n+1,-})^2 + (u_i^{n+1,-} - u_{i-1}^{n+1,-})^2). \end{aligned} \quad (6.21.iii)$$

Equipés de ces formules aux différences, nous établissons le résultat suivant valable à l'issue du second pas :

Lemme 6.10

La solution discrète $\mathbf{v}_i^{n+1,-}$ vérifie les principes du minimum suivants :

$$S_i^{n+1,-} := \{S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (6.22.i)$$

$$S_{\tau_i}^{n+1,-} \geq \min(S_{\tau_{i-1}}^n, S_{\tau_i}^n, S_{\tau_{i+1}}^n). \quad (6.22.ii)$$

Par ailleurs l'inégalité d'entropie précisée suivante a lieu :

$$\begin{aligned} \{ \rho S \}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho S u \}_{i+1/2}^n = \\ \mathcal{E}_{ci}^n + \mathcal{E}_{di}^n + \Delta t \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \overline{g'(g^{-1}(S))\mu(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} \geq 0, \end{aligned} \quad (6.23)$$

où la formule aux différences finies impliquée est donnée par l'expression consistante :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \overline{g'(g^{-1}(S))\mu(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} &= \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S_i^{n+1,-})) \\ &\quad \mu \frac{1}{2\Delta x^2} ((u_{i+1}^{n+1,-} - u_i^{n+1,-})^2 + (u_i^{n+1,-} - u_{i-1}^{n+1,-})^2), \end{aligned}$$

et où le nouveau terme d'erreur $\mathcal{E}_{di}^n$ trouve l'expression donnée en (6.25)-(6.26). De plus, nous avons l'inégalité d'entropie précisée suivante :

$$\begin{aligned} (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho S_\tau u \}_{i+1/2}^n = \\ \Delta t \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \overline{h'(h^{-1}(S_\tau))\mu_\tau(\partial_x u)_i^2}^{n+1,-} \geq 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Démonstration du Lemme 6.10

Le membre de droite de l'inégalité d'entropie discrète relative au couple de Lax $(\{\rho S\}, \{\rho S u\})$ s'écrit clairement à l'issue du second pas :

$$\mathcal{E}_{c_i}^n + \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) - \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}).$$

En invoquant la concavité de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$, écrivons pour $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$:

$$\begin{aligned} & \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=})) - \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) = \\ & \nabla \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) \cdot (\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=}) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) + \\ & \left\{ \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=}) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-}), \overline{\nabla^2 \{\rho S\}}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=}) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) \right\}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

où dans le précédent produit scalaire nous avons introduit la valeur moyenne de la hessienne :

$$\overline{\nabla^2 \{\rho S\}} = \int_0^1 \nabla^2 \{\rho S\} \left(y \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-}) + (1-y) \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=}) \right) y(1-y) dy. \quad (6.26)$$

Cette dernière matrice est symétrique définie négative en vertu de la stricte concavité de l'application $\{\rho S\}$. Le dernier terme de l'identité (6.25) n'est autre que $(-\mathcal{E}_{d_i}^n)$ qui est donc (strictement) négatif.

En arguant de

$$\begin{aligned} & \nabla \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) \cdot (\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,=}) - \mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) = \partial_{\rho E} \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) \times \\ & \left(-u_i^{n+1,-} ((\rho u)_i^{n+1,=} - (\rho u)_i^{n+1,-}) + ((\rho E)_i^{n+1,=} - (\rho E)_i^{n+1,-}) - \right. \\ & \left. \frac{(\rho_i^{n+1,=})^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}))} ((\rho S_\tau)_i^{n+1,=} - (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) \right), \end{aligned}$$

avec

$$\partial_{\rho E} \{\rho S\}(\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,-})) = \frac{\gamma - 1}{(\rho_i^{n+1,=})^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S_i^{n+1,-})),$$

un calcul direct conduit à :

$$\begin{aligned} & -u_i^{n+1,-} ((\rho u)_i^{n+1,=} - (\rho u)_i^{n+1,-}) + ((\rho E)_i^{n+1,=} - (\rho E)_i^{n+1,-}) - \\ & \frac{(\rho_i^{n+1,=})^{\gamma_\tau - 1}}{\gamma_\tau - 1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}))} ((\rho S_\tau)_i^{n+1,=} - (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) = \\ & -\mu \Delta t \frac{1}{2\Delta x^2} \left((u_{i+1}^{n+1,-} - u_i^{n+1,-})^2 + (u_i^{n+1,-} - u_{i-1}^{n+1,-})^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Troisième pas : Etape de projection nonlinéaire ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)

Les deux premiers pas de la méthode proposée ont dissymétrisé les rôles respectifs des entropies ρS et ρS_τ . Les inégalités d'entropie précisées (6.23) et (6.24) résultant de cette dissymétrie ne permettent pas la consistance avec la condition de compatibilité (3.11) recherchée. De manière à forcer sa validité, nous proposons de redistribuer les erreurs L^2 entre (6.23) et (6.24) en invoquant l'opérateur de projection nonlinéaire que nous avons déjà décrit dans le contexte de la projection de la donnée initiale exacte.

Ainsi, posons afin de préserver les propriétés de conservation requises :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-}, \quad (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1,-}, \quad (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^{n+1,-}, \quad (6.27)$$

et définissons de manière à forcer le respect de la condition de saut généralisée (2.19)

$$(\rho S)_i^{n+1} = \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}),$$

c'est à dire $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ de sorte que

$$\begin{aligned} & \overline{\mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))}}_i^{n+1,-} \times \\ & \left(\{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S u\}_{i+1/2}^n \right) - \\ & \overline{\mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))}}_i^{n+1,-} \left((\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Nous montrons ci-après que $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ et donc $(\rho S)_i^{n+1}$ existent et sont uniques, ils vérifient par construction simultanément

$$(\rho S)_i^{n+1} = \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}),$$

et

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = \{\rho S_\tau\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S)_i^{n+1}).$$

Remarque 6.11

De manière à préciser la validité des deux précédentes écritures, nous soulignons qu'à l'issue du premier pas, la densité $\rho_i^{n+1,-}$, l'énergie totale $(\rho E)_i^{n+1,-}$ ainsi que l'entropie $(\rho S_\tau)_i^{n+1,-}$ désignent bien des grandeurs positives. Nous supposons bien entendu ici que le vide est absent de la solution du problème de Cauchy considéré. Ces propriétés de positivité sont préservées à l'issue du second pas ainsi que l'indique par exemple la formule discrète équivalente (5.7) établie au lemme 5.1. Nous préserverons donc le domaine de définition des applications $\{\rho S\}$ et $\{\rho S_\tau\}$ à l'issue de l'étape de projection nonlinéaire à la condition de montrer que la grandeur nonlinéairement projetée $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ est positive. Ce que nous montrerons.

A l'issue de l'étape de projection nonlinéaire, nous disposons du résultat suivant :

Théorème 6.12

Supposons satisfaite la condition CFL (6.13). La projection nonlinéaire (6.28) définit de manière unique $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ et donc $(\rho S)_i^{n+1}$.

Par ailleurs, les inégalités d'entropie suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} & \{\rho\phi(S)\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - \\ & \quad (\rho\phi(S))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho\phi(S)u\}_{i+1/2}^n \leq 0, \end{aligned} \quad (6.29.i)$$

$$\begin{aligned} & \{\rho\psi(S_\tau)\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - \\ & \quad (\rho\psi(S_\tau))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho\psi(S_\tau)u\}_{i+1/2}^n \leq 0, \end{aligned} \quad (6.29.ii)$$

pour toutes fonctions convexes, strictement décroissantes, ϕ et ψ . Les fonctions flux numériques d'entropie répondent à la définition (5.24) avec respectivement $X = \phi(S)$ et $X = \psi(S_\tau)$.

Les principes du minimum suivants sur les entropies spécifiques S et S_τ sont vérifiés :

$$S_i^{n+1} \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (6.30.i)$$

$$S_{\tau i}^{n+1} \geq \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n). \quad (6.30.ii)$$

En conséquence, les pressions p_i^{n+1} et $p_{\tau i}^{n+1}$ restent positives.

Remarque 6.13

Les inégalités discrètes (6.29) doivent être comprises respectivement comme portant sur les fonctions $G = \varphi \circ g$ et $H = \psi \circ h$. Nous montrerons au Lemme 6.20 que les applications définies avec un certain abus de langage par $\{\rho G(s)\}$ et $\{\rho H(s_\tau)\}$ sont convexes dès que φ et ψ sont convexes décroissantes et que g et h vérifient (H_2) . Les inégalités (6.29) sont donc des inégalités d'entropie de Lax discrètes.

Remarque 6.14

De manière à préciser les principes du minimum (6.30), nous rapportons ici que la preuve du précédent Théorème mettra clairement en évidence les inégalités suivantes (voir Théorème 6.4) :

$$S_{\tau i}^{n+1} \geq S_{\tau i}^{n+1,-} \quad \text{mais} \quad S_i^{n+1} \leq S_i^{n+1,-}. \quad (6.31)$$

La démonstration de ce théorème suit les mêmes étapes que celles présentées dans le contexte de la donnée initiale discrète avec les modifications que nous indiquons maintenant. En conséquence de l'étape de projection nonlinéaire, nous établirons les principes du minima suivants :

Lemme 6.15

Sous la condition CFL (6.13), nous avons après projection nonlinéaire :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} \geq (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n, \quad (6.32.i)$$

$$(\rho S)_i^{n+1} \geq (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n, \quad (6.32.ii)$$

où les fonctions flux numérique répondent à la formule de Larrouturou (5.24).

En conséquence, nous déduisons tout comme en (6.7) la positivité des pressions p_i^{n+1} et $p_{\tau i}^{n+1}$ en remarquant que les inégalités (6.32) impliquent (voir (5.23) et les commentaires associés) :

$$S_{\tau i}^{n+1} \geq \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n), \quad (6.33.i)$$

$$S_i^{n+1} \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n). \quad (6.33.ii)$$

Rappelons que par construction et à l'issue du premier pas, nous avons :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,=} = (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n.$$

De manière à établir les inégalités (6.32), nous montrons qu'il existe un unique nombre $\mathcal{M}_i^{n+1} \geq 0$, résultant de la projection nonlinéaire (6.28), tel que

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1}, \quad (6.34)$$

où par définition

$$\mathcal{C}_i^{n+1,-} = \left(\mu_\tau \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,-} \right) / \left(\mu \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S))_i^{n+1,-} \right) \quad (6.35)$$

désigne une constante strictement positive. Notons que le choix des formules aux différences (6.21) conduit cette constante à satisfaire la relation :

$$\mathcal{C}_i^{n+1,-} = \left(\Delta t \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2 \right)^{n+1,-} / \left(\Delta t \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)_i^2 \right)^{n+1,-} \quad (6.36)$$

Cette constante est, bien entendu, telle que

$$\begin{aligned} & \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1}) = \\ & (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n + \mathcal{M}_i^{n+1} \end{aligned} \quad (6.37)$$

coïncide avec $(\rho S)_i^{n+1}$ solution de la formule de projection nonlinéaire (6.28). Afin de simplifier les écritures, nous introduisons la notation :

$$(\rho S)_i^{n+1,*} := (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n.$$

Notons alors que la positivité de $\mathcal{M}_i^{n+1}$ permettra de conclure aux inégalités (6.32) attendues. Nous avons en effet :

Lemme 6.16

Supposons la condition CFL (6.13) satisfaite. Alors pour chaque $i \in Z$, il existe un unique $\mathcal{M}_i^{n+1}$ positif satisfaisant (6.34) et (6.37).

Démonstration du Lemme 6.16

Fixons $i \in Z$ et définissons, comme au Lemme 6.5, la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(m) = \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} m) - (\rho S)_i^{n+1,*} - m.$$

En utilisant les mêmes arguments qu'au Lemme 6.5, il suffit en réalité de prouver que $\theta(0) \geq 0$ pour établir l'existence et l'unicité de $\mathcal{M}_i^{n+1}$.

Calculons en arguant de (6.27)

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^{n+1,*}, \\ &= \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^{n+1,*}. \end{aligned}$$

Or par construction, l'inégalité d'entropie précisée (6.24), relative à ρS_τ à l'issue du second pas, assure que :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,-} \geq (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}.$$

Dès lors la propriété de décroissance de l'application $\rho S_\tau \rightarrow \{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ à $(\rho, \rho u, \rho E)$ fixé, implique :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) &\geq \\ \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}). \end{aligned}$$

En conclusion, nous venons d'établir l'inégalité suivante :

$$\theta(0) \geq (\rho S)_i^{n+1,-} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \{\rho S u\}_{i+1/2}^n.$$

L'inégalité d'entropie discrète (6.23) permet de conclure à la positivité de $\theta(0)$, cette positivité étant généralement stricte.

De la stricte décroissance de l'application $\{\rho S\}$ par rapport à la variable ρS_τ , il résulte l'existence et l'unicité d'un réel (strictement) positif $\mathcal{M}_i^{n+1}$ solution de l'équation nonlinéaire $\theta(m) = 0$. Ceci achève la preuve. ■

Avant de conclure quant à la preuve du Théorème 6.12, nous démontrons à présent la validité des inégalités (6.31) rapportées dans la remarque 6.14.

Lemme 6.17

Supposons la condition CFL (6.13) satisfaite. Pour tout $i \in Z$, les inégalités suivantes ont lieu :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,-} \leq (\rho S_\tau)_i^{n+1} \quad \text{et} \quad (\rho S)_i^{n+1,-} \geq (\rho S)_i^{n+1}.$$

Démonstration du Lemme 6.17

Puisque la constante positive $\mathcal{C}_i^{n+1,-}$ trouve la forme (6.36), nous pouvons écrire à l'issue du second pas :

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,-} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} m_i^{n+1,-},$$

où nous avons posé

$$m_i^{n+1,-} = \Delta t \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) \mu(\partial_x u)_i^2 \quad .$$

Nous réécrivons alors l'inégalité d'entropie précisée (6.23) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} m_i^{n+1,-}) - \\ (\rho S)_i^{n+1,*} - m_i^{n+1,-} = \mathcal{E}_{c_i}^n + \mathcal{E}_{d_i}^n \geq 0, \end{aligned}$$

où nous avons tenu compte de l'invariance en temps de la densité, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale lors du troisième pas de la méthode. Considérons à présent l'application décroissante $m \rightarrow \theta(m)$ définie lors de la démonstration du Lemme 6.16. Il est alors immédiat par la définition de l'application $m \rightarrow \theta(m)$ que

$$\theta(m_i^{n+1,-}) = \mathcal{E}_{c_i}^n + \mathcal{E}_{d_i}^n \geq 0.$$

Puisque $\theta(\mathcal{M}_i^{n+1}) = 0$, la décroissance de l'application θ assure l'inégalité suivante :

$$\mathcal{M}_i^{n+1} \geq m_i^{n+1,-}.$$

En rappelant que

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1},$$

l'inégalité attendue relative à ρS_τ est ainsi prouvée. Enfin, la chaîne d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) &\geq \\ \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) &\geq \\ \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) & \end{aligned}$$

ce qui assure la dernière inégalité en vertu du Lemme technique 6.2. ■

Remarque 6.18

A l'issue de la précédente démonstration, deux points doivent être soulignés. Le premier concerne la redistribution des erreurs de type L^2 entre le bilan d'entropie discret gouvernant ρS et son homologue portant sur ρS_τ . Cette redistribution est mise en évidence par les inégalités rapportées au lemme 6.17 assurant, qu'en conséquence de la projection nonlinéaire, l'entropie réactualisée ρS a diminué tandis que l'entropie réactualisée ρS_τ a augmenté. Le second point, qui n'est autre qu'une conséquence du premier, concerne l'écart aux lois supplémentaires satisfaites par les solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (2.5) :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u &= \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \\ \partial_t \rho S + \partial_x \rho S u &= \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)^2.\end{aligned}$$

A l'issue du second pas et en l'absence de projection nonlinéaire, il est bien entendu que la première loi est satisfaite au niveau discret alors que la seconde ne l'est pas avec les erreurs $L^2 : \mathcal{E}_{c_i}^n + \mathcal{E}_{d_i}^n$.

La redistribution de ces erreurs lors de la projection nonlinéaire conduit à satisfaire la relation de compatibilité (3.11) mais modifie les bilans discrets associés à chacune des deux entropies. Une erreur apparaît sur le bilan discret gouvernant ρS_τ alors que l'erreur relative au bilan discret pour ρS s'en trouve diminuer en proportion.

L'erreur due à la projection L^2 ($\mathcal{E}_{c_i}^n$) apparaissant incontournable, il en résulte donc clairement que le choix de formules aux différences n'impliquant pas d'erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes ($\mathcal{E}_{d_i}^n$), telles que présentées dans la section précédente par exemple, conduiront à une meilleure satisfaction des deux bilans d'entropie au niveau discret. Ce choix est adopté dans la seconde méthode par projection nonlinéaire présentée dans la section suivante. Il est bien entendu recommander au titre d'alternative à la présente méthode.

Remarque 6.19

Dans (6.28), la moyenne des produits impliqués peut être définie à partir des formules proposées ci-dessus, mais il est possible de faire choix de toute autre définition dès que celle-ci préserve le signe de $g'(g^{-1}(S))$, respectivement $h'(h^{-1}(S_\tau))$ (voir remarque 6.7). Toutefois, la démonstration du résultat précédent met clairement en avant que la définition de la constante $\mathcal{C}_i^{n+1,-}$ doive être consistante avec les moyennes opérées au sens de la relation (6.36), tout autre choix ne conduisant pas nécessairement à la validité du lemme 6.17 et ce à une approximation près de l'unité.

Achevons, fort des inégalités (6.32), la démonstration du Théorème 6.12 en établissant les inégalités d'entropie (6.29). Leur validité résulte de la propriété que possèdent les fonc-

tions flux d'entropie numériques de répondre par construction à la formule de Larrouturou (5.24) (voir lemme 6.9) ainsi que du lemme de convexité que nous établissons à présent.

Nous aurons à considérer dans la suite des fonctions φ vérifiant les conditions suivantes :

(H₄) : φ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, strictement décroissante, strictement convexe.

de sorte que nous avons la propriété de convexité suivante :

Lemme 6.20

Supposons g satisfaire la condition (H₂).

(i) φ satisfaisant (H₄), l'application $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \rightarrow \{\rho\varphi(S)\}$ définie par

$$\{\rho\varphi(S)\}(\rho, \rho S) = \rho\varphi\left(\frac{\rho S}{\rho}\right) \quad (6.38)$$

est convexe (et non strictement).

(ii) φ satisfaisant (H₄), l'application $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \rightarrow \{\rho\varphi(S)\}$ définie par

$$\{\rho\varphi(S)\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) = \rho\varphi \circ g \left(\frac{\gamma - 1}{\rho^\gamma} \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{\rho^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} h^{-1} \left(\frac{\rho S_\tau}{\rho} \right) \right) \right)$$

est strictement convexe.

Démonstration du Lemme 6.20

Concernant l'assertion (i), un calcul direct la matrice hessienne de l'application (6.38) montre que les mineurs sont tous positifs ou nuls dès que φ est (strictement) convexe.

Afin d'établir l'assertion (ii), vérifions que l'application $\varphi \circ g$ vérifie (H₁) dès que g vérifie (H₂) et φ l'hypothèse (H₄). Un calcul direct conduit en effet à :

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)'(x) &= g'(x)\varphi'(g(x)) < 0, \\ \frac{(\varphi \circ g)''}{(\varphi \circ g)'}(x) &= \frac{g''(x)}{g'(x)} + g'(x)\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} < \frac{g''(x)}{g'(x)}, \end{aligned}$$

pour tout x positif et ce grâce à l'hypothèse (H₄) ainsi qu'à la décroissance de la fonction g . Ce qui permet donc de conclure. ■

Armé de ces résultats de convexité, réécrivons le membre de droite du principe du minimum (6.32.ii) sous la condition CFL (6.42) en invoquant la propriété des fonctions flux d'entropie numérique de répondre à la formule de Larrouturou (5.24) :

$$(\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) \times X(\mathbf{v}(x, \Delta t)) \, dx,$$

où la fonction X a été définie lors de la démonstration de Lemme 6.9 (voir la formule définition (6.19)).

Considérons, à présent, une fonction ϕ strictement décroissante, convexe de sorte que l'application $\{\rho\phi(S)\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ soit convexe en vertu du lemme 6.20. Le principe du minimum (6.32.ii) implique

$$\rho_i^{n+1} S_i^{n+1} \geq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) \times X(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx,$$

soit en arguant de la décroissance de ϕ , puisque $\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,=}$ par construction,

$$\phi(S_i^{n+1}) \leq \phi \left(\frac{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) X(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx}{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx} \right).$$

La preuve peut être désormais achevée en invoquant l'hypothèse de convexité de ϕ et adoptant exactement les mêmes pas que ceux proposés lors de la démonstration du Lemme 5.11 pour conclure à l'inégalité de Lax :

$$\rho_i^{n+1} \phi(S_i^{n+1}) - \rho_i^n \phi(S_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho \phi(S) u\}_{i+1/2}^n \leq 0,$$

où la fonction flux numérique impliquée répond à la formule de Larrouturou (5.24).

L'inégalité d'entropie portant sur l'entropie spécifique S_τ s'obtient en procédant de la même manière et en invoquant $X(\mathbf{v}(x, \Delta t)) = S_\tau(x, \Delta t)$, solution d'une équation de transport lors du premier pas. Notons, enfin, que l'application $\{\rho\psi(S_\tau)\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S)$ est en fait convexe sous les hypothèses adoptées sur les fonctions g , h et ψ . Ceci conclut la preuve du Théorème 6.12. ■

6.3 Une autre méthode de type Godunov par projection nonlinéaire

Nous adoptons ici une approche récemment proposée par Coquel et Perthame ([30]) qui se révélera, ci-après, particulièrement adaptée à notre propos. Ces auteurs montrent comment définir une méthode de type Godunov pour le système Euler 3×3 en échangeant les rôles respectifs de l'entropie thermodynamique et de l'énergie totale; cette dernière devenant une entropie de Lax. Soulignons que bien entendu la méthode proposée assure la conservation de l'énergie totale ainsi que la décroissance des entropies en échangeant de nouveau leur rôle respectif à l'issue de chaque pas de temps. Cette stratégie, élément clef d'une méthode de relaxation qu'ils développent ensuite, permet de calquer au niveau discret les produits effectués au niveau continu. Cette approche autorise de fait une définition agréable des moyennes discrètes à opérer dans les produits non conservatifs impliqués dans la dernière équation de (2.23). La méthode est composée de trois pas. Nous les décrivons ci-après et énonçons les principaux résultats accompagnant chacun des pas. L'algorithme final trouvera ensuite une présentation résumée et différents résultats de compatibilité avec les inégalités d'entropie et de positivité sur les pressions seront établis.

Premier pas : Evolution en temps ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)

Supposons connue à la date t^n la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$, choisie constante par morceaux. Considérons alors le problème Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (6.39.i)$$

$$\partial_t \rho u \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = 0, \quad (6.39.ii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u = 0, \quad (6.39.iii)$$

$$\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u = 0, \quad (6.39.iv)$$

complété par le choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^n)$.

Avec la notation $\mathbf{w} = {}^T(\rho, \rho u, \rho S_\tau, \rho S)$, le couple

$$(\{\rho E\}(\mathbf{w}), \{(\rho E + p + p_\tau)u\}(\mathbf{w})) \quad (6.40)$$

est une entropie de Lax non triviale (cf. le lemme 2.4) du précédent système. Les solutions discontinues de ce système sont donc sélectionnées par **les** conditions d'entropie suivantes (cf. section 1.4) :

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau)u \leq 0. \quad (6.41)$$

Désignons par $\mathbf{v}(x, t)$ la solution faible entropique de (6.39)-(6.41), constituée pour des temps suffisamment petits, de la juxtaposition sans interaction de la solution des problèmes de Riemann posé à chaque interface. Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda_i(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}, \quad (6.42)$$

définissons les valeurs moyennes pour $i \in Z$:

$$\mathbf{v}_i^{n+1,=} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{v}(x, \Delta t) dx.$$

Au terme de ce premier pas, nous énonçons, avec des notations claires, le résultat suivant :

Lemme 6.21

Sous la condition CFL (6.42), les principes du maximum suivants sont satisfaits :

$$\begin{aligned} \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n) &\leq S_i^{n+1,=} \leq \max(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \\ \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n) &\leq S_{\tau i}^{n+1,=} \leq \max(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n), \end{aligned}$$

et l'inégalité d'énergie suivante a lieu :

$$\begin{aligned} \{\rho E\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho S)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho E)_i^n + \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i+1/2}^n - \{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i-1/2}^n \right) = -\mathcal{E}_i^n \leq 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

avec

$$\mathcal{E}_i^n = -\{\rho E\}(\mathbf{v}_i^{n+1}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho E\}(\mathbf{v}(x, \Delta t)) dx - \sum_{\text{chocs}} (-\sigma[\rho E] + [(\rho E + p)u]) \geq 0.$$

Ici, σ désigne la vitesse de propagation des solutions onde de choc éventuelles.

La validité des principes du maximum énoncés ci-dessus découle de la propriété de S et S_τ d'être solution d'une équation de transport

$$\partial_t \rho X + \partial_x \rho Xu = 0,$$

et de vérifier à ce titre les inégalités (5.23). L'inégalité d'énergie précisée est claire (voir par exemple section 1.4).

Second pas : Prise en compte des opérateurs dissipatifs ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$)

Considérons pour tout $i \in Z$:

$$\rho_i^{n+1,-} = \rho_i^{n+1,=}, \quad (6.44.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1,-} = (\rho u)_i^{n+1,=} + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau) \partial_x u_i)^{n+1,-}}, \quad (6.44.ii)$$

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,-} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^2}^{n+1,-}, \quad (6.44.iii)$$

$$(\rho S)_i^{n+1,-} = (\rho S)_i^{n+1,=} + \Delta t \overline{\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)_i^2}^{n+1,-}, \quad (6.44.iv)$$

où les opérateurs aux différences finies trouvent respectivement les expressions (5.3.i), (5.3.iii) et (5.9).

Nous renvoyons le lecteur aux commentaires donnés lors de l'introduction de ces formules aux différences.

L'intérêt des définitions proposées est double.

Dans un premier temps, de telles définitions, analogues à celles utilisées précédemment, sont bien entendu motivées par l'annulation de l'erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes dans le bilan d'énergie totale (cf. Lemme 6.22).

Dans un second temps, les quantités $S_{\tau i}^{n+1,-}$ et $S_i^{n+1,-}$ vérifient, par construction à l'issue de ce second pas, l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & \mu_\tau \overline{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))}}_i^{n+1,-} \left((\rho S)_i^{n+1,-} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta(\rho S u)_{i+1/2}^n \right) - \\ & \mu \overline{\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))}}_i^{n+1,-} \left((\rho S_\tau)_i^{n+1,-} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta(\rho S_\tau u)_{i+1/2}^n \right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'analogue discret de l'équation non conservative (2.23.iv).

Nous venons, par ce moyen, d'exhiber une définition agréable des moyennes à opérer dans les produits non conservatifs :

$$\frac{\overline{\rho^{\gamma_\tau-1}}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i} \overline{\quad}^{n+1,-} = \frac{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \begin{cases} \frac{h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}) - h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,=})}{S_{\tau i}^{n+1,-} - S_{\tau i}^{n+1,=}}, & \text{si } S_{\tau i}^{n+1,-} \neq S_{\tau i}^{n+1,=}, \\ \frac{1}{h'(h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}))}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.45)$$

avec une formule analogue pour $\frac{\overline{\rho^{\gamma-1}}}{\gamma-1} g'(g^{-1}(S))_i \overline{\quad}^{n+1,-}$.

Soulignons qu'une telle définition résulte de l'échange des rôles respectifs de l'entropie thermodynamique et de l'énergie totale, telle que proposée en (6.39).

Au terme de ce second pas, nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.22

Supposons satisfaite la condition CFL (6.42). Les principes suivants ont lieu :

$$S_i^{n+1,-} \geq S_i^{n+1,=} \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (6.46.i)$$

$$S_{\tau i}^{n+1,-} \geq S_{\tau i}^{n+1,=} \geq \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n), \quad (6.46.ii)$$

et le bilan d'énergie totale trouve l'expression suivante :

$$\{\rho E\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho S)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} \right) - \{\rho E\}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i+1/2}^n = -\mathcal{E}_i^n + \Delta t \overline{\partial_x(\mu + \mu_\tau)u \partial_x u_i}^{n+1,-}, \quad (6.47)$$

avec la formule aux différences finies, conservative et consistante, suivante :

$$\overline{\partial_x(\mu + \mu_\tau)u \partial_x u_i}^{n+1,-} = (\mu + \mu_\tau) \frac{1}{2\Delta x^2} \left((M^n u_{i+1})^2 - 2(M^n u_i)^2 + (M^n u_{i-1})^2 \right),$$

et où Δ_i est défini par

$$\Delta_i X = X_i - X_{i-1}.$$

Démonstration du Lemme 6.22

Les inégalités (6.46) résultent des principes du maximum établis au Lemme 6.21 et de la définition (6.45) et de son homologue pour S où par hypothèse les fonctions h et g sont croissantes.

Le second membre du bilan d'énergie totale, à l'issue du second pas, est clairement donné par :

$$-\mathcal{E}_i^n + \left(\{\rho E\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho S)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} \right) - \{\rho E\} \left(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho S)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) \right).$$

La différence des deux derniers termes trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u_i^{n+1,-} + u_i^{n+1,=})((\rho u)_i^{n+1,-} - (\rho u)_i^{n+1,=}) + \\ & \frac{(\rho_i^{n+1,-})^\gamma}{\gamma - 1} (g^{-1}(S_i^{n+1,-}) - g^{-1}(S_i^{n+1,=})) + \frac{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} (h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,-}) - h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1,=})). \end{aligned}$$

Les formules aux différences finies (5.3.i), (5.3.iii) et (5.9) assurent la formule finale escomptée. ■

Troisième pas : Echange des entropies de Lax et projection nonlinéaire ($t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$)

Suivant Coquel-Perthame [30], notre propos est ici de redéfinir l'énergie totale de manière à ce que sa norme L^1 soit conservée. L'énergie totale figurant de nouveau parmi les inconnues du problème, nécessairement ρS ou ρS_τ devient une fonction des autres inconnues. Le choix est indifférent et considérons, pour fixer les idées, ρS en tant qu'entropie de Lax. Ainsi, ρ et ρu étant fixés, nous proposons de rendre conservatif le bilan d'énergie totale en définissant la valeur finale de l'énergie par

$$(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\partial_x(\mu + \mu_\tau)u \partial_x u_i^{n+1,-}}, \quad (6.48)$$

tout en exigeant de $\{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1})$ et donc de $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ de satisfaire bien entendu :

$$\begin{aligned} & \mu_\tau \frac{\overline{\rho^{\gamma-1}}}{\gamma - 1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i}^{n+1,-} \times \\ & \left(\{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S u\}_{i+1/2}^n \right) - \\ & \mu \frac{\overline{\rho^{\gamma_\tau-1}}}{\gamma_\tau - 1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i}^{n+1,-} \left((\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n \right) = 0, \quad (6.49) \end{aligned}$$

ce qui fixe de manière implicite la valeur finale de l'inconnue $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$.

Cet échange de bilan d'entropie de Lax, où la définition (6.45) est utilisée pour la moyenne des produits, achève la description de l'algorithme et permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 6.23

Supposons satisfaite la condition CFL (6.42). La projection nonlinéaire (6.49) définit de manière unique $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ et donc $(\rho S)_i^{n+1}$.

Par ailleurs, les inégalités d'entropie suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} & \{\rho\phi(S)\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - \\ & (\rho\phi(S))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho\phi(S)u\}_{i+1/2}^n \leq 0, \end{aligned} \quad (6.50.i)$$

$$\begin{aligned} & \{\rho\psi(S_\tau)\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}) - \\ & (\rho\psi(S_\tau))_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho\psi(S_\tau)u\}_{i+1/2}^n \leq 0, \end{aligned} \quad (6.50.ii)$$

pour toutes fonctions convexes, strictement décroissantes, ϕ et ψ . Les fonctions flux numériques d'entropie répondent à la définition (5.24) avec respectivement $X = \phi(S)$ et $X = \psi(S_\tau)$.

Les principes du maximum suivants sur les entropies spécifiques S et S_τ sont vérifiés :

$$S_i^{n+1} \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n), \quad (6.51.i)$$

$$S_{\tau i}^{n+1} \geq \min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n). \quad (6.51.ii)$$

En conséquence, les pressions p_i^{n+1} et $p_{\tau i}^{n+1}$ restent positives.

Avant de donner la preuve des précédentes assertions, nous résumons succinctement l'algorithme proposé :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u\}_{i+1/2}^n, \quad (6.52.i)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho u^2 + p + p_\tau\}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)\partial_x u)}_i^{n+1,-}, \quad (6.52.ii)$$

$$(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{(\rho E + p + p_\tau)u\}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\partial_x((\mu + \mu_\tau)u\partial_x u)}_i^{n+1,-}, \quad (6.52.iii)$$

$$\begin{aligned} & \mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \left((\rho S)_i^{n+1} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n \right) - \\ & \mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i} \left((\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.52.iv)$$

Dans la pratique, la dernière équation permet d'exprimer $(\rho S)_i^{n+1}$ en fonction de $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$. L'identité :

$$(\rho E)_i^{n+1} = \frac{((\rho u)_i^{n+1})^2}{2\rho_i^{n+1}} + \frac{(\rho_i^{n+1})^{\gamma-1}}{\gamma-1} g^{-1} \left(\frac{(\rho S)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right) + \frac{(\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} h^{-1} \left(\frac{(\rho S_\tau)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right),$$

donnant alors $(\rho S)_i^{n+1}$ et donc $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ de façon implicite. Il en résulte que la valeur des pressions est donnée par

$$p_i^{n+1} = (\rho_i^{n+1})^\gamma g^{-1} \left(\frac{(\rho S)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right), \quad p_{\tau i}^{n+1} = (\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau} h^{-1} \left(\frac{(\rho S_\tau)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right).$$

La preuve du Théorème 6.23 repose sur quelques lemmes techniques que nous détaillons à présent. La validité de ces lemmes repose sur les propriétés de monotonie de l'application $\{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ mise en évidence dans le résultat suivant :

Lemme 6.24

Supposons g et h strictement croissantes concaves, alors l'application strictement concave

$$(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau) \rightarrow \{\rho S\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$$

est une fonction strictement croissante en la variable ρE à $(\rho, \rho u, \rho S_\tau)$ fixé et décroissante en la variable ρS_τ à $(\rho, \rho u, \rho E)$ fixé.

Démonstration du Lemme 6.24

La concavité résulte d'un argument similaire à celui développé au Lemme 2.4. Un calcul immédiat assure

$$\begin{aligned} \partial_{\rho E} \{\rho S\} &= \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)), \\ \partial_{\rho S_\tau} \{\rho S\} &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma_\tau - 1} \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\rho^{\gamma-1}} \frac{g'(g^{-1}(S))}{h'(h^{-1}(S_\tau))}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

d'où la conclusion. ■

Armés de ces propriétés, nous prouvons que le fait d'avoir exigé la conservation de l'énergie totale implique que les entropies spécifiques vérifient nécessairement :

$$(\rho S)_i^{n+1} \geq (\rho S)_i^{n+1,=} = (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n, \quad (6.54.i)$$

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} \geq (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} = (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n. \quad (6.54.ii)$$

Il en résultera alors des principes du minimum sur les entropies spécifiques énoncés en (6.51) en vertu du Lemme 5.9 et des inégalités résultantes (5.23). En conséquence, la positivité des pressions est assurée par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &\geq (\rho_i^{n+1})^{\gamma-1} g^{-1} \left(\min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n) \right) \geq 0, \\ p_{\tau i}^{n+1} &\geq (\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau-1} h^{-1} \left(\min(S_{\tau i-1}^n, S_{\tau i}^n, S_{\tau i+1}^n) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

en invoquant les hypothèses faites sur g et h (cf. Lemme 2.4).

Afin d'établir les inégalités (6.54), nous montrons qu'il existe un unique nombre $\mathcal{M}_i^{n+1} > 0$, résultant de la définition de (6.48), tel que

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1}, \quad (6.55)$$

où, par définition et avec les formules (6.45),

$$\mathcal{C}_i^{n+1,-} = \frac{\mu_\tau}{\mu} \frac{\gamma - 1}{\gamma_\tau - 1} \frac{(\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau-1}}{(\rho_i^{n+1})^{\gamma-1}} \frac{\overline{g'(g^{-1}(S))}_i^{n+1,-}}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,-}}$$

désigne une constante strictement positive. Cette constante $\mathcal{C}_i^{n+1,-}$ est, bien entendu, telle que

$$\begin{aligned} \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1} \right) = \\ (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n + \mathcal{M}_i^{n+1}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

et coïncide, dès lors, avec $(\rho S)_i^{n+1}$. Il en résulte la version discrète (6.52.iv) de l'équation non conservative (2.23.iv). Notons alors que la positivité de $\mathcal{M}_i^{n+1}$ permettra de conclure à l'inégalité attendue :

$$S_i^{n+1} \geq S_i^{n+1,=} = (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n \geq \min(S_{i-1}^n, S_i^n, S_{i+1}^n).$$

Nous avons en effet :

Lemme 6.25

Supposons la condition CFL (6.42) satisfaite. Pour chaque $i \in Z$, il existe un unique $\mathcal{M}_i^{n+1}$ satisfaisant (6.55)-(6.56).

Démonstration du Lemme 6.25

Considérons la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(m) = \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} m \right) - (\rho S)_i^{n+1,=} - m,$$

où

$$(\rho S)_i^{n+1,=} = \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right)$$

et $(\rho E)_i^{n+1,=}$ est donné par le bilan d'énergie totale (6.43).

En corollaire du lemme technique 6.24 et puisque $\mathcal{C}_i^{n+1,-} > 0$, cette application est décroissante et vérifie

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \theta(m) = -\infty.$$

Afin de conclure la démonstration, il suffit de prouver que $\theta(0) \geq 0$. Calculons

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) - (\rho S)_i^{n+1,=}, \\ &= \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) - (\rho S)_i^{n+1,=}, \end{aligned}$$

Puisque $\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-}$ et $(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1,-}$.

Exiger la conservation de l'énergie totale implique, au vu de l'inégalité d'énergie (6.47) :

$$(\rho E)_i^{n+1} \geq (\rho E)_i^{n+1,-}.$$

La croissance de $\rho E \rightarrow \{\rho S\}(\cdot, \cdot, \rho E, \cdot)$, établie au lemme 6.24, assure donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) &\geq \\ \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right). \end{aligned}$$

De même, l'inégalité (6.46.ii) assure

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \leq (\rho S_\tau)_i^{n+1,-},$$

et puisque l'application $\rho S \rightarrow \{\rho S\}(\cdot, \cdot, \cdot, \rho S_\tau)$ est décroissante, il en résulte

$$\begin{aligned} \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) &\geq \\ \{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} \right), \end{aligned}$$

où le membre de droite coïncide, par définition, avec $(\rho S)_i^{n+1,-}$.

En invoquant les hypothèses sur g nous déduisons de la formule (6.46.i) l'inégalité suivante :

$$\{\rho S\} \left(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} \right) \geq (\rho S)_i^{n+1,-} \geq (\rho S)_i^{n+1,=},$$

d'où la conclusion désirée puisque $\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-} = \rho_i^{n+1,=}$.

Notons qu'en règle générale, la précédente chaîne d'inégalités est stricte et qu'ainsi $\theta(0) > 0$. ■

Achevons, fort de ce résultat, la démonstration du Théorème 6.23 en établissant les inégalités d'entropie (6.50). Leur validité résulte de la propriété que possèdent les entropies spécifiques thermodynamiques S et S_τ d'être solutions d'une équation de transport à l'issue du premier pas. Sous la condition CFL (6.42), nous avons

$$\begin{aligned} (\rho S)_i^{n+1,=} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho S(x, \Delta t) dx, \\ &= (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n, \end{aligned} \tag{6.57}$$

où la fonction flux numérique répond à la définition (5.24).

Considérons, à présent, une fonction ϕ strictement décroissante, strictement convexe de sorte que l'application $\{\rho \phi(S)\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau)$ est strictement convexe (cf. par exemple le lemme 6.20). En vertu de la décroissance de ϕ , le principe du minimum (6.54.i) implique

$$\rho_i^{n+1} S_i^{n+1} \geq \rho_i^{n+1,=} S_i^{n+1,=} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho S(x, \Delta t) dx,$$

soit, puisque $\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,=}$ par construction,

$$\phi(S_i^{n+1}) \leq \phi \left(\frac{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho S(x, \Delta t) dx}{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, \Delta t) dx} \right).$$

La preuve peut être désormais achevée en adoptant exactement les mêmes pas que ceux proposés lors de la démonstration du Lemme 5.11 pour conclure à l'inégalité de Lax :

$$\rho_i^{n+1} \phi(S_i^{n+1}) - \rho_i^n \phi(S_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho \phi(S) u \}_{i+1/2}^n \leq 0.$$

L'inégalité d'entropie portant sur l'entropie spécifique S_τ s'obtient en procédant de la même manière. Notons, enfin, que l'application $\{\rho \psi(S_\tau)\}(\rho, \rho u, \rho E, \rho S)$ est en fait convexe sous les hypothèses adoptées sur les fonctions g , h et ψ . Ceci conclut la preuve du Théorème 6.23. ■

6.4 Approximation numérique des termes de conductivité thermiques

Notre propos est d'indiquer ici comment discrétiser les lois de Fourier présentes dans le système (2.1) lorsque les conductivités thermiques sont choisies non nulles. Nous montrons ici comment obtenir des formules aux différences assurant l'équivalence des solutions discrètes lors du pas dédié à la prise en compte des conductivités thermiques. Ces formules sont bien sur les analogues des formules introduites à la section 5.

Soulignons que de nouveau, la définition des moyennes intervenant dans la définition des produits non conservatifs discrets impliqués dans la projection nonlinéaire (6.28) n'est pas arbitraire mais doit être liée au choix des formules aux différences relatives aux conductivités, ceci de manière à assurer formellement la consistance de la méthode discrète avec la condition de saut généralisée (2.38). Décrivons succinctement les différents pas constituant la méthode.

Premier pas : Prise en compte de l'opérateur du premier ordre ($t^n \rightarrow t^{n+1,=}$)

Le premier pas est identique à ceux développés dans le contexte des méthodes par projection nonlinéaire : il est nécessairement constitué de la prise en compte de l'opérateur du premier ordre extrait.

Deuxième pas : Prise en compte des conductivités thermiques ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,\Xi}$)

Supposons donc connue à l'issue du second pas la solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1,\Xi})$ qui est par construction constante par morceaux. Approchons la solution du problème de Cauchy

suivant :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (6.58.i)$$

$$\partial_t \rho u = 0, \quad (6.58.ii)$$

$$\partial_t \rho E = \partial_x (\kappa \partial_x T) + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau), \quad (6.58.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau), \quad (6.58.iv)$$

pour le choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^{n+1, \Xi})$. Considérons à cet effet pour $i \in Z$

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1, =} &= \rho_i^{n+1, \Xi}, \\ (\rho u)_i^{n+1, =} &= (\rho u)_i^{n+1, \Xi}, \\ (\rho S)_i^{n+1, =} &= (\rho S)_i^{n+1, \Xi} + \Delta t \overline{\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} g'(g^{-1}(S))}_i^{n+1, =} \times \overline{\partial_x \kappa \partial_x T}_i^{n+1, =}, \\ (\rho S_\tau)_i^{n+1, =} &= (\rho S_\tau)_i^{n+1, \Xi} + \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau))}_i^{n+1, =} \times \overline{\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau}_i^{n+1, =}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé une définition des moyennes identique à (5.4) mais exprimée à l'instant du pas considéré :

$$\overline{h'(h^{-1}(S_\tau))}_i^{n+1, =} = \begin{cases} \frac{S_{\tau i}^{n+1, =} - S_{\tau i}^{n+1, \Xi}}{h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1, =}) - h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1, \Xi})}, & \text{si } S_{\tau i}^{n+1, =} \neq S_{\tau i}^{n+1, \Xi}, \\ h'(h^{-1}(S_{\tau i}^{n+1, =})), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.59)$$

et son analogue $\overline{g'(g^{-1}(S))}_i^{n+1, =}$.

Les opérateurs aux différences impliqués dans le précédent système discret trouvent par exemple la forme suivante :

$$\overline{\partial_x \kappa \partial_x T}_i^{n+1, =} = \kappa \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1}^{n+1, =} - 2T_i^{n+1, =} + T_{i-1}^{n+1, =}), \quad (6.60)$$

avec une définition analogue pour $\overline{\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau}_i^{n+1, =}$.

Du choix des moyennes (6.59) il résulte, tout comme dans la section 5, les identités suivantes valables pour tout $i \in Z$:

$$\frac{(\rho_i^{n+1, \Xi})^\gamma}{\gamma - 1} (s_i^{n+1, =} - s_i^{n+1, \Xi}) = \Delta t \overline{\partial_x \kappa \partial_x T}_i^{n+1, =},$$

soit en arguant de la constance de la densité au cours de ce pas

$$\frac{\rho_i^{n+1, \Xi}}{\gamma - 1} (T_i^{n+1, =} - T_i^{n+1, \Xi}) = \Delta t \overline{\partial_x \kappa \partial_x T}_i^{n+1, =}.$$

Nous disposons, bien entendu, par construction de la relation analogue

$$\frac{\rho_i^{n+1,\Xi}}{\gamma_\tau - 1} (T_{\tau i}^{n+1,=} - T_{\tau i}^{n+1,\Xi}) = \Delta t \overline{\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_{\tau i}^{n+1,=}}.$$

Il s'agit donc de résoudre deux problèmes implicites découplés qui dans la pratique et donc en présence de conditions aux limites *ad hoc* constituent chacun un problème matriciel symétrique défini positif.

Soulignons que les identités obtenues assurent le caractère intrinsèque de la méthode aux différences finies choisie au sens du Lemme 5.3. Notons en effet que la définition des moyennes opérées en (6.59) permet l'introduction, laissée au lecteur, d'une solution discrète construite sur (6.58) et équivalente à celle que nous considérons ici.

Nous concluons le second pas par les remarques suivantes énoncées sans démonstration. La première est relative à l'inégalité d'entropie discrète et nous avons immédiatement :

$$\begin{aligned} & \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,=}, (\rho u)_i^{n+1,=}, (\rho E)_i^{n+1,=}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n = \\ & \mathcal{E}_{c_i}^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) (\partial_x \kappa \partial_x T)}_i^{n+1,=}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n = \\ & \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau)}_i^{n+1,=}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Nous indiquons ici formellement la validité de principes du maximum sur les températures desquels nous déduirons des principes du maximum sur les entropies en vertu de l'invariance en temps de la densité lors de ce second pas.

Formellement et lorsque i parcourt un ensemble borné de Z , la matrice symétrique définie positive associée par exemple à (6.60) est tridiagonale et possède pour ligne courante :

$$\dots, 0, -\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \kappa \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\rho_i^{n+1,\Xi}}{\gamma - 1}, -\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, 0, \dots \quad (6.63)$$

le second membre ayant pour composante associée :

$$\frac{\rho_i^{n+1,\Xi}}{\gamma - 1} T_i^{n+1,\Xi}.$$

La matrice considérée est clairement une L-matrice à diagonale dominante sous des conditions aux limites *ad hoc*. Son inverse existe et possède la propriété de M-matrice : *i.e.* ses

coefficients sont tous positifs ou nuls. Pour ces notions classiques nous renvoyons le lecteur à [44] par exemple.

Fort de cette propriété et en substituant à l'inconnue $T_i^{n+1,=}$ la nouvelle inconnue

$$T_{\min_i}^{n+1,=} := T_i^{n+1,=} - \min(T_i^{n+1,\Xi}),$$

le problème matriciel considéré est associé à la même matrice mais pour le nouveau second membre :

$$\frac{\rho_i^{n+1,\Xi}}{\gamma - 1} (T_i^{n+1,\Xi} - \min(T_i^{n+1,\Xi})) \geq 0.$$

De la propriété de M-matrice, nous déduisons immédiatement l'inégalité suivante :

$$T_{\min_i}^{n+1,=} := T_i^{n+1,=} - \min(T_i^{n+1,\Xi}) \geq 0.$$

L'invariance en temps de la densité au cours de ce troisième pas assure donc les inégalités attendues suivantes :

$$S_i^{n+1,=} \geq g \left(\frac{\min(T_i^{n+1,\Xi})}{(\rho_i^{n+1,\Xi})^{\gamma-1}} \right) \geq 0, \quad (6.64)$$

et pour les mêmes raisons :

$$S_{\tau_i}^{n+1,=} \geq h \left(\frac{\min(T_{\tau_i}^{n+1,\Xi})}{(\rho_i^{n+1,\Xi})^{\gamma-1}} \right) \geq 0. \quad (6.65)$$

Nous nous sommes bien sur, ici, placé loin du vide.

Troisième pas : Prise en compte de l'opérateur visqueux ($t^{n+1,=} \rightarrow t^{n+1,-}$)

Nous choisissons ici et par exemple les formules aux différences finies telles qu'elles ont été décrites dans la section 5, c'est à dire ne conduisant pas à une erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes. Ces formules impliquent donc les moyennes définies par (5.4) (voir également section 6.3).

Au terme de ce troisième pas, les développements proposés lors de la précédente section assurent le résultat suivant :

Lemme 6.26

Supposons satisfaite la condition CFL (6.42). Les principes suivants ont lieu :

$$S_i^{n+1,-} \geq S_i^{n+1,=}, \quad (6.66.i)$$

$$S_{\tau_i}^{n+1,-} \geq S_{\tau_i}^{n+1,=}. \quad (6.66.ii)$$

Par ailleurs l'inégalité d'entropie précisée suivante a lieu :

$$\begin{aligned} \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n - \\ \Delta t \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) (\partial_x \kappa \partial_x T)_i^{n+1,=} = \mathcal{E}_{c_i}^n + \Delta t \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)_i^{n+1,-} \geq 0, \end{aligned} \quad (6.67)$$

où la formule aux différences finies impliquée est donnée par l'expression consistante :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) \mu (\partial_x u)_i^{n+1,-} &= \frac{\gamma-1}{(\rho_i^n)^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i^{n+1,-} \\ &\quad \mu \frac{1}{2\Delta x^2} \left((u_{i+1}^{n+1,-} - u_i^{n+1,-})^2 + (u_i^{n+1,-} - u_{i-1}^{n+1,-})^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, nous avons l'inégalité d'entropie précisée suivante :

$$\begin{aligned} (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n - \Delta t \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau)_i^{n+1,=} = \\ \Delta t \frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)_i^{n+1,-}. \end{aligned}$$

Dernier pas : projection nonlinéaire ($\mathfrak{t}^{n+1,-} \rightarrow \mathfrak{t}^{n+1}$)

De manière à forcer la validité de la condition de saut généralisée (2.38), nous invoquons l'opérateur de projection nonlinéaire décrit dans les précédentes sections.

Ainsi, posons afin de préserver les propriétés de conservation requises :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-}, \quad (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1,-}, \quad (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^{n+1,-},$$

et définissons

$$(\rho S)_i^{n+1} := \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}),$$

c'est à dire $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mu_\tau \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \times \left(\{\rho S\}_i^{n+1} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S u\}_{i+1/2}^n - \right. \\ \left. \Delta t \frac{\gamma-1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i^{n+1,=} \partial_x \kappa \partial_x T_i^{n+1,=} \right) - \\ \mu \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i} \times \left((\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n - \right. \\ \left. \Delta t \frac{\gamma_\tau-1}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,=} \partial_x \kappa_\tau \partial_x T_{\tau i}^{n+1,=} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Il apparaît clairement à la lecture de l'opération de projection nonlinéaire défini en (6.68) que la définition des moyennes à opérer est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))}}_i^{n+1,-} &= \left[\frac{\gamma-1}{(\rho_i^{n+1})^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i^{n+1,-} \right]^{-1}, \\ \overline{\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))}}_i^{n+1,-} &= \left[\frac{\gamma_\tau-1}{(\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,-} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Tout autre choix conduirait en général les opérateurs de Fourier discrets à engendrer une contribution résiduelle après sommation sur $i \in Z$ et ce de manière inconsistante avec la relation de saut généralisée attendue (2.38).

Montrons l'existence et l'unicité de l'opération de projection nonlinéaire de $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$, en établissant qu'il existe un unique nombre $\mathcal{M}_i^{n+1} \geq 0$, résultant de la projection nonlinéaire (6.68), tel que

$$(\rho S_\tau)_i^{n+1} = (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1}, \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} &= (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho S_\tau u \}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x T_\tau)}_i^{n+1,-} + \\ &\quad \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1} \end{aligned} \quad (6.71)$$

où par définition

$$\mathcal{C}_i^{n+1,-} = \frac{\mu_\tau}{\mu} \overline{\frac{(\rho)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))}}_i^{n+1,-} / \overline{\frac{(\rho)^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))}}_i^{n+1,-} \quad (6.72)$$

désigne une constante strictement positive. Cette constante est, bien entendu, telle que

$$\begin{aligned} &\{ \rho S \} (\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-} + \mathcal{C}_i^{n+1,-} \mathcal{M}_i^{n+1}) = \\ &(\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho S u \}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) (\partial_x \kappa \partial_x T)}_i^{n+1,-} + \mathcal{M}_i^{n+1} \end{aligned} \quad (6.73)$$

coïncide avec $(\rho S)_i^{n+1}$ solution de la formule de projection nonlinéaire (6.68). Afin de simplifier les écritures, nous introduisons la notation :

$$(\rho S)_i^{n+1,*} := (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{ \rho S u \}_{i+1/2}^n + \Delta t \overline{\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) (\partial_x \kappa \partial_x T)}_i^{n+1,-}.$$

Notons alors que la positivité de $\mathcal{M}_i^{n+1}$ permettra de conclure aux inégalités :

$$\begin{aligned} S_i^{n+1} &\geq g \left(\frac{\min(T_i^{n+1,-})}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma-1}} \right) \geq g \left(\frac{\min(T_i^n)}{(\rho_i^n)^{\gamma-1}} \right) \geq 0, \\ S_{\tau i}^{n+1} &\geq h \left(\frac{\min(T_{\tau i}^{n+1,-})}{(\rho_i^{n+1,-})^{\gamma_\tau-1}} \right) \geq h \left(\frac{\min(T_{\tau i}^n)}{(\rho_i^n)^{\gamma_\tau-1}} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

qui assurent dès lors la positivité des pressions p_i^{n+1} et $p_{\tau_i}^{n+1}$ dès que la densité ρ_i^{n+1} reste positive.

Remarque 6.27

La preuve du résultat énoncé ci-dessous soulignera que la positivité des pressions résulte de la stratégie de décomposition en opérateurs précédemment décrite et pour laquelle les phénomènes visqueux sont pris en compte **après** les phénomènes de conduction thermique. Nous aurions pu traiter ces derniers phénomènes au titre de dernier pas, *i.e.* après l'étape de projection nonlinéaire, mais à la condition exclusive d'utiliser des formules aux différences construites sur (6.59) et n'impliquant aucune erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes. Toutefois et par consistance avec ce qui suivra, où les viscosités seront fonctions des inconnues, nous n'avons pas suivi cette approche.

Nous avons :

Lemme 6.28

Supposons la condition CFL (6.13) satisfaite. Alors pour chaque $i \in Z$, il existe un unique $\mathcal{M}_i^{n+1}$ positif satisfaisant (6.70) et (6.73).

Démonstration de Lemme 6.28

Fixons $i \in Z$ et définissons, comme au Lemme 6.5, la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(m) = \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=} + \mathcal{C}_i^{n+1,=} m) - (\rho S)_i^{n+1,*} - m.$$

En utilisant les mêmes arguments qu'au Lemme 6.5, il suffit en réalité de prouver que $\theta(0) \geq 0$ pour établir l'existence et l'unicité de $\mathcal{M}_i^{n+1}$.

Calculons avec des arguments désormais standards :

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^{n+1,*}, \\ &= \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,=}) - (\rho S)_i^{n+1,*}, \\ &\geq \{\rho S\}(\rho_i^{n+1,-}, (\rho u)_i^{n+1,-}, (\rho E)_i^{n+1,-}, (\rho S_\tau)_i^{n+1,-}) - (\rho S)_i^{n+1,*}, \\ &= (\rho S)_i^{n+1,-} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \{\rho S u\}_{i+1/2}^n - \Delta t \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S)) (\partial_x \kappa \partial_x T)_i^{n+1,=}. \end{aligned}$$

L'inégalité d'entropie discrète (6.67) permet de conclure à la positivité de $\theta(0)$, cette positivité étant généralement stricte. ■

6.5 Mise en oeuvre numérique

La classe de méthodes précédemment introduite est appliquée pour l'obtention de solutions approchées de (2.23). Cependant ici, une de nos principales motivations étant

la comparaison numérique des méthodes classiques à la présente stratégie de projection nonlinéaire, une linéarisation de Roe est adoptée, celle-ci ayant été privilégiée dans le cadre des méthodes classiques.

Sur la base de la linéarisation de Roe proposée dans la section 5.3, la densité ρ , la quantité de mouvement ρu et l'énergie ρE sont déterminés par

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho,i}^n = 0, \quad (6.74.i)$$

$$\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho u,i}^n = (\mu + \mu_\tau) (M^n u_{i+1} - 2M^n u_i + M^n u_{i-1}), \quad (6.74.ii)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \Delta_i f_{\rho E,i}^n = \\ (\mu + \mu_\tau) \left((M^n u_{i+1} - M^n u_i)^2 + (M^n u_i - M^n u_{i-1})^2 \right), \end{aligned} \quad (6.74.iii)$$

avec

$$\Delta_i f_i^n = f(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - f(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n).$$

L'opérateur discret M^n est défini par (5.5) et les flux numériques f_ρ , $f_{\rho u}$ et $f_{\rho E}$ sont donnés respectivement par (5.46.i), (5.46.ii) et (5.46.iii).

Seul reste à discrétiser l'équation non conservative

$$\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h'(h^{-1}(S_\tau))} \left\{ \partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u \right\} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g'(g^{-1}(S))} \left\{ \partial_t \rho S + \partial_x \rho S u \right\} = 0, \quad (6.75)$$

Dans cet objectif, nous construisons des flux (conservatifs) pour chacune des entropies :

$$f_{\rho S_\tau}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ (\rho S_\tau u)_L + (\rho S_\tau u)_R - \left(\Phi \overline{S_\tau} - |\overline{u}| (\overline{S_\tau} \Delta \rho - \Delta \rho S_\tau) \right) \right\}, \quad (6.76)$$

$$f_{\rho S}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} \left\{ (\rho S u)_L + (\rho S u)_R - \left(\Phi \overline{S} - |\overline{u}| (\overline{S} \Delta \rho - \Delta \rho S) \right) \right\}, \quad (6.77)$$

où Φ est définie par (5.45). Il en résulte la forme discrète suivante de (6.75) :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_i^n)^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{\mu}{h'(h^{-1}(\frac{(\rho S_\tau)_i^n}{\rho_i^n}))} \left\{ (\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{\rho S_\tau}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - f_{\rho S_\tau}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) \right\} = \\ \frac{(\rho_i^n)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mu_\tau}{g'(g^{-1}(\frac{(\rho S)_i^n}{\rho_i^n}))} \left\{ (\rho S)_i^{n+1} - (\rho S)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{\rho S}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - f_{\rho S}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) \right\}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

En se rappelant que

$$\begin{aligned} \rho E - \rho \frac{u^2}{2} &= \frac{p}{\gamma-1} + \frac{p_\tau}{\gamma_\tau-1}, \\ &= \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \rho g^{-1}(S) + \frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \rho h^{-1}(S_\tau), \end{aligned}$$

il en résulte la relation discrète suivante :

$$(\rho E)_i^{n+1} - \frac{((\rho u)_i^{n+1})^2}{2\rho_i^{n+1}} = \frac{(\rho_i^{n+1})^{\gamma-1}}{\gamma-1} g^{-1} \left(\frac{(\rho S)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right) + \frac{(\rho_i^{n+1})^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} h^{-1} \left(\frac{(\rho S_\tau)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} \right). \quad (6.79)$$

En conséquence, puisque ρ_i^{n+1} , $(\rho u)_i^{n+1}$ et $(\rho E)_i^{n+1}$ sont connus, car donnés par (6.74), $(\rho s_\tau)_i^{n+1}$ et $(\rho s)_i^{n+1}$ sont obtenus par la résolution d'un système implicite formé des équations (6.78) et (6.79). Notons que dans le cas particulier où les applications g et h sont définies par l'identité, le système (6.78)-(6.79) devient alors linéaire.

Remarque 6.29

Rappelons que dans le cas particulier $\gamma = \gamma_\tau$ avec g et h définies par l'identité, le système (2.23) trouve la forme conservative suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \\ \partial_t (\mu \rho s_\tau - \mu_\tau \rho s) + \partial_x (\mu \rho s_\tau - \mu_\tau \rho s) u = 0, \end{cases} \quad (6.80)$$

où

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad \text{et} \quad s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}.$$

Il est important de noter que la discrétisation précédente coïncide avec la méthode de Roe pour le système conservatif (6.80).

Section 7

Résultats numériques pour les modèles à deux lois de pression

7 Résultats numériques pour les modèles à deux lois de pression

Les trois schémas, discutés lors des précédentes sections, sont ici appliqués à l'approximation numérique des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux du système (2.5). Les problèmes de Cauchy considérés correspondent aux choix d'une donnée initiale discontinue composée de deux états constants, la discontinuité ayant lieu en $x = 0$.

Les calculs rapportés ci-dessous ont été menés, dans leur totalité, avec la stratégie suivante : le nombre CFL est fixé à la valeur constante 0.5 pour des discrétisations uniformes en espace. Ces dernières sont constituées de 100 à 2000 cellules dans le cas du schéma classique et du schéma par projection L^2 . La méthode par projection nonlinéaire est systématiquement associée à une grille uniforme composée de 300 cellules.

Les solutions discrètes ainsi obtenues sont toujours comparées à la solution exacte du problème de Cauchy associé à l'opérateur du premier ordre extrait (2.9). La solution exacte n'est donc autre que la solution du problème de Riemann associé. Si il est bien entendu que nous résolvons numériquement (2.5) et non (2.9), mais pour un nombre de Reynolds grand ($\text{Reynolds}=10^5$) dans tous les tests, notre propos est ici de qualifier l'aptitude des trois méthodes numériques à la capture des relations de saut (pour les solutions onde progressive et donc pour la solution onde de choc associée, cf. Théorème 2.9) $(\sigma; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour la construction de telles solutions exactes.

Remarquons que les problèmes proposés conduisent toujours à des solutions constituées de trois ondes simples et non seulement d'une seule, nous testons ainsi l'aptitude des méthodes à restituer la bonne décomposition en ondes simples avec pour chaque onde discrète le respect des relations de saut généralisées.

Nous renvoyons le lecteur aux tables 4.1 et 4.2 présentées à la fin de cette section pour le choix des états gauches et droits ainsi que les valeurs précisées des paramètres γ , γ_τ et du rapport μ_τ/μ , le nombre de Reynolds étant fixé à la valeur constante 10^5 qui est typique d'un problème d'aérodynamique.

Ici et de manière à éviter l'inflation du nombre de cas test numérique, nous n'avons délibérément pas traité le modèle de fluide à deux températures pour des conductivités thermiques non nulles. Notre propos est d'illustrer que les difficultés exhibées dans le cas de viscosités constantes (voir les cas A B C D E) se trouvent être exacerbées dans le cas de viscosités variables, *i.e.* fonctions des inconnues (voir les problèmes F G H I), dans les cas du schéma classique et du schéma par projection L^2 . Nous renvoyons le lecteur à la section 8, section dévolue aux modèles de turbulence compressible, où nous présentons des tests numériques incluant des viscosités ainsi que des conductivités variables et uniquement dans le cas du schéma par projection nonlinéaire, les deux autres méthodes ayant été disqualifiées.

Cas test A :

Le premier problème est proposé dans un souci de validation informatique. Nous adoptons ici l'hypothèse de modélisation $\gamma = \gamma_\tau$ conduisant le système (2.5) à admettre une formulation conservative équivalente (cf. Lemme 2.18).

Puisque $\gamma = \gamma_\tau$, le système équivalent ainsi défini peut être compris comme le système Euler 3×3 habituel mais pour la pression totale $p + p_\tau$ et complété d'une équation de transport découplée (2.32) régissant la quantité $(\mu s_\tau - \mu_\tau s)$. En conséquence, les trois méthodes discutées doivent impérativement restituer une approximation correcte des inconnues ρ , ρu et ρE , la seule inconsistance ne pouvant être trouvée que sur la prédiction des pressions p et p_τ lorsque considérées séparément (leur somme devant être correcte). La lecture des résultats numériques obtenus répond à cette exigence et en ce sens les méthodes sont désormais informatiquement validées.

Ici, nous avons fait choix de $\mu = \mu_\tau$ de sorte à nous placer loin, numériquement parlant, des deux cas limites conservatifs exhibés au Théorème 2.19. Il ressort d'un tel choix que la méthode classique et la méthode par projection L^2 conduisent à des erreurs L^1 , quant à la prédiction des pressions p et p_τ , inacceptables au niveau de raffinement proposé (2000 cellules) et ce contrairement à la méthode d'approximation par projection nonlinéaire qui par construction est ici purement conservative.

Cas tests B C D :

Nous adoptons pour ne plus la quitter l'hypothèse de modélisation générale $\gamma \neq \gamma_\tau$. Le système (2.5) est en conséquence vraiment non conservatif puisque ici les deux viscosités μ et μ_τ sont toutes deux non nulles. Notre propos est d'étudier l'aptitude des méthodes numériques à restituer une décomposition en ondes simples correcte pour trois régimes types de modélisation relatifs à la valeur du rapport des viscosités μ_τ/μ , respectivement 1, grand devant 1 puis petit devant 1. Dans ces deux derniers cas, le système (2.5) est asymptotiquement équivalent à un système sous forme conservative au sens du théorème 2.19 et ce contrairement au cas $\frac{\mu_\tau}{\mu} = 1$. Le cas B relevant de ce régime est particulièrement sévère non pas parce que l'amplitude de la 1-onde de choc ou de la 3-onde de choc est grande, elle est en fait ici modérée, mais bien parce que les pressions p et p_τ sont constantes entre la 1-onde et la 3-onde de choc.

L'examen des résultats obtenus pour ces trois régimes en utilisant la méthode classique suffit à disqualifier définitivement cette approche : les erreurs sont systématiquement inacceptables. La méthode par projection L^2 ne conduit à une approximation numérique acceptable que dans le cas limite $\frac{\mu_\tau}{\mu} \ll 1$, ce qui est attendu à l'instant considéré puisqu'il est fait choix de la variable d'évolution ρS_τ et qu'asymptotiquement (en μ_τ/μ) celle-ci doit être conservée. Soulignons que l'erreur observée, faible à l'instant considéré, ne peut que s'amplifier avec le temps puisque l'erreur de projection L^2 est une fonction croissante du temps et que contrairement à la méthode par projection nonlinéaire, celle-ci n'est jamais redistribuée de manière à forcer la consistance avec la relation de saut généralisée (2.9).

Dans les trois cas test proposés, la méthode par projection nonlinéaire conduit à des solutions discrètes que nous jugeons acceptables même si dans le cas B (cas sévère), il est

possible de distinguer une faible erreur à la constance des pressions p et p_τ entre les 1 et 3 ondes discrètes.

Cas test E:

Le choix de la donnée initiale conduit à une solution $\mathcal{C}^0$ du problème de Riemann pour (2.9), constituée d'une 1-onde et d'une 3-onde de détente (de faible amplitude), les pressions p et p_τ restant constantes à la traversée de la discontinuité de contact (celle-ci est donc triviale). Le rapport des viscosités est fixé à 1, régime le plus défavorable.

La méthode par projection nonlinéaire ainsi que par projection L^2 conduisent à une solution discrète acceptable. Il faut comprendre ici que la solution exacte étant $\mathcal{C}^0$, l'erreur de projection L^2 est faible et ne pénalise donc pas la méthode par projection linéaire (rappelons que les détente sont ici de faible amplitude). L'examen de la formule d'erreur (5.22) le suggère et nous renvoyons le lecteur aux expériences numériques proposées dans [43] pour une illustration numérique de l'amplitude du bilan d'entropie discret (5.20) dans le contexte Euler 3×3 répondant à cette intuition.

Il ressort de ce test peu sévère que la méthode classique commet de nouveau une erreur inacceptable sur la prédiction du niveau des pressions p et p_τ .

Application à une viscosité laminaire non constante

Les résultats précédents sont étendus à un modèle de fluide à deux pressions en supposant qu'une des deux viscosités est fonction des inconnues. En conséquence, l'écoulement du fluide est supposé être régi par le système d'équations aux dérivées partielles (2.5). Le fluide satisfait les lois d'état (2.7). La viscosité laminaire μ associée à la pression p est supposée constante tandis que la viscosité μ_τ satisfait la loi suivante :

$$\mu_\tau(\rho, p_\tau) = C_\mu L \rho \sqrt{\frac{p_\tau}{\rho}}, \quad (7.1)$$

où C_μ est une constante et L désigne un réel positif fixé et est associé à une longueur caractéristique.

Un tel modèle peut être compris comme un modèle de longueur de mélange imposée. Il constitue en réalité un modèle de turbulence simplifié.

Cette forme particulière de la viscosité introduit une nouvelle nonlinéarité dans l'opérateur du second ordre alors que l'opérateur du premier ordre reste inchangé. Cependant, le théorème 2.8, le lemme 2.10 et le lemme 2.19 demeurent valables. Nous ne donnons pas, ici, la démonstration de ces résultats qui sont une extension immédiate des travaux menés dans [16] et [17].

Le schéma classique, par projection L^2 et par projection nonlinéaire sont utilisés pour approcher les solutions du système (2.5) où nous avons adopté l'expression discrète sui-

vante de μ_τ :

$$\mu_{\tau_i}^n = C_\mu L \rho_i^n \sqrt{\frac{p_{\tau_i}^n}{\rho_i^n}}.$$

Nous renvoyons le lecteur à la remarque 5.2 où des formules aux différences en présence d'une viscosité fonction des inconnues sont détaillées.

Les schémas proposés sont appliqués à l'approximation des solutions de problèmes de Cauchy obtenus pour les données initiales détaillées dans la table 4.2 donnée à la fin de cette section. L'ensemble des calculs a été réalisé avec un nombre CFL de 0.5 sur des grilles uniformes constituées de 100 à 2000 cellules pour les schémas classique et par projection L^2 et de 300 cellules pour le schéma par projection nonlinéaire. La constante $C_\mu L$ est choisie égale à $1.16 \cdot 10^{-4}$ pour les cas F et G, $1.16 \cdot 10^{-5}$ pour le cas H et $1.16 \cdot 10^{-3}$ pour le cas I. Enfin, en adimensionnant les équations, le nombre de Reynolds vaut $1.11 \cdot 10^4$ pour les cas F et H, $1.11 \cdot 10^8$ pour le cas G et $1.11 \cdot 10^3$ pour le cas I.

Les solutions discrètes sont systématiquement comparées à la solution exacte des problèmes Riemann associés. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour les détails relatifs à la construction de la solution du problème de Riemann.

Cas tests F G H :

Répondant aux tests B, C et D dans le cas d'une viscosité variable, notre propos est ici d'étudier l'aptitude des méthodes numériques à restituer une décomposition en ondes simples correcte pour trois régimes types de modélisation relatifs à l'ordre de grandeur du rapport des viscosités μ_τ/μ , respectivement 1, grand devant 1 puis petit devant 1. Dans ces deux derniers cas, le système (2.5) est asymptotiquement équivalent à un système sous forme conservative au sens du théorème 2.19 et ce même si la viscosité μ_τ est fonction des inconnues (cf. [17], voir également la section suivante dédiée au modèles de turbulence à deux équations de transport). Le cas F, relevant du régime où $\frac{\mu_\tau}{\mu}$ est voisin de 1, est particulièrement sévère puisque les pressions p et p_τ et donc le rapport des viscosités $\frac{\mu_\tau}{\mu}$ doivent demeurer constants entre la 1-onde et la 3-onde de choc.

L'examen des résultats obtenus pour ces trois régimes ne fait que confirmer que la méthode classique exhibe des erreurs systématiquement inacceptables. La méthode par projection L^2 ne conduit de nouveau à une approximation numérique acceptable que dans le cas où le rapport des viscosités $\frac{\mu_\tau}{\mu}$ est petit devant 1. Ce résultat est rappelons le attendu puisqu'il est fait choix de la variable d'évolution ρS_τ et qu'asymptotiquement celle-ci doit être conservée.

Dans les trois cas test proposés, la méthode par projection nonlinéaire conduit à des solutions discrètes que nous jugeons acceptables même si dans le cas F (cas le plus défavorable), il est possible de distinguer une faible erreur à la constance des pressions p et p_τ et donc du rapport des viscosités.

Cas test I :

Le choix de la donnée initiale conduit à une solution $\mathcal{C}^0$ du problème de Riemann pour (2.9), constituée d'une 1-onde et d'une 3-onde de détente (de faible amplitude), les pressions p et p_τ restant constantes à la traversée de la discontinuité de contact.

La méthode par projection nonlinéaire ainsi que par projection L^2 conduisent à une solution discrète acceptable en proposant un profil discret du rapport des viscosités μ_τ/μ en accord avec le profil exact. Dans ce test peu sévère, la méthode classique commet de nouveau une erreur inacceptable sur la prédiction du niveau des pressions p et p_τ et en conséquence sur la prédiction du rapport des viscosités.

Notons, pour achever l'examen de ces expériences numériques, que les solutions discrètes obtenues par la méthode classique ne semblent pas vouloir tendre à l'instant considéré vers la solution exacte lorsque le pas d'espace tend vers zéro (cf. par exemple les cas B, C, D, E et leurs homologues en viscosité variable). Cette constatation s'applique de même au schéma par projection L^2 hormis dans le cas d'un rapport μ_τ/μ petit devant 1 et ce, soulignons le, à l'instant considéré.

Test	γ	γ_τ	μ_τ/μ	ρ	u	p	p_τ
A	1.4	1.4	1	1	1	1	0.4
				0.57114	-1.58823	0.40217	0.12826
B	1.4	1.6	1	1	1	1	0.6
				1.92678	-1.25451	2.74247	2.09561
C	1.4	1.6	100	1	1	1	0.6
				1.01595	-0.93415	0.24142	0.15528
D	1.4	1.6	0.01	1	1	1	0.6
				1.05518	-0.88895	0.15031	0.33869
E	1.4	1.6	1	1	-1	1	0.6
				0.76	1.06170	0.68098	0.38677

Table 4.1 - Viscosités μ et μ_τ constantes

Test	γ	γ_τ	ρ	u	p	p_τ	μ_τ/μ
F	1.4	1.6	1	5	1	0.6	1
			1.40647	-2.62456	2.23173	2.6216	2.47898
G	1.4	1.6	1	1	1	0.6	10000
			1.01626	-0.93061	0.24308	0.075179	5058.068
H	1.4	1.6	1	1	1	$6 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}
			1.14893	-0.88573	1.42807	$9.46293 \cdot 10^{-6}$	$4.25681 \cdot 10^{-6}$
I	1.4	1.6	1	-1	1	$6 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
			1.258	1.25676	1.37896	$8.66244 \cdot 10^{-3}$	$1.34767 \cdot 10^{-2}$

Table 4.2 - Viscosité μ_τ fonction des inconnues

Section 8

Applications aux modèles de turbulence compressible homogène isotrope

8 Applications aux modèles de turbulence compressible homogène isotrope

Dans cette section, nous appliquons les développements numériques proposés pour les équations de Navier-Stokes à deux températures à une classe de modèles de turbulence compressible isotrope. La motivation de ces modèles de turbulence qualifiée de moyennée est de s'affranchir de la description de petites échelles, (ici les petits tourbillons porteurs d'énergie cinétique devant être rapidement dissipée par la viscosité), en opérant une moyenne à définir des équations de Navier-Stokes à une température. La classe de modèles ici considérée est génériquement dite "à deux équations de transport". Ces deux équations constituent des lois d'évolution pour deux grandeurs moyennes turbulentes dont la modélisation vise essentiellement à modifier le tenseur des contraintes laminares sous l'hypothèse dite de Boussinesq (cf. Mohammadi-Pironneau [6] par exemple). En conséquence de cette hypothèse, une pression turbulente p_τ puis une viscosité turbulente μ_τ , comprises comme fonctions des deux grandeurs moyennes turbulentes, viennent s'ajouter respectivement à la pression laminaire p et à la viscosité laminaire μ . La viscosité turbulente dépend, ainsi que nous le verrons, fortement nonlinéairement des deux grandeurs modélisées. Leur évolution conduit généralement le rapport des viscosités μ et μ_τ à subir en temps et en espace de très grandes variations : typiquement de très petit devant un à très grand devant un.

Ainsi que nous le soulignerons à l'occasion d'un préambule, la terminologie d'équations de transport n'est en fait pleinement justifiée que dans le cadre incompressible : *i.e.* $\operatorname{div}(u) = 0$. En réalité, ces modèles peuvent être compris comme des équations de Navier-Stokes à deux températures, la température moyenne et la température turbulente, chacune étant associée à son propre exposant adiabatique. Ces équations sont complétées d'une équation d'évolution relative à une deuxième grandeur moyenne turbulente à préciser. Les systèmes d'EDP résultants impliquent des produits non conservatifs du premier ordre (*i.e.* entre les inconnues et leurs dérivées premières) et du second ordre (*i.e.* entre les inconnues et leurs dérivées secondes). Les produits impliqués entretiennent une étroite parenté avec les produits étudiés à l'occasion des équations de Navier-Stokes à deux températures. Il y a toutefois une difficulté supplémentaire, intrinsèque à la modélisation ici retenue, à savoir la coexistence de viscosités fonctions des inconnues et de lois de Fourier proposées au titre de lois de fermeture pour des quantités difficiles à modéliser (cf. la section 2 pour les conséquences).

La distinction de terminologie que nous opérons, entièrement liée au cadre compressible qui nous préoccupe ici, est probablement connue. Mais à deux exceptions près, rapportées à la remarque (4.2) lors de l'exposé de la méthode numérique classique, les conséquences qu'elle implique sur le plan numérique n'ont pas été rapportées dans la littérature portée à notre connaissance. Bien entendu, nous ne prétendons pas connaître toute la littérature afférente au calcul scientifique en turbulence compressible : elle est immense. Il semble être systématiquement fait choix de la méthode classique pour laquelle les termes source

de production de turbulence, *i.e.* les produits non conservatifs du premier et second ordre, sont traités en tant que termes source. Une telle stratégie induit les inconsistances que nous avons illustrées à la section 7 dédiée à l'exposé des résultats numériques dans le contexte de deux viscosités constantes.

Si ces produits trouvent la même parenté que ceux étudiés lors des précédentes sections, le nombre et la nature des produits du second ordre varient d'un modèle turbulent à un autre en ce qui concerne la loi d'évolution de la deuxième grandeur moyenne turbulente. La première est le plus souvent associée à la température turbulente k . Nous distinguerons dans cette section, le modèle le plus célèbre dit (k, ϵ) ainsi que deux variantes, à savoir les modèles (k, l) et (k, ω) . Nous indiquerons succinctement lors du préambule la signification de chacune de ces grandeurs moyennes turbulentes pour ensuite étudier brièvement les relations d'équivalence liant éventuellement ces trois modèles. L'étude de ces propriétés d'équivalence, motivée par l'existence d'une écriture générique pour l'ensemble des trois modèles, ne sera menée par souci de simplicité que dans la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ et ne recevra donc pas d'énoncé formel.

Cette écriture générique motivera ensuite la présentation d'un algorithme de calcul dédié à l'approximation numérique des solutions relevant de chacun des trois modèles. Cet algorithme repose bien entendu fortement sur la méthode par projection nonlinéaire introduite lors de la section 6 et ce grâce à une stratégie de décomposition en opérateurs développée de manière à préserver la positivité requise des grandeurs moyennes turbulentes.

Nous achèverons la présente section applicatrice par l'examen de quelques cas tests numériques.

8.1 Préambule aux modèles de turbulence dits à “deux équations de transport”

Notre propos est ici d'indiquer que les modèles de turbulence compressible homogène isotrope dits à deux équations de transport sont en réalité des modèles à deux entropies spécifiques, complétés d'une équation d'évolution sur une grandeur turbulente moyenne à préciser. À notre connaissance, la distinction que nous nous proposons d'opérer n'a pas été rapportée dans la littérature et c'est la raison de ce préambule.

Nous privilégions ici un modèle de turbulence dit à “deux équations de transport” le plus usité dans les applications : le modèle (k, ϵ) . Il existe de nombreuses variantes de ce modèle, nous préciserons dans la prochaine section les similitudes et les différences qu'entretiennent trois de ces modèles d'utilisation courante. Ce préambule peut d'ailleurs être compris comme un dictionnaire de formules nécessaires aux développements qui y seront menés. Il est donc présenté en l'absence d'énoncé formel. Nous renvoyons toutefois le lecteur aux travaux [16], [17], [41] présentés dans cette thèse où nous analysons le modèle (k, ϵ) en l'absence de conductivité thermique. Le dictionnaire de formules proposé

ci-dessous prend en compte les lois de Fourier.

Remarque 8.1

En aucun cas, ce préambule ne peut constituer une présentation ni même une introduction aux modèles de turbulence compressible isotrope, nous renvoyons pour cela à Mohammadi-Pironneau [6] pour une présentation dans les cas incompressible et compressible. Soulignons enfin que les équations que nous énoncerons ci-dessous sont des équations effectivement satisfaites par les solutions $\mathcal{C}^2$ du modèle (k, ϵ) standard. **Il n'y a pas d'autre hypothèse de modélisation** que celles du modèle standard tel qu'il est proposé pour les grands nombres de Reynolds : *i.e.* loin de tout obstacle.

Présentation des équations

Sous l'hypothèse de grands nombres de Reynolds, le modèle (k, ϵ) est décrit par le système d'EDP nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + (\gamma_\tau - 1) \rho k) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + (\gamma_\tau - 1) \rho k) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T + \kappa_\tau \partial_x k), \\ \partial_t \rho k + \partial_x \rho k u = -(\gamma_\tau - 1) \rho k \partial_x u + \mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon, \\ \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u = -C_{\epsilon 1} (\gamma_\tau - 1) \rho \epsilon \partial_x u + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\tilde{\kappa}_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \end{cases} \quad (8.1)$$

où dans les dernières équations, les produits $\{-(\gamma_\tau - 1) \rho k \partial_x u + \mu_\tau (\partial_x u)^2\}$ et $\{-C_{\epsilon 1} (\gamma_\tau - 1) \rho \epsilon \partial_x u + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2\}$ sont usuellement qualifiés de terme source de production. Les fonctions d'ordre zéro $(-\rho \epsilon)$ et $(-C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k})$, *i.e.* fonctions seulement des inconnues, sont dites termes source de destruction.

Dans ce modèle, les inconnues ρk et $\rho \epsilon$ sont respectivement appelées énergie cinétique turbulente et taux de dissipation turbulente. Une analyse dimensionnelle nous apprend que k est associé à une température, $\sqrt{k}$ étant alors associé à une vitesse; que par ailleurs nécessairement :

$$\frac{k}{\epsilon} \quad \text{est associé à un temps,}$$

et que dès lors

$$\frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad \text{est associé à une longueur.}$$

Il est important de noter que les équations composant le précédent système seront **toujours supposées être sous forme adimensionnée**. Il s'ensuit donc que les notations μ , μ_τ , κ , κ_τ et $\tilde{\kappa}_\epsilon$ désignent respectivement des nombres de Reynolds et des nombres de Prandtl. Par abus de langage, nous continuerons à les appeler viscosités et conductivités thermiques puisque nous continuerons à appeler les inconnues par leur dénomination dimensionnée : *i.e.* densité, pression, etc.

La viscosité turbulente notée μ_τ est habituellement définie par le produit

$$\mu_\tau = C_\mu \rho \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \sqrt{k}, \quad (8.2)$$

où C_μ est une constante positive du modèle. Nous détaillerons ultérieurement l'expression des conductivités thermiques. Par ailleurs, la pression p est donnée par la loi d'énergie totale suivante :

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{p}{\gamma - 1} + \rho k,$$

où γ désigne une constante supérieure à 1.

Nous renvoyons le lecteur à Mohammadi-Pironneau [6] pour l'origine et l'obtention d'un tel modèle à partir des équations de Navier-Stokes instantanées tridimensionnelles. Ici, le système d'équations correspond à la formulation monodimensionnelle du modèle mais obtenu en dimension d d'espace. Cette dépendance par rapport à la dimension figure dans la définition de la constante γ_τ :

$$\gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}, \quad d \geq 1.$$

Il est possible de reconnaître ici l'exposant adiabatique d'un gaz monoatomique en dimension d d'espace et cette similitude est pleinement consistante avec l'obtention du modèle (k, ϵ) où la température turbulente k résulte de l'écart à la moyenne de chacune des d composantes de la vitesse instantanée, sous une hypothèse d'isotropie essentielle à la modélisation des phénomènes turbulents ici considérés.

Il est utile de donner une formulation équivalente non conservative du système (8.1) valable pour les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ dont nous laissons l'obtention aisée au lecteur :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho (\partial_t u + u \partial_x u) + \partial_x p + \partial_x (\gamma_\tau - 1) \rho k = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \\ \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1) p \partial_x u = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2 + (\gamma - 1) (\partial_x \kappa \partial_x T) + (\gamma - 1) \rho \epsilon, \\ \partial_t \rho k + \partial_x \rho k u + (\gamma_\tau - 1) \rho k \partial_x u = \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x \kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon, \\ \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u + C_{\epsilon 1} (\gamma_\tau - 1) \rho \epsilon \partial_x u = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x \tilde{\kappa}_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \end{cases}$$

qui suggère l'introduction des **notations** suivantes :

$$\begin{aligned} p_\tau &= (\gamma_\tau - 1) \rho k, \quad \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}, \\ \gamma_\epsilon - 1 &= C_{\epsilon 1} (\gamma_\tau - 1), \\ \tilde{\kappa}_\epsilon &= (\gamma_\epsilon - 1) \kappa_\epsilon. \end{aligned}$$

Avec ces notations, les précédentes équations trouvent la forme :

$$\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \quad (8.3.i)$$

$$\rho (\partial_t u + u \partial_x u) + \partial_x p + \partial_x p_\tau = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.3.ii)$$

$$\partial_t p + \gamma p \partial_x u + u \partial_x p = (\gamma - 1) \mu (\partial_x u)^2 + (\gamma - 1) (\partial_x \kappa \partial_x T) + (\gamma - 1) \rho \epsilon, \quad (8.3.iii)$$

$$\begin{aligned} \partial_t p_\tau + \gamma_\tau p_\tau \partial_x u + u \partial_x p_\tau = \\ (\gamma_\tau - 1) \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\gamma_\tau - 1) (\partial_x \kappa_\tau \partial_x k) - (\gamma_\tau - 1) \rho \epsilon, \end{aligned} \quad (8.3.iv)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u + (\gamma_\epsilon - 1) \rho \epsilon \partial_x u = \\ (\gamma_\epsilon - 1) \frac{\rho \epsilon}{p_\tau} \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\gamma_\epsilon - 1) (\partial_x \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 2} (\gamma_\tau - 1) \frac{(\rho \epsilon)^2}{p_\tau}. \end{aligned} \quad (8.3.v)$$

Remarque 8.2

La dernière équation pourrait suggérer d'introduire la notation $p_\epsilon = (\gamma_\epsilon - 1) \rho \epsilon$. Volontairement nous n'adopterons pas cette notation puisque $\rho \epsilon$ ne contribue pas à la pression totale; cette variable n'a pas la dimension d'une pression mais d'une pression sur un temps. La forme de cette dernière équation résulte d'une hypothèse de modélisation, à la base du modèle (k, ϵ) , consistant à calquer l'équation gouvernant $\rho \epsilon$ sur l'équation gouvernant ρk . Soulignons que l'équation gouvernant ρk est considérée comme réaliste et ce contrairement à l'EDP gouvernant $\rho \epsilon$ (voir par exemple Mohammadi-Pironneau [6], Gleize [25], Hérard [42] pour les détails).

Loi d'évolution supplémentaire liant p et p_τ

Concernant les deux pressions p et p_τ , associons leurs les entropies spécifiques suivantes :

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad s_\tau = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}. \quad (8.4)$$

Ces notations ont été introduites sous les hypothèses

$$\rho > 0, \quad p > 0, \quad p_\tau > 0, \quad \rho \epsilon > 0, \quad (8.5)$$

que nous commenterons dans la remarque 8.4

Armé des notations (8.4), il est immédiat que les deux équations (8.3.iii) et (8.3.iv) du système (8.3) trouvent la forme suivante :

$$\partial_t s + u \partial_x s = \frac{(\gamma - 1)}{\rho^\gamma} \left\{ \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \kappa \partial_x T) + \rho \epsilon \right\}, \quad (8.6.i)$$

$$\partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau = \frac{(\gamma_\tau - 1)}{\rho^{\gamma_\tau}} \left\{ \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau)) - \rho \epsilon \right\}. \quad (8.6.ii)$$

Remarquons que les équations (8.6) impliquent l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \mu &\times \left(\frac{\rho^{\gamma_\tau}}{(\gamma_\tau - 1)} \{ \partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau \} - \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) + \rho \epsilon \right) - \\ \mu_\tau &\times \left(\frac{\rho^\gamma}{(\gamma - 1)} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} - \partial_x (\kappa \partial_x T) - \rho \epsilon \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Il importe de noter que la viscosité turbulente μ_τ étant une fonction des inconnues, il n'est plus possible contrairement à l'identité (2.4) d'obtenir une relation faisant intervenir de manière conservative les lois de Fourier.

Remarque 8.3

Réécrivons de manière équivalente les équations (8.6.i) et (8.6.ii), satisfaites par les solutions $\mathcal{C}^2$ du modèle (k, ϵ) :

$$\partial_t s + u \partial_x s = \frac{(\gamma - 1)}{\rho^\gamma} \left\{ \mu (\partial_x u)^2 + (\partial_x \kappa \partial_x T) \right\} - (\gamma - 1) \frac{\rho \epsilon}{p} (0 - s), \quad (8.8.i)$$

$$\partial_t s_\tau + u \partial_x s_\tau = \frac{(\gamma_\tau - 1)}{\rho^{\gamma_\tau}} \left\{ \mu_\tau (\partial_x u)^2 + (\partial_x (\kappa_\tau \partial_x T_\tau)) \right\} + \frac{\epsilon}{k} (0 - s_\tau). \quad (8.8.ii)$$

En rappelant que k/ϵ trouve la dimension d'un temps, le terme source présent dans l'équation gouvernant s_τ s'apparente à un terme de relaxation relaxant s_τ et donc k vers zéro. Cette destruction de k alimente en retour l'entropie spécifique s de la quantité $(\gamma - 1)\rho^{1-\gamma}\epsilon > 0$ ou encore comme l'indique (8.8.i) fait croître s avec le temps caractéristique $\frac{p}{(\gamma-1)\rho\epsilon}$. Ainsi et contrairement à la précédente section où les entropies spécifiques s et s_τ avaient un rôle symétrique, seule ici la masse totale de l'entropie $\rho \log(s)$ est toujours une fonction croissante du temps puisque :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \log(s) + \partial_x \rho \log(s) u = \\ \frac{(\gamma - 1)}{T} \left\{ \mu (\partial_x u)^2 + \rho \epsilon \right\} + (\gamma - 1) \left\{ \kappa (\partial_x \log(T))^2 + \partial_x (\kappa \partial_x \log(T)) \right\}. \end{aligned}$$

La dissymétrie observée entre s et s_τ est naturelle dans le présent contexte mais il est important de souligner que cette dissymétrie n'intervient que par un terme de relaxation, *i.e.* une fonction seulement des inconnues.

Remarque 8.4

Les deux premières hypothèses énoncées dans (8.5) signifient bien entendu que nous nous plaçons loin du vide. Les deux dernières interdisent aux phénomènes de turbulence de disparaître, ce qui pourrait paraître surprenant. Toutefois, deux faits doivent être rappelés. Premièrement, le modèle (k, ϵ) n'est pas un modèle de turbulence prédictif au sens où il faut "ensemencer" la donnée initiale en faisant choix de valeurs à définir mais strictement non nulles de ρk et $\rho \epsilon$ (cf. Gleize [25]). Deuxièmement, nous avons établi dans [41] qu'il n'y avait pas unicité de solutions régulières du système (8.1) pour k et ϵ au voisinage de zéro avec $k^{3/2}/\epsilon = L$, L constant, pour le choix de la fonction viscosité turbulente donnée par (8.2).

Lois d'évolution supplémentaires liant k et ϵ

Considérons les équations (8.3.iv) et (8.3.v) pour écrire sous les hypothèses (8.5) :

$$\begin{aligned}\partial_t \log(k) + u \partial_x \log(k) + (\gamma_\tau - 1) \partial_x u &= \frac{\mu_\tau}{\rho k} \{(\partial_x u)\}^2 + \frac{1}{\rho k} \{(\partial_x \kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon\}, \\ \partial_t \log(\epsilon) + u \partial_x \log(\epsilon) + (\gamma_\epsilon - 1) \partial_x u &= \frac{C_{\epsilon 1} \mu_\tau}{\rho k} \{(\partial_x u)\}^2 + \frac{1}{\rho \epsilon} \{(\partial_x \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}\}.\end{aligned}$$

Multiplions la première relation par la constante positive $C_{\epsilon 1}$ pour la soustraire de la seconde et ainsi obtenir :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\rho \epsilon} \left\{ \rho \epsilon (\partial_t \log(\epsilon) + u \partial_x \log(\epsilon)) - (\partial_x \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) + C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \right\} - \\ & \frac{1}{\rho k} \left\{ \rho k (\partial_t \log(k^{C_{\epsilon 1}}) + u \partial_x \log(k^{C_{\epsilon 1}})) - (\partial_x C_{\epsilon 1} \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 1} \rho \epsilon \right\} = 0, \quad (8.10)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation définition $(\gamma_\epsilon - 1) = C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau - 1)$. Réexprimons enfin cette dernière identité sous la forme :

$$\partial_t \log\left(\frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}\right) + u \partial_x \log\left(\frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}\right) = \frac{1}{\rho \epsilon} (\partial_x \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - \frac{C_{\epsilon 1}}{\rho k} (\partial_x \kappa_\tau \partial_x k) - (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \frac{\epsilon}{k}. \quad (8.11)$$

Notons que lorsque les conductivités thermiques κ_τ et κ_ϵ sont identiquement nulles, l'équation précédente implique la relation de saut de type Rankine-Hugoniot suivante :

$$-\sigma\left[\rho \frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}\right] + \left[\rho \frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}} u\right] = 0,$$

en vertu de la loi d'évolution :

$$\partial_t \rho \log\left(\frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}\right) + \partial_x \rho \log\left(\frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}\right) u = -(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \rho \frac{\epsilon}{k}.$$

Ceci achève la description du dictionnaire de formules.

Remarque 8.5

Les équations du système (8.1) étant adimensionnées, il aurait été possible de définir la quantité $s_{\rho \epsilon} = \rho \epsilon / \rho^{\gamma_\epsilon}$ de sorte à obtenir grâce à la relation (8.3.v) une identité “analogue” à (8.7) :

$$\begin{aligned}\mu & \times \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\rho^{\gamma_\epsilon}}{(\gamma_\epsilon - 1)} \{ \partial_t s_{\rho \epsilon} + u \partial_x s_{\rho \epsilon} \} - \partial_x (\kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) + \frac{C_{\epsilon 2}}{C_{\epsilon 1}} \frac{(\rho \epsilon)^2}{p_\tau} \right) - \\ C_{\epsilon 1} \mu_\tau & \times \left(\frac{\rho^\gamma}{(\gamma - 1)} \{ \partial_t s + u \partial_x s \} - \partial_x (\kappa \partial_x T) - \rho \epsilon \right) = 0. \quad (8.12)\end{aligned}$$

Toutefois cette dernière identité coïncide clairement avec (8.7) lorsque $\mu = 0$ et s'avère dès lors dans ce cas redondante. Il s'agissait donc de proposer une identité satisfaite par les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de (8.1) indépendante de ce cas limite (*i.e.* $\mu/\mu_\tau \rightarrow 0$ à ϵ/k fixé).

Remarque 8.6

En anticipant les développements numériques à venir, il convient de discuter quelle relation doit être privilégiée de (8.11) et (8.10).

Dans un premier temps, nous soulignons que dans la stratégie de décomposition en opérateurs développée lors des précédentes sections, nous avons proposé des formules aux différences n'introduisant aucune erreur L^2 de représentation des dérivées discrètes. Nous préservons ainsi l'équivalence au niveau discret au sens du Lemme 5.3 (cf. section 5 et section 6.4) qu'ils s'agissent des phénomènes visqueux ou de conduction thermique. Ces formules s'appliquent ici de la même manière. La seule erreur L^2 qu'il faudra corriger en invoquant l'opérateur de projection nonlinéaire sera uniquement induite par la projection L^2 de l'opérateur du premier ordre extrait.

Il suffit de remarquer dans un second temps que la projection L^2 du logarithme d'un quotient coïncide avec la différence de la projection L^2 des logarithmes du numérateur et du dénominateur. Cette observation suffit à assurer l'équivalence discrète des relations (8.11) et (8.10). Puisqu'il y a équivalence discrète, nous privilégierons bien entendu la forme la plus simple : (8.11).

Conclusion au préambule

Nous présentons le système d'équations satisfait par les solutions de (8.1) que nous invoquerons lors de leur approximation numérique :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (8.13.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.13.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T + \kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.13.iii)$$

$$\begin{aligned} \mu \times \left(\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{(\gamma_\tau-1)} \{ \partial_t \rho s_\tau + \partial_x \rho s_\tau u \} - \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) + \rho \epsilon \right) - \\ \mu_\tau \times \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} \{ \partial_t \rho s + \partial_x \rho s u \} - \partial_x (\kappa \partial_x T) - \rho \epsilon \right) = 0, \end{aligned} \quad (8.13.iv)$$

$$\partial_t \log(s_\epsilon) + u \partial_x \log(s_\epsilon) = \frac{1}{\rho \epsilon} (\partial_x \kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - \frac{C_{\epsilon 1}}{\rho k} (\partial_x \kappa_\tau \partial_x k) - (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \frac{\epsilon}{k}. \quad (8.13.v)$$

Nous avons posé ici

$$s_\epsilon = \frac{\epsilon}{k^{C_{\epsilon 1}}}.$$

Rappelons que si $C_{\epsilon 1} = 3/2$, s_ϵ est associée à la dimension de l'inverse d'une longueur. Dans (8.13), il faut comprendre soit ρs , soit ρs_τ soit ρE comme une fonction des autres inconnues. A ce propos, il importe de noter que la variable s_ϵ n'est couplée aux autres équations que par l'intermédiaire du terme de relaxation $\rho \epsilon$ et de la viscosité μ_τ , devant être compris comme fonctions des inconnues. En d'autres termes et dans une stratégie de

décomposition en opérateurs, la dernière équation du système (8.13) pourra dans les faits apparaître totalement **découplée** des quatre premières équations. Ces quatre premières équations constituent dès lors un système en tout point analogue à celui étudié dans les précédentes sections. Une telle stratégie de décomposition en opérateurs sera bien entendu mise en oeuvre.

8.2 Trois modèles de turbulence compressible homogène isotrope

Nous considérons dans cette section trois modèles de turbulence compressible homogène isotrope dits à deux équations de transport, fréquemment utilisés dans les applications. Les équations associées à chacun de ces modèles peuvent être formellement classées de la façon suivante : d'une part les équations, communes aux modèles, régissant les grandeurs conservées ρ , ρu et ρE et d'autre part les équations gouvernant les quantités turbulentes modélisées, impliquant des produits non conservatifs du premier ordre (*i.e.* entre les inconnues et leurs dérivées premières) et du second ordre (*i.e.* entre les inconnues et des produits de dérivées premières), dont le nombre et la nature diffèrent d'un modèle à l'autre.

Nous indiquons ici que les modèles de turbulence considérés conduisent à des systèmes équivalents dans la classe des solutions $\mathcal{C}^2$ dont les quatre premières équations d'évolution coïncident systématiquement avec les équations (8.13.i), (8.13.ii), (8.13.iii) et (8.13.iv) mises en avant lors du précédent préambule. La dernière équation d'évolution (8.13.v) trouve une forme analogue mais pour des choix de constantes éventuellement différents (typiquement l'exposant $C_{\epsilon 1}$) ainsi que des modèles de conduction thermique différents. Ces derniers peuvent en particulier ne pas impliquer de produits non conservatifs.

Nous présentons succinctement les trois modèles retenus pour ensuite préciser pour quel choix de constantes de modélisation, des relations d'équivalence ou de non équivalence ont lieu dans le cadre des solutions de classe $\mathcal{C}^2$. Nous ne mènerons pas ici l'extension d'une telle étude au cas des solutions $\mathcal{C}^2$ par morceaux puisque nous n'avons établi l'existence des solutions onde progressive pour les modèles de turbulence discutés qu'en l'absence de phénomène de conduction thermique. Ici, les lois de Fourier, résultant d'hypothèses de modélisation, seront toujours considérées.

Equations relatives aux grandeurs conservées ρ , ρu et ρE

Les équations communes aux différents modèles de turbulence considérés sont données par

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (8.14.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.14.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T) + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k). \quad (8.14.iii)$$

La pression turbulente p_τ est liée à l'énergie cinétique k par la relation

$$p_\tau = (\gamma_\tau - 1)\rho k, \quad \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}, \quad d \geq 1. \quad (8.15)$$

La pression thermodynamique p est supposée satisfaire une loi de gaz parfait :

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} \right), \quad \gamma > 1.$$

Les conductivités thermiques sont définies par

$$\kappa = \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_\tau}{P_{r_t}} \quad \text{et} \quad \kappa_\tau = \mu + \frac{\mu_\tau}{\alpha_k},$$

où P_r , P_{r_t} et α_k désignent des constantes positives. L'expression de la viscosité turbulente μ_τ répond à la formule (8.2) et nous supposons ici et dans toute la suite que la viscosité laminaire μ est une constante positive de manière à simplifier l'exposé.

Nous décrivons ci-dessous les équations d'évolution gouvernant les grandeurs turbulentes associées à chacun des trois modèles retenus.

Modèle (k, ϵ) [6]

Nous rappelons ici succinctement le modèle le plus classique en précisant les constantes qu'il met en oeuvre. Le système (8.14) est complété par les équations régissant l'énergie cinétique turbulente ρk , ici associée à p_τ au travers de la définition (8.15), et le taux de dissipation turbulente $\rho \epsilon$:

$$\partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - (\gamma_\tau - 1)\rho \epsilon, \quad (8.16.i)$$

$$\partial_t \rho \epsilon + \partial_x \rho \epsilon u + C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau - 1)\rho \epsilon \partial_x u = C_{\epsilon 1}\mu_\tau \frac{\epsilon}{k} (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\epsilon \partial_x \epsilon) - C_{\epsilon 2}\rho \frac{\epsilon^2}{k}. \quad (8.16.ii)$$

La viscosité turbulente μ_τ (8.2) s'écrit de manière équivalente :

$$\mu_\tau = \frac{C_\mu}{(\gamma_\tau - 1)^2} \frac{p_\tau^2}{\rho \epsilon}. \quad (8.16.iii)$$

où C_μ est une constante positive classiquement prise égale à 0.09.

Dans (8.16.ii), $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ désignent deux constantes positives du modèle qui usuellement vérifient $C_{\epsilon 1} < C_{\epsilon 2}$ avec $C_{\epsilon 1} \in]1, 2[$ (cf. [6] pour différents choix de valeurs numériques). L'expression de κ_ϵ est donnée par

$$\kappa_\epsilon = \mu + \frac{\mu_\tau}{\alpha_\epsilon},$$

où α_ϵ désigne une constante positive.

Modèle (k, l) [21]

Dans le modèle (k, l) , le système (8.14) est complété par les équations régissant l'énergie cinétique turbulente ρk et une échelle de longueur caractéristique l de la turbulence :

$$\partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon, \quad (8.17.i)$$

$$\partial_t \rho l + \partial_x \rho l u = \partial_x (\kappa_{l1} \partial_x l) + \kappa_{l2} (\partial_x l) \times (\partial_x k) + C_l \rho \sqrt{k}, \quad (8.17.ii)$$

où par abus de langage, nous comprenons k et ϵ comme fonctions des inconnues au travers de la relation (8.15) et de la définition :

$$l = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}.$$

En conséquence, le terme source présent dans l'équation (8.17.i) s'écrit par exemple comme dans [21] :

$$\rho \epsilon = \rho \frac{k}{l} \sqrt{\frac{p_\tau}{(\gamma_\tau - 1)\rho}}.$$

La viscosité turbulente μ_τ définie par (8.2) devient, ici, en variables (k, l) :

$$\mu_\tau = C_\mu \rho l \sqrt{k}, \quad (8.17.iii)$$

où C_μ désigne la même constante positive que précédemment.

Dans (8.17.ii), C_l désigne une constante positive du modèle qui n'a pas nécessairement à trouver de lien entre les constantes $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ du modèle (k, ϵ) . Enfin, les expressions de κ_{l1} et κ_{l2} sont données par

$$\kappa_{l1} = \mu + \frac{\mu_\tau}{\alpha_{l1}} \quad \text{et} \quad \kappa_{l2} = \frac{2}{\alpha_{l2}} \frac{(\gamma_\tau - 1)\rho}{p_\tau} \mu_\tau,$$

où α_{l1} et α_{l2} sont des constantes positives. Nous renvoyons le lecteur à [21] pour le choix des différentes constantes.

Modèle (k, ω) [22]

Dans le modèle (k, ω) , le système (8.14) est complété par les équations régissant l'énergie cinétique turbulente ρk et une échelle de temps caractéristique ω de la turbulence :

$$\partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon, \quad (8.18.i)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \omega + \partial_x \rho \omega u + C_{\omega 1} (\gamma_\tau - 1) \rho \omega \partial_x u &= C_{\omega 1} \mu_\tau \frac{\omega}{k} (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_{\omega 1} \partial_x \omega) + \\ &\quad \kappa_{\omega 2} (\partial_x \omega) \times (\partial_x k) - C_{\omega 2} \rho \omega^2. \end{aligned} \quad (8.18.ii)$$

où l'abus de langage est levé en précisant que l'échelle de temps caractéristique ω est liée aux grandeurs turbulentes k et ϵ par la relation :

$$\omega = \frac{\epsilon}{k}.$$

En conséquence, le terme de relaxation présent dans l'équation (8.18.i) s'écrit dans le système de variables (k, ω) :

$$\rho\epsilon = \frac{1}{(\gamma_\tau - 1)} \rho \omega \frac{p_\tau}{\rho}.$$

La viscosité turbulente μ_τ (8.2) s'exprime, ici, en variables (k, ω) :

$$\mu_\tau = C_\mu \rho \frac{k}{\omega}, \quad (8.18.iii)$$

où C_μ désigne la même constante positive.

Dans (8.18), $C_{\omega 1}$ et $C_{\omega 2}$ sont des constantes positives du modèle. Les expressions de $\kappa_{\omega 1}$ et $\kappa_{\omega 2}$ sont données par

$$\kappa_{\omega 1} = \mu + \frac{\mu_\tau}{\alpha_{\omega 1}} \quad \text{et} \quad \kappa_{\omega 2} = \frac{2}{\alpha_{\omega 2}} \frac{(\gamma_\tau - 1)\rho}{p_\tau} \mu_\tau,$$

où $\alpha_{\omega 1}$ et $\alpha_{\omega 2}$ désignent encore des constantes réelles positives. Nous renvoyons le lecteur à [22] pour le choix des différentes constantes.

Remarquons que dans le cas particulier où $\kappa_{\omega 2}$ est supposé identiquement nul, nous obtenons le modèle (k, ω) original de D.C. Wilcox [24].

8.3 Propriétés d'équivalence des modèles

En notant

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, p_\tau, \rho X),$$

où X désigne respectivement ϵ , l ou ω pour les modèles (k, ϵ) , (k, l) ou (k, ω) , l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega_X = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \frac{p_\tau}{\gamma_\tau - 1} > 0, p_\tau > 0, X > 0 \right\}.$$

Avec ces notations, il est possible d'établir en calquant les calculs indiqués à l'occasion du dictionnaire de formules que les systèmes régissant ces différents modèles peuvent trouver l'écriture générique suivante :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (8.19.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + (\gamma_\tau - 1)\rho k) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.19.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + (\gamma_\tau - 1)\rho k) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T + \kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.19.iii)$$

$$\partial_t p_\tau + \partial_x p_\tau u + (\gamma_\tau - 1) p_\tau \partial_x u = (\gamma_\tau - 1) \left\{ \mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - \rho \epsilon \right\}, \quad (8.19.iv)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho X + \partial_x \rho X u + C_{X1} (\gamma_\tau - 1) X \partial_x u = \\ C_{X1} \frac{\epsilon}{k} \mu_\tau (\partial_x u)^2 + \partial_x (\kappa_{X1} \partial_x X) + \kappa_{X2} (\partial_x X) (\partial_x k) - C_{X2} \rho \frac{\epsilon}{k} X, \end{aligned} \quad (8.19.v)$$

où il faut comprendre ϵ et μ_τ comme fonctions des inconnues telles que définies lors de l'exposé des trois modèles.

Ici C_{X_1} et C_{X_2} désignent deux constantes réelles où

$$(C_{X_1}, C_{X_2}) = \begin{cases} (C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}) & \text{pour le modèle } (k, \epsilon), \\ (0, -C_l) & \text{pour le modèle } (k, l), \\ (C_{\omega 1}, C_{\omega 2}) & \text{pour le modèle } (k, \omega). \end{cases}$$

Soulignons que C_{X_1} est bien identiquement nulle dans le cas du modèle (k, l) et que le coefficient C_{X_2} associé coïncide bien avec $-C_l$.

Remarquons de nouveau que la dernière équation d'évolution n'est couplée au précédentes que par l'intermédiaire des applications μ_τ et ϵ . Ce type de couplage suggère l'étude des propriétés d'équivalence qu'entretiennent chacun des trois modèles.

Propriétés d'équivalence des systèmes du premier ordre extrait

Il est immédiat que les solutions régulières de chacun des systèmes du premier ordre extrait ne sont gouvernées que par les quatre mêmes équations : les quatre premières équations extraites de (8.19). En effet la dernière équation se trouve dans chaque cas être complètement découplée pour être équivalente à une équation de transport sur le traceur (voir le dictionnaire de formules pour une preuve) :

$$s_X = \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right). \quad (8.20_X)$$

En conséquence, le Lemme 2.2 énoncé dans le contexte du système Navier-Stokes à deux températures reste inchangé : la multiplicité de la valeur propre u devient triple. Les lois de conservation supplémentaires peuvent bien entendu dépendre également de la quantité (8.20_X) mais une telle dépendance apparaît être ici totalement artificielle : le lemme de convexité 2.4 suffira à notre propos.

Notons enfin, que pour les trois modèles proposés, les lois de conservation supplémentaires satisfaites par les solutions régulières coïncident toutes à la condition nécessaire et suffisante

$$C_{\epsilon 1} = C_{\omega 1} + 1 = \frac{3}{2} \quad (8.21)$$

assurant la **coïncidence** des grandeurs transportées (8.20_X) lorsque réexprimées dans les variables k et ϵ .

Remarque 8.7

Notons que dans le cadre du modèle (k, l) , la constante C_{X_1} est nulle, la quantité transportée coïncide avec $X = l$ ce qui est le résultat attendu et fixe la valeur de $C_{\epsilon 1}$ à $3/2$.

Résultats d'équivalence pour les systèmes complets

Les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ de chacun des systèmes (8.19) satisfont toutes les quatre mêmes équations suivantes :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (8.22.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.22.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T + \kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.22.iii)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(\frac{\rho S_\tau}{\rho}))} (\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u) - \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) + \rho \epsilon \right) - \\ & \mu_\tau \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(\frac{\rho S}{\rho}))} (\partial_t \rho S + \partial_x \rho S u) - \partial_x (\kappa \partial_x T) - \rho \epsilon \right) = 0, \end{aligned} \quad (8.22.iv)$$

où nous avons défini, à l'instar de la section 2 :

$$S = g \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad \text{et} \quad S_\tau = h \left(\frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}} \right),$$

les fonctions g et h vérifiant les hypothèses (H₁) ou (H₂). Nous renvoyons à la section 2 pour les commentaires liés à ces écritures et au dictionnaire de formules pour leur établissement.

Concernant la dernière équation d'évolution, nous supposons dans un premier temps que les conductivités thermiques κ_{X_1} et κ_{X_2} sont nulles pour revenir ultérieurement au cas général. Cette hypothèse nous permet d'assurer que les solutions $\mathcal{C}^2$ du modèle (k, X) , X fixé, vérifient la loi d'évolution suivante, déduite du dictionnaire de formules (cf. (8.11)) :

$$\partial_t \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right) + u \partial_x \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right) = -(C_{X_2} - C_{X_1}) \frac{\epsilon}{k}.$$

Cette écriture est générique mais ces équations ne coïncident bien entendu que sous l'hypothèse (8.21) et sous la contrainte :

$$C_{l2} = -(C_{e2} - C_{e1}), \quad C_{\omega 2} = C_{e2} + 1 \quad (8.23)$$

où C_{e2} sert de paramètre, C_{e1} étant imposé par la condition (8.21).

En conséquence, les trois modèles ne sont équivalents que sous la condition nécessaire et suffisante (8.21) dans le cas $\kappa_{X_1} = \kappa_{X_2} = 0$. Il est immédiat qu'une telle propriété d'équivalence est perdue lorsque les conductivités thermiques sont choisies non nulles. En effet, la précédente équation fermant dans ce cas général les équations d'évolutions (8.22) pour définir le système que nous considérerons dans la suite, devient :

$$\begin{aligned} & \partial_t \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right) + u \partial_x \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right) = \\ & \frac{1}{\rho X} [\partial_x (\kappa_{X_1} \partial_x X) + \kappa_{X_2} \partial_x (X) \partial_x (k)] - \frac{C_{X_1}}{\rho k} \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k) - (C_{X_2} - C_{X_1}) \frac{\epsilon}{k}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Notre propos résidant dans l'approximation numérique des solutions onde progressive de ces modèles, le Théorème 3.2 énoncé dans [16] assure leur existence dans le cadre du modèle (k, ϵ) avec $\kappa = \kappa_\tau = \kappa_{X_1} = \kappa_{X_2} = 0$, les termes de relaxation étant négligés. Toutefois ce résultat d'existence et d'unicité des solutions onde progressive n'a été établi que sous la condition $C_{\epsilon 1} \in]1, 2[$, hypothèse proposée par les mécaniciens. De telles solutions étant au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ nous assurons par équivalence avec le modèle (k, ϵ) sans conductivité thermique, l'existence de solutions onde progressive pour le système générique (8.19) dès que l'exposant $C_{\epsilon 1}$ compris comme une fonction (affine) de l'exposant C_{X_1} du modèle considéré appartient à l'intervalle $]1, 2[$.

Nous concluons alors la présente section en rappelant que l'extension aux modèles de turbulence à deux équations du Théorème 2.19 est donnée dans [17]. En conséquence, le fluide modélisé admet deux régimes limites distincts tous deux régis par des systèmes complètement conservatifs pour lesquels les solutions onde progressive existent.

8.4 Schéma par projection nonlinéaire

Nous ne décrivons pas ici le détail de l'extension du schéma classique et du schéma par projection L^2 que nous mettrons en oeuvre dans la prochaine section. Ces extensions peuvent être aisément déduites de la lecture de la stratégie de décomposition en opérateurs que nous décrivons succinctement dans le contexte du schéma par projection nonlinéaire. Ainsi, dans ces deux schémas, l'opérateur de projection nonlinéaire n'est bien entendu pas invoqué au titre de dernier pas et concernant le schéma dit classique nous substituons à la projection L^2 du véritable opérateur du premier ordre extrait celle de l'opérateur pseudo-conservatif décrit section 4.

La stratégie de décomposition en opérateurs que nous décrivons ci-dessous tend à découpler le plus possible la variable d'évolution turbulente $X/k^{C_{X_1}}$ des autres variables et elle apparaîtra dans les faits naturelle. Il résulte que cette stratégie coïncide, à des modifications mineures près, à celle exposée dans la section dédiée à l'introduction de la méthode de projection nonlinéaire.

Notre objectif ici est de décrire de telles modifications liées à l'intégration en temps des termes source de relaxation ainsi que de l'équation de transport gouvernant la quantité

$$s_X := \log \left(X/k^{C_{X_1}} \right).$$

Il résulte du découplage obtenu que nous ne réécrivons pas ici d'énoncé formel relatif à la validité de principes du minimum sur les entropies spécifiques S et S_τ ni d'inégalités d'entropie précisées. Nous préciserons toutefois, au titre de remarques à l'issue de l'exposé de chacun des pas fractionnaires, en quoi les principes précédents sont préservés et indiquerons un principe de positivité sur la variable discrète s_X . La méthode d'approximation numérique que nous détaillons dès à présent a en effet été développée de manière à forcer la positivité de cette grandeur turbulente ainsi qu'à préserver toutes les propriétés de stabilité établies en son absence et ce afin d'assurer l'existence du résultat de la projection

nonlinéaire.

Dans la suite nous désignerons par $\mathbf{v}$ le vecteur des inconnues $(\rho, \rho u, \rho E, \rho S_\tau, s_X)$.

Premier pas : Opérateur du premier ordre extrait ($t^n \rightarrow t^{n+1, (4)}$)

Supposons connue à l'instant t^n , une solution discrète $\mathbf{v}_h(x, t^n)$ choisie constante par morceaux. De manière à la faire évoluer en temps, définissons avec des notations claires

$$\mathbf{w}_h(x, t^n) = {}^T (\rho_h(x, t^n), (\rho u)_h(x, t^n), (\rho E)_h(x, t^n), (\rho S_\tau)_h(x, t^n))$$

et résolvons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad (8.25.i)$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + p_\tau) = 0, \quad (8.25.ii)$$

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + p_\tau) u = 0, \quad (8.25.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau + \partial_x \rho S_\tau u = 0, \quad (8.25.iv)$$

pour le choix de la donnée initiale $\mathbf{w}_h(x, t^n)$. Les solutions discontinues du précédent système sont, ici, sélectionnées par les conditions d'entropie décrites section 5. Désignons par $\mathbf{w}(x, t)$ la solution de ce problème, constituée de la juxtaposition de solutions de problèmes de Riemann sans interaction pour des temps suffisamment petits.

Introduisons alors la fonction $s_X(x, t)$ définie pour de tels temps et pour $|x - x_{i+1/2}| < \frac{\Delta x}{2}$ avec $i \in Z$ par :

$$s_X(x, t) = \begin{cases} (s_X)_i^n, & \text{si } (u_{i+1/2}^{*n}) \leq \frac{x - x_{i+1/2}}{t}, \\ (s_X)_{i+1}^n, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (8.26)$$

où $u_{i+1/2}^{*n}$ désigne la vitesse de la discontinuité de contact associée au problème de Riemann posé à l'interface $x_{i+1/2}$. Cette fonction est par construction solution de l'équation de transport suivante (cf. section 5) :

$$\partial_t s_X + u \partial_x s_X = 0, \quad (8.27)$$

où nous rappelons que nous avons adopté les hypothèses de positivité (8.5) discutées lors de l'introduction du dictionnaire de formules.

Considérons alors la fonction $\mathbf{v}(x, t) = (\mathbf{w}(x, t), s_X(x, t))$: cette fonction n'est autre que la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur du premier ordre extrait associé au modèle de turbulence considéré avec le choix de la donnée initiale $\mathbf{v}_h(x, t^n)$. Ce résultat est bien sur attendu puisque l'équation (8.27) est complètement découplée des autres.

Fort de ce résultat, nous concluons ce premier pas en adoptant sous la condition CFL (5.15), la formule de projection L^2 habituelle. Notons que nous effectuons bien la projection L^2 de la variable d'évolution (cf. remarque 8.6)

$$s_X = \log \left(\frac{X}{k^{C_{X1}}} \right)$$

pour obtenir grâce à la définition (8.26) :

$$s_{X_i}^{n+1,(4)} = s_{X_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i-1/2}^n \right)_+ \times \left(s_{X_i}^n - s_{X_{i-1}}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1/2}^n \right)_- \times \left(s_{X_{i+1}}^n - s_{X_i}^n \right),$$

où $(y)_+ := \max(0, y)$ et $(y)_- := \min(0, y)$.

Remarque 8.8

Le découplage de l'équation (8.27) des autres équations permet d'affirmer après l'étape de projection L^2 que toutes les propriétés établies section 5 sont exactement préservées. Notons que la grandeur turbulente s_X vérifie à l'issue de ce premier pas un principe du maximum puisque sous la condition CFL (5.15), la valeur réactualisée $s_{X_i}^{n+1,(4)}$ coïncide en réalité avec une décomposition convexe de $(s_{X_{i-1}}^n, s_{X_i}^n, s_{X_{i+1}}^n)$.

Second pas : Prise en compte des termes de relaxation ($t^{n+1,(4)} \rightarrow t^{n+1,(3)}$)

De manière à poursuivre l'évolution en temps de la solution discrète, nous résolvons le problème d'EDO suivant à l'issue du pas précédent :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (8.28.i)$$

$$\partial_t \rho u = 0, \quad (8.28.ii)$$

$$\partial_t \rho E = 0, \quad (8.28.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = -(\gamma_\tau - 1) \frac{h'(h^{-1}(S_\tau))}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \rho \epsilon, \quad (8.28.iv)$$

$$\partial_t s_X = -(C_{X_2} - C_{X_1}) \frac{\epsilon}{k}, \quad (8.28.v)$$

où ϵ et k doivent être compris comme des fonctions de ρS_τ et s_X . Tirant avantage de l'invariance en temps de la densité au cours de ce pas (cf. remarque 5.5), nous substituons aux deux équations non triviales de (8.28) les EDO :

$$d_t \log k = -\lambda_k, \quad (8.29.i)$$

$$d_t \log X = -\lambda_X, \quad (8.29.ii)$$

où les paramètres de relaxation impliqués trouvent les définitions suivantes :

$$\lambda_k = \frac{\epsilon}{k}, \quad \lambda_X = C_{X_2} \frac{\epsilon}{k}.$$

Soulignons qu'à l'issue du premier pas, les grandeurs réactualisées k et X sont positives. Il est dès lors licite de les associer en tant que données initiales au précédent système d'EDO.

Nous proposons ci-dessous une intégration brutale car explicite mais préservant la positivité des grandeurs k et X impliquées en adoptant les formules suivantes :

$$\log \left(k_i^{n+1,(3)} \right) = \log \left(k_i^{n+1,(4)} \right) - \Delta t \lambda_{k_i}^{n+1,(4)}, \quad (8.30.i)$$

$$\log \left(X_i^{n+1,(3)} \right) = \log \left(X_i^{n+1,(4)} \right) - \Delta t \lambda_{X_i}^{n+1,(4)}. \quad (8.30.ii)$$

Un simple jeu d'écriture motive l'introduction de moyennes du type (5.4) permettant d'assurer que la solution discrète ainsi construite est encore solution discrète d'un schéma consistant avec les équations (8.28). Ainsi et par exemple concernant l'identité (8.28.iv), définissons :

$$h'(h^{-1}(S_\tau))_i^{n+1,(3)} := \frac{S_{\tau_i}^{n+1,(3)} - S_{\tau_i}^{n+1,(4)}}{h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,(3)}) - h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,(4)})} \times \frac{1}{k_i^{n+1,(4)}} \frac{k_i^{n+1,(3)} - k_i^{n+1,(4)}}{\log(k_i^{n+1,(3)}) - \log(k_i^{n+1,(4)})},$$

où il faut comprendre

$$\frac{1}{k_i^{n+1,(4)}} \frac{k_i^{n+1,(3)} - k_i^{n+1,(4)}}{\log(k_i^{n+1,(3)}) - \log(k_i^{n+1,(4)})}$$

comme une approximation de l'unité, de sorte que (8.28.iv) coïncide avec la relation attendue. En effet, rappelons que par l'invariance en temps de la densité, nous avons :

$$h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,(3)}) - h^{-1}(S_{\tau_i}^{n+1,(4)}) = \frac{(\gamma_\tau - 1)}{(\rho_i^{n+1,(4)})^{\gamma_\tau}} \times (k_i^{n+1,(3)} - k_i^{n+1,(4)}).$$

Remarque 8.9

Toujours en vertu du principe d'équivalence discret que nous venons de souligner, l'équation (8.28.iii) peut être remplacée par l'EDO

$$d_t p = +(\gamma - 1)\rho\epsilon,$$

elle-même équivalente à

$$\partial_t \rho S = +(\gamma - 1) \frac{g'(g^{-1}(S))}{\rho^{\gamma-1}} \rho \epsilon.$$

Il résulte que la solution discrète construite lors de ce second pas obéit à une discrétisation consistante de cette dernière équation obtenue en faisant choix de moyenne du type (5.4). Cette remarque permet de rétablir l'expression des inégalités d'entropie précisées telles qu'énoncées dans la section 5.

Les principes du minimum relatifs à S_τ (respectivement à s_X) doivent bien entendu être corrigés par le facteur multiplicatif $\exp(-\Delta t \lambda_{k_i}^{n+1,(4)})$ (respectivement $\exp(-\Delta t \lambda_{X_i}^{n+1,(4)})$) et assure toujours la positivité des grandeurs k et X concernées.

Troisième pas : Prise en compte des conductivités thermiques ($t^{n+1,(3)} \rightarrow t^{n+1,(2)}$)

Nous décrivons ici l'algorithme numérique que nous associons à la résolution du problème de Cauchy attendu :

$$\partial_t \rho = 0, \tag{8.31.i}$$

$$\partial_t \rho u = 0, \tag{8.31.ii}$$

$$\partial_t \rho E = \partial_x(\kappa \partial_x T) + \partial_x(\kappa_\tau \partial_x k), \tag{8.31.iii}$$

$$\partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h' \left(h^{-1}(S_\tau) \right) \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.31.iv)$$

$$\partial_t s_X = \frac{1}{\rho X} [\partial_x (\kappa_{X_1} \partial_x X) + \kappa_{X_2} \partial_x (X) \partial_x (k)] - \frac{C_{X_1}}{\rho k} \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k). \quad (8.31.v)$$

pour la donnée initiale obtenue en considérant la solution discrète telle que définie à l'issue du second pas. Nous prendrons bien sur avantage de l'invariance en temps de la densité au cours de ce nouveau pas pour considérer des systèmes équivalents au précédent plus simples et donc faire le choix de formules aux différences préservant l'équivalence au niveau discret. Rappelons que, bien que les conductivités soient ici fonctions des inconnues, les formules aux différences proposées assurent bien l'équivalence discrète (cf. remarque 5.2 section 5 pour l'écriture de telles formules dans le cadre de viscosités variables, l'extension aux conductivités étant immédiate). Il subsiste toutefois ici une difficulté lorsque, pour des raisons de modélisation, le coefficient κ_{X_2} est choisi non nul. Remarquons en effet la formule :

$$\kappa_{X_2} \partial_x (X) \partial_x (k) = \partial_x (\kappa_{X_2} k \partial_x X) - k \partial_x (\kappa_{X_2} \partial_x X),$$

où la température turbulente k est par hypothèse positive. De manière à forcer la positivité de s_X à l'issue du second pas, nous adoptons deux pas intermédiaires lorsque κ_{X_2} est non nul, que nous décrivons à présent.

Premier sous-pas

Il est dédié à l'approximation du système suivant :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (8.32.i)$$

$$\partial_t \rho u = 0, \quad (8.32.ii)$$

$$\partial_t \rho E = \partial_x (\kappa \partial_x T) + \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.32.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h' (h^{-1}(S_\tau)) \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.32.iv)$$

$$\partial_t s_X = \frac{1}{\rho X} \partial_x (\kappa_{X_1} \partial_x X) - \frac{C_{X_1}}{\rho k} \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.32.v)$$

où nous avons exclu le produit des gradients $\kappa_{X_2} \partial_x (X) \partial_x (k)$. L'invariance de la densité nous permet ici de considérer le système équivalent suivant :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (8.33.i)$$

$$\partial_t \rho u = 0, \quad (8.33.ii)$$

$$\frac{\rho}{\gamma - 1} \partial_t T = \partial_x (\kappa \partial_x T), \quad (8.33.iii)$$

$$\frac{\rho}{\gamma_\tau - 1} \partial_t k = \partial_x (\kappa_\tau \partial_x k), \quad (8.33.iv)$$

$$\rho \partial_t X = \partial_x (\kappa_{X_1} \partial_x X). \quad (8.33.v)$$

que nous intégrons en temps par une méthode aux différences finies implicite du type (6.60)-(5.10) où la dépendance en temps des coefficients de conductivité est explicitée à

l'instant du pas précédent. Il s'agit dès lors dans la pratique de résoudre trois problèmes symétriques définis positifs et découplés portant respectivement sur T , k et X . L'utilisation des moyennes telles que définies en (6.59) permettra d'assurer par un simple jeu d'écriture, que nous laissons au lecteur, l'équivalence au niveau discret avec le système (8.32).

Remarque 8.10

Les développements menés lors de la section 6.4 assurent *ipso facto* la positivité des grandeurs indépendamment réactualisées T , k et X . L'inégalité d'entropie précisée relative à S est claire.

Second sous-pas

Il nous reste donc à traiter, conformément à la décomposition opérée, lorsque le coefficient κ_{X_2} est choisi non nul :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (8.34.i)$$

$$\partial_t \rho u = 0, \quad (8.34.ii)$$

$$\partial_t \rho E = 0, \quad (8.34.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = 0, \quad (8.34.iv)$$

$$\partial_t s_X = \frac{1}{\rho X} \kappa_{X_2} (\partial_x X) (\partial_x k), \quad (8.34.v)$$

où nous comprendrons la seule équation non triviale sous la forme équivalente suivante :

$$\partial_t s_X + \left[-\frac{1}{\rho} \kappa_{X_2} \partial_x(k) \right] \partial_x \log \left(\frac{X}{k^{C_{X_1}}} \right) = -\frac{C_{X_1}}{\rho k} \kappa_{X_2} (\partial_x k)^2, \quad (8.35)$$

c'est à dire comme une équation de transport sur s_X avec la "vitesse apparente" :

$$a := \left[-\frac{1}{\rho} \kappa_{X_2} \partial_x(k) \right]$$

en présence d'un terme de relaxation, le temps de relaxation apparent :

$$\lambda := \frac{C_{X_1}}{\rho k} \kappa_{X_2} (\partial_x k)^2$$

étant bien positif ou nul. Une telle interprétation repose bien entendu sur un abus de langage mais c'est une manière simple de forcer la positivité de s_X à l'issue du pas dédié à la prise en compte des phénomènes de conduction thermique. Nous traiterons dans la pratique cette équation de manière explicite en temps, le prix en étant la condition CFL contraignante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \overline{\left| \frac{1}{\rho} \kappa_{X_2} \partial_x(k) \right|} \leq 1. \quad (8.36)$$

Remarque 8.11

Nous n'avons pas cherché dans les applications à éviter cette restriction même si nous aurions pu adopter une stratégie implicite conduisant à devoir inverser une M-matrice tridiagonale toutefois non symétrique comme l'indique clairement la formule ci-dessous (écrite toutefois lorsque explicitée en temps). Il aurait sinon fallu par exemple implémenter une méthode de décomposition LU avec pour seul avantage de pouvoir traiter à moindre coût l'option k_{X_2} non nul, ce que nous n'avons pas jugé indispensable.

Le sous-pas de type projection L^2 doit porter sur s_X , d'où la relation (8.35), et trouve la forme discrète suivante :

$$s_{X_i}^{n+1,(2-)} = s_{X_i}^{n+1,(2=)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(a_{i+1/2}^{n+1,(2=)} \right)_+ \left(s_{X_{i+1}}^{n+1,(2=)} - s_{X_i}^{n+1,(2=)} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(a_{i-1/2}^{n+1,(2=)} \right)_- \left(s_{X_i}^{n+1,(2=)} - s_{X_{i-1}}^{n+1,(2=)} \right),$$

où nous avons défini la vitesse moyenne $a_{i+1/2}^{n+1,(2-)}$ de manière *ad hoc*, ce sous-pas étant suivi de l'intégration en temps du terme de relaxation suivante :

$$s_{X_i}^{n+1,(2)} = s_{X_i}^{n+1,(2-)} - \Delta t \lambda_i^{n+1,(2-)}, \quad (8.37)$$

où nous rappelons que par définition s_X désigne le logarithme de la grandeur positive $X/k^{C_{X_1}}$.

Ceci conclut la description de la prise en compte des phénomènes de conduction thermique.

Remarque 8.12

Les formules discrètes obtenues assurent clairement, sous la condition CFL (8.36) la positivité de la grandeur X , seule variable réactualisée à l'issue de ce second sous-pas.

Quatrième pas : prise en compte des termes visqueux ($t^{n+1,(2)} \rightarrow t^{n+1,(1)}$)

Il s'agit de résoudre ici le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t \rho = 0, \quad (8.38.i)$$

$$\partial_t \rho u = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) \partial_x u), \quad (8.38.ii)$$

$$\partial_t \rho E = \partial_x ((\mu + \mu_\tau) u \partial_x u), \quad (8.38.iii)$$

$$\partial_t \rho S_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h' (h^{-1}(S_\tau)) \mu_\tau (\partial_x u)^2, \quad (8.38.iv)$$

$$\partial_t s_X = 0, \quad (8.38.v)$$

la donnée initiale coïncidant avec la solution discrète obtenue à l'issue du troisième pas. Notons qu'à l'issue de ce troisième pas, la variable s_X ainsi que la densité ont achevé leur évolution en temps et se trouvent dès lors découplées des autres équations.

L'approximation de la solution de (8.38) utilise la méthode aux différences finies implicite décrite section 5. Nous explicitons les nonlinéarités de la fonction viscosité turbulente à l'instant du pas précédent et appliquons les formules (5.10). Ceci achève la description du quatrième pas.

Remarquons simplement que ce pas est strictement identique à celui proposé section 5 et qu'en conséquence les arguments conduisant à réactualiser la validité des principes du maximum ainsi que les inégalités d'entropie précisées demeurent inchangés

Cinquième pas : Étape de projection nonlinéaire ($t^{n+1,(1)} \rightarrow t^{n+1}$)

Pour les raisons détaillées lors de la section 6, nous invoquons ici l'opérateur de projection nonlinéaire. Posons, afin de préserver les propriétés de conservation requises :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,(1)}, \quad (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^{n+1,(1)}, \quad (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^{n+1,(1)},$$

et posons par construction

$$s_{X_i}^{n+1} = s_{X_i}^{n+1,(1)}.$$

Définissons alors de manière à forcer le respect de l'identité (8.22.iv) établie dans la précédente section,

$$(\rho S)_i^{n+1} := \{\rho S\}(\rho_i^{n+1}, (\rho u)_i^{n+1}, (\rho E)_i^{n+1}, (\rho S_\tau)_i^{n+1}),$$

c'est à dire définissons $(\rho S_\tau)_i^{n+1}$ de sorte que

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}_{\tau_i}^{n+1,(1)} \left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \right]^{n+1,(1)} \times ((\rho S)_i^{n+1} - (\rho S)_i^{n+1,*}) - \\ & \mu \left[\frac{\rho^{\gamma_\tau-1}}{\gamma_\tau-1} \frac{1}{h'(h^{-1}(S_\tau))_i} \right]^{n+1,(1)} \times ((\rho S_\tau)_i^{n+1} - (\rho S_\tau)_i^{n+1,*}) = 0. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Ici, nous avons introduit les notations

$$\begin{aligned} (\rho S)_i^{n+1,*} &= (\rho S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S u\}_{i+1/2}^n + \\ & \Delta t \times \left\{ \left[\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i \right]^{n+1,(2)} \overline{\partial_x(\kappa \partial_x T)} + \left[\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i \right]^{n+1,(3)} \overline{\rho \epsilon} \right\}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (\rho S_\tau)_i^{n+1,*} &= (\rho S_\tau)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i \{\rho S_\tau u\}_{i+1/2}^n + \\ & \Delta t \times \left\{ \left[\frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau))_i \right]^{n+1,(2)} \overline{\partial_x(\kappa_\tau \partial_x k)} - \left[\frac{\gamma_\tau-1}{\rho^{\gamma_\tau-1}} h'(h^{-1}(S_\tau))_i \right]^{n+1,(3)} \overline{\rho \epsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Notons que contrairement à $(\rho S)_i^{n+1,*}$, la quantité $(\rho S_\tau)_i^{n+1,*}$ coïncide par construction avec la valeur réactualisée de l'inconnue ρS_τ à l'issue du troisième pas. Il en résulte donc la définition des différentes quantités discrètes présentes dans les deux précédentes équations. De manière à achever la définition de la formule de projection nonlinéaire, nous faisons choix de

$$\left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \right]^{n+1,(1)} := \left[\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i \right]^{n+1,(2)-1},$$

avec une formule analogue pour la moyenne du poids relatif au bilan d'entropie en S_τ . Un tel choix est motivé par les remarques développées lors de la section 6.4 dédiée à la prise en compte des lois de Fourier dans le contexte de deux viscosités constantes. En conséquence, nous comprenons donc ici :

$$\left[\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{1}{g'(g^{-1}(S))_i} \right]^{n+1,(1)} \times \left[\frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}} g'(g^{-1}(S))_i \right]^{n+1,(3)}$$

comme réalisant une approximation de l'unité. Nous indiquons qu'il aurait été possible de regrouper termes de relaxation et lois de Fourier en seul et même pas tout en assurant les propriétés de positivité requises et ce sans avoir à invoquer la précédente approximation de l'unité. Nous n'avons délibérément pas décrit ici une telle approche dans un souci de clarté d'exposition.

Enfin, les éléments indiqués à l'occasion des remarques concluant chacun des pas fractionnaires doivent suffire à permettre d'établir l'existence et l'unicité du résultat de la projection nonlinéaire opérée sur ρS_τ ainsi que la positivité des différentes grandeurs concernées dès que la densité reste positive. Nous renvoyons pour cela le lecteur à la section 6.4. Ceci conclut l'exposé de l'algorithme.

8.5 Résultats numériques

Notre propos est ici de qualifier l'aptitude des méthodes dites classique, par projection L^2 et par projection nonlinéaire à l'approximation numérique des solutions associées aux modèles de turbulence compressible précédemment discutés. Les problèmes de Cauchy considérés correspondent au choix d'une donnée initiale discontinue composée de deux états constants, la discontinuité survenant en $x = 0$.

Le lecteur pourrait nous demander pourquoi vouloir persister à comparer trois méthodes d'approximation dont nous avons déjà disqualifié les deux premières à l'issue des expériences numériques menées à viscosités constantes. En réalité, nous ne comparons ci-dessous ces trois méthodes qu'à l'occasion de quatre problèmes numériques pour lesquels nous disposons de solutions exactes et ce contrairement aux quatre suivants pour lesquels seule la méthode par projection nonlinéaire sera testée pour sa sensibilité aux raffinements en espace.

Nous avons jugé utile de rapporter les quatre premiers problèmes pour deux raisons. La première tient à ce que nous voulons que chacun constate que les difficultés exhibées à l'occasion de viscosités constantes sont ici fortement exacerbées par le comportement très nonlinéaire de la viscosité turbulente et que la prédiction numérique du rapport μ_τ/μ , de première importance dans le contexte des modèles discutés, s'en trouve être entachée d'erreurs grossières. La seconde raison tient à ce que nous voulons exhiber, dans le cas de modèles dégradés (*i.e.* sans conduction thermique ni relaxation), une difficulté résiduelle par laquelle nous concluons dans le cas des modèles généraux.

Soulignons enfin qu'à l'image des problèmes numériques déjà discutés lors de la précédente section, nous avons apporté un soin particulier aux choix des problèmes de Cauchy à résoudre numériquement : *i.e.* au choix de la donnée initiale ainsi qu'au choix du nombre de Reynolds de sorte que le rapport μ_τ/μ , ici fonction de l'inconnue, et le nombre de Mach turbulent

$$\mathcal{M}_\tau^2 = \frac{\gamma_\tau \frac{p_\tau}{\rho}}{\gamma \frac{p}{\rho}},$$

où c désigne la vitesse du son, restent dans un domaine de variation pertinent, c'est à dire celui attendu dans la pratique.

Rapportons que nous avons eu suffisamment de difficultés dans le contexte des modèles dégradés (*i.e.* sans **relaxation** ni conduction thermique) à satisfaire cette exigence pour indiquer que nous n'avons pas cherché à exhiber l'illustration la plus convaincante. Les problèmes discutés ci-après suffiront toutefois à notre propos.

L'ensemble des quatre premiers problèmes (J K L M) concerne le modèle (k, ϵ) en l'absence de conduction thermique et de relaxation turbulente. Les constantes de modélisation retenues ici sont les plus couramment admises :

$$\gamma = 1.4, \quad \gamma_\tau = \frac{5}{3}, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44.$$

Les nombres de Reynolds ici choisis trouvent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} R_e &= 1.11 \cdot 10^3 && \text{problème J et M} \\ R_e &= 2.22 \cdot 10^5 && \text{problème K} \\ R_e &= 1.11 \cdot 10^4 && \text{problème L} \end{aligned}$$

et s'avèrent être modérés dans le contexte d'un écoulement turbulent. Un nombre de Reynolds de 10^6 est en effet typique en aérodynamique.

Les données initiales sont décrites à la table 4.3. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour la construction des solutions des problèmes de Riemann associés.

Problèmes J K L

Répondant aux cas B C D et F G H déjà traités mais pour une viscosité turbulente où

la longueur caractéristique $L = k^{3/2}/\epsilon$ est variable, les problèmes considérés conduisent à juger de l'aptitude des méthodes à restituer une décomposition en ondes simples avec pour chaque onde la capture correcte des relations de saut dans trois régimes d'écoulement turbulent : le rapport μ_τ/μ est respectivement dans un voisinage de 1, reste grand devant 1 et enfin reste petit devant 1.

Examinons dans un premier temps ces deux derniers problèmes. L'examen des figures illustre clairement que seule la méthode par projection nonlinéaire conduit à des erreurs acceptables au niveau de raffinement proposé. Pour le régime $\mu_\tau/\mu \gg 1$, la méthode classique et la méthode par projection L^2 semblent "diverger" lorsque le pas d'espace décroît ; l'erreur s'amplifiant linéairement avec $1/\Delta x$ du moins jusqu'au niveau de raffinement proposé (2000 cellules). Concernant le régime $\mu_\tau/\mu \ll 1$, la méthode classique semble avoir "capturé" une fonction toutefois éloignée de la solution exacte, le désaccord étant sensiblement moindre pour la méthode par projection L^2 ceci de manière consistante, au temps considéré, avec la propriété que possède la variable d'évolution ρS_τ d'être asymptotiquement une variable conservée. Rappelons qu'une telle erreur ne peut qu'inéluctablement croître avec le temps puisqu'elle n'est jamais redistribuée de manière consistante avec la relation de saut généralisée sous-jacente.

Examinons désormais le régime le plus défavorable : μ_τ/μ dans un voisinage de 1. De nouveau, les méthodes classique et par projection L^2 conduisent à des erreurs s'amplifiant linéairement avec $1/\Delta x$, là encore jusqu'au niveau de raffinement le plus fin proposé. Concernant la méthode par projection nonlinéaire, deux observations s'imposent. Premièrement à l'image des deux autres méthodes, un *overshoot* prononcé s'est développé en $x=0$, lieu de la discontinuité initiale et reste stationnaire puisque la vitesse est nulle à toutes dates en ce point. Deuxièmement et en faisant abstraction de cette anomalie, la méthode par projection nonlinéaire conduit cette fois à une erreur qui n'est plus négligeable : l'écart relatif à la constance de ρk étant approximativement de 5% en norme sup. Nous soulignons que les tests numériques que nous avons menés sembleraient indiquer que ces deux difficultés ne seraient pas directement corrélées sans toutefois que nous puissions affirmer que la seconde difficulté est complètement étrangère à la première. Quoiqu'il en soit, l'erreur observée dans la prédiction de la relation de saut sous-jacente est parfaitement stable par raffinement ainsi que l'indique la figure 4.2.

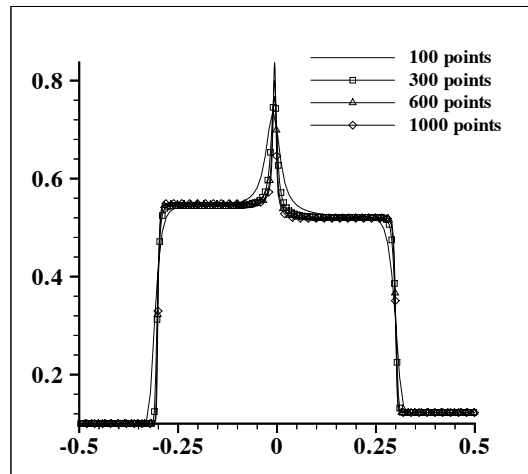


FIG. 4.2 - Influence du degré de raffinement pour la méthode par projection nonlinéaire

A cette heure nous ne savons pas expliquer cette deuxième anomalie; quant à la première, elle est générique dans le contexte de la dynamique des gaz numérique (cf. par exemple Montagné-Yee-Vinokur [48] dans le contexte du système Euler 3×3 pour l'examen de leur cas F).

Problème M

Ce problème est l'analogie des problèmes E et I déjà discutés: la solution exacte du problème de Riemann associé est globalement continue et nous nous plaçons donc délibérément en dehors de toute problématique de capture de solutions onde progressive. Si il est possible d'observer de nouveau l'anomalie en $x=0$ déjà rapportée précédemment (la vitesse est encore nulle en ce point), notons que le schéma classique conduit de nouveau à "capturer" une fonction éloignée de la solution exacte.

Au terme de l'examen des quatre premiers problèmes, nous disqualifions la méthode classique et la méthode par projection L^2 pour ne plus considérer que la méthode par projection nonlinéaire. Notre propos est ici de tester l'aptitude de cette dernière méthode à l'approximation numérique des solutions relevant des modèles de turbulence compressible discutés dans cette section: à savoir les modèles (k, l) , (k, ω) et (k, ϵ) .

Nous ne disposons pas de solution exacte pour les quatre problèmes examinés ci-après. Nous évaluerons l'aptitude numérique de la méthode par projection nonlinéaire en testant sa sensibilité au raffinement en espace, en utilisant deux maillages respectivement constitués de 300 et 500 cellules.

Les modèles considérés ici impliquent les différents phénomènes de conduction thermique et de relaxation tels qu'ils ont été décrits précédemment. Les constantes de modé-

lisation retenues sont d'une utilisation courante :

$$\gamma = 1.4, \quad \gamma_\tau = \frac{5}{3}, \quad C_\mu = 0.09, \quad P_r = 0.72, \quad P_{rt} = 0.9, \quad \alpha_k = 1,$$

et

Problème N : modèle (k, l) $C_l = 0.044, \quad \alpha_{l1} = 1.3, \quad \alpha_{l2} = 1.3,$
 Problème O : modèle (k, ω) $C_{\omega 1} = 0.44, \quad C_{\omega 2} = 0.92, \quad \alpha_{\omega 1} = 1.17, \quad \alpha_{\omega 2} = 1.17,$
 Problème P et Q : modèle (k, ϵ) $C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad \alpha_\epsilon = 1.3$

Le nombre de Reynolds choisi pour ces quatre modèles est

$$R_\epsilon = 2.22 \cdot 10^3$$

Les constantes de modélisation telles que définies sont celles proposées respectivement dans Smith [21], Menter [22], Gleize [25]. Ces choix assurent que les modèles (k, ϵ) et (k, ω) , dégradés en omettant les phénomènes de conduction mais en incluant les termes de relaxation, sont équivalents pour les solutions $\mathcal{C}^2$. En revanche, le modèle (k, l) considéré n'est pas équivalent aux deux précédents puisque les opérateurs du premier ordre extraits ne le sont pas pour les solutions régulières, la condition (8.21) n'étant pas satisfaite.

Soulignons que la donnée initiale associée aux problèmes N, O et P est identique, les tables 4.4, 4.5 et 4.6 ne font que réexprimer cette même donnée mais pour un choix différent de variables turbulentes.

Remarque 8.13

Notre souci de garantir la pertinence du domaine de variation du nombre de Mach turbulent, ici astreint à demeurer inférieur à 0.1 (ce dernier nous ayant été rapporté ne “devoir” **jamais** excéder la valeur 0.4), nous a conduit à devoir adopter un rapport des viscosités μ_τ/μ très petit devant 1 et ce pour une pression turbulente p_τ très petite devant 1. Les problèmes présentés, contrairement à ce que suggérerait l'intuition, sont numériquement délicats : le bilan d'entropie relatif à p est certes pondéré par le poids μ_τ/μ mais doit être équilibré par le bilan d'entropie portant sur p_τ . En d'autres termes, deux expressions très petites devant 1 doivent se compenser. En aucun cas, la proximité asymptotique d'un cas limite ne peut être ici utile et nous l'illustrerons numériquement par un exemple. Il est inutile de préciser que tous les problèmes traités par l'ordinateur dans ce mémoire, l'ont été en double précision.

Nous avons préféré nous en tenir à cette difficulté calculatoire plutôt que d'avoir à affronter les foudres justifiées d'un spécialiste de la turbulence compressible.

Problèmes N O P

Nous comparons successivement, pour un modèle donné, l'influence relative des phénomènes de conduction thermique et des phénomènes de relaxation. L'examen des résultats

numériques illustre que la méthode par projection nonlinéaire est peu sensible sinon insensible aux deux niveaux de raffinement proposés en l'absence de conduction thermique et de relaxation. La prise en compte des lois de type Fourier n'apporte ici aucune modification contrairement aux phénomènes de relaxation qui s'avèrent être raides ainsi que l'illustre la comparaison des solutions respectivement obtenues pour 300 et 500 cellules. Enfin, la comparaison des profils discrets associés au rapport μ_τ/μ ne met en évidence aucune différence notable entre les trois modèles, même si la non-équivalence du modèle (k, l) respectivement avec (k, ω) et (k, ϵ) conduit après relaxation à un profil discret de pression turbulente ρk différent.

Problème Q

Nous tenons à rapporter un cas où la prise en compte des phénomènes de conduction thermique induit une forte sensibilité au degré de raffinement dans la capture des solutions onde progressive discrètes. Soulignons que cette dégradation peut être ici observée précisément parce que les viscosités sont non toutes deux constantes et qu'en conséquence, la relation de saut généralisée sous jacente implique les lois de Fourier de manière non conservative. Notons ensuite qu'en l'absence de conduction thermique, le profil discret de pression turbulente reste peu sensible au niveau de raffinement proposé, ce contrairement au profil obtenu en présence de conduction thermique. Cette différence de sensibilité semble indiquer la raideur numérique qu'induit un produit non conservatif entre une fonction des inconnues et une dérivée seconde. Soulignons que bien entendu il n'y a pas d'erreur L^2 ni de projection ni de représentation des dérivées discrètes qui puissent être incriminées dans ce calcul. Par raideur numérique, nous entendons ici une raideur analogue à celle rencontrée lors de l'intégration en temps d'un phénomène de relaxation associé à un paramètre proche de zéro : cette intégration en temps est sensible au choix du pas de temps. Dans le présent contexte, il semblerait donc qu'il faille choisir un pas d'espace suffisamment petit pour contrer cette sensibilité. Toutefois, les quantités moyennes turbulentes associées à ce présent cas test sont trop petites pour que les erreurs enregistrées puissent avoir une influence significative dans un calcul industriel. Il serait toutefois nécessaire de chercher à confirmer ou infirmer la raideur numérique rapportée tout en préservant la plage de variation pratique des grandeurs turbulentes.

Test	γ	γ_τ	ρ	u	p	k	ϵ	μ_τ/μ
J	1.4	1.6	1	1	1	0.1	1	1
			1.07585	-0.93565	1.1203	0.11396	1.21968	1.14548
K	1.4	1.6	5	2	10	0.1	1	1000
			15.19988	-0.059159	22.10081	0.16054	14.03767	558.1102
L	1.4	1.6	1	1	1	0.001	10	10^{-4}
			1.14817	-0.88627	1.42543	$1.40222 \cdot 10^{-3}$	12.34404	$1.82887 \cdot 10^{-4}$
M	1.4	1.6	1	-1	1	0.01	1	0.01
			1.258	1.25676	1.37896	0.0114764	1.23284	0.0134396

Table 4.3 - Si les applications $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{S}$ identiquement nulles

Test	γ	γ_τ	ρ	u	p	k	l	μ_τ/μ
N	1.4	1.6	1	0	1	10^{-6}	$7.9245 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}
			2	0	5	$2 \cdot 10^{-6}$	$2.8284 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$

Table 4.4 - Modèle (k, l)

Test	γ	γ_τ	ρ	u	p	k	ω	μ_τ/μ
O	1.4	1.6	1	0	1	10^{-6}	200	10^{-6}
			2	0	5	$2 \cdot 10^{-6}$	50	$1.6 \cdot 10^{-5}$

Table 4.5 - Modèle (k, ω)

Test	γ	γ_τ	ρ	u	p	k	ϵ	μ_τ/μ
P	1.4	1.6	1	0	1	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-6}
			2	0	5	$2 \cdot 10^{-6}$	10^{-4}	$1.6 \cdot 10^{-5}$
Q	1.4	1.6	1	2	1	10^{-7}	10^{-5}	$2 \cdot 10^{-7}$
			2	0	5	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-7}$

Table 4.6 - Modèle (k, ϵ)

Annexe A

Construction des ondes simples

A Construction des ondes simples

Nous présentons brièvement les techniques de constructions des ondes simples, solutions des systèmes du premier ordre extrait, utilisées dans les différents résultats numériques à titre comparatif. Nous ne développons ces techniques que dans le cadre du système du premier ordre extrait associé au modèle (k, ϵ) , l'obtention de ces ondes simples pour le modèle de fluide à deux pressions ainsi que les modèles (k, l) et (k, ω) s'en déduisant alors aisément.

Nous rappelons toutefois qu'il ne s'agit pas ici de résoudre le problème de Riemann associé au système du premier ordre extrait. Dans la pratique, il s'agira de considérer un état gauche et pour le choix d'une date T finale et d'une décomposition 1-onde-contact-3-onde, d'obtenir un état droit.

Construction d'une détente

Bien que le système soit non conservatif, les invariants de Riemann permettent de paramétrer complètement les 1-ondes et les 3-ondes de détente. Les quatre invariants de Riemann associés aux deux champs vraiment nonlinéaires (1-onde et 3-onde) du système du premier ordre extrait de (8.14)-(8.16) trouvent la forme suivante :

$$I_1 = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad I_2 = \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}}, \quad I_3 = \frac{\rho\epsilon}{\rho^{C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau-1)+1}} \quad \text{et} \quad I_4 = u - \delta \int \sqrt{\gamma I_1 \rho^{\gamma-1} + \gamma_\tau I_2 \rho^{\gamma_\tau-1}} \frac{d\rho}{\rho},$$

où $\delta = -1$ dans une 1-onde et $\delta = 1$ dans une 3-onde.

Dans la pratique, après s'être donné un état gauche $\mathbf{v}_L$ et avoir choisi une vitesse de sortie de l'onde de détente définie par

$$u_R + \delta c_R, \quad c_R^2 = \frac{\gamma p_R + \gamma_\tau p_{\tau R}}{\rho_R},$$

puisque les quantités I_1 , I_2 , I_3 et I_4 sont constantes dans une onde de détente il en résulte que le système

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho^\gamma} &= \frac{p_L}{\rho_L^\gamma}, \\ \frac{p_\tau}{\rho^{\gamma_\tau}} &= \frac{p_{\tau L}}{\rho_L^{\gamma_\tau}}, \\ \frac{\rho\epsilon}{\rho^{C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau-1)+1}} &= \frac{(\rho\epsilon)_L}{\rho_L^{C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau-1)+1}}, \\ u &= u_L - \delta \int_{\rho_L}^{\rho} \sqrt{\gamma I_1 y^{\gamma-1} + \gamma_\tau I_2 y^{\gamma_\tau-1}} \frac{dy}{y}, \end{aligned}$$

complété par

$$\frac{x}{t} = u + \delta c, \quad c^2 = \frac{\gamma p + \gamma_\tau p_\tau}{\rho}, \quad \begin{array}{ll} \delta = -1 & \text{dans une 1-onde de détente,} \\ \delta = 1 & \text{dans une 3-onde de détente,} \end{array}$$

le choix de la vitesse de sortie de l'onde conduit alors à la détermination du vecteur des inconnues $\mathbf{v}$ dans une 1-onde ou une 3-onde de détente.

Construction d'un contact

Une discontinuité de contact est caractérisée par une vitesse u et une pression totale $p + p_\tau$ continue, le saut des autres inconnues du système demeurant arbitraire. Rappelons que de telles discontinuités sont les seules à persister en présence des termes de dissipation visqueuse.

Construction d'un choc

Nous ne donnons ici, aucune démonstration et nous renvoyons le lecteur à [16] pour les détails de calcul. A la traversée d'une discontinuité de type onde de choc, les inconnues du système satisfont les relations de saut suivantes :

$$M = \rho_R(u_R - \sigma) = \rho_L(u_L - \sigma), \quad (\text{A.1.i})$$

$$(\rho_R)^{1-C_1} \frac{p_{\tau R}^{C_1}}{(\rho\epsilon)_R} = \rho_L^{1-C_1} \frac{(p_{\tau L})^{C_1}}{(\rho\epsilon)_L}, \quad (\text{A.1.ii})$$

$$(p_R + p_{\tau R}) = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma_\tau - 1} p_{\tau R} + (\gamma - 1) \frac{\rho_R}{\rho_L} \left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{p_{\tau L}}{\gamma_\tau - 1} \right) + (\gamma - 1) \left(1 - \frac{\rho_R}{\rho_L} \right) \left(\frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_R} - \frac{1}{\rho_L} \right) - p_L - p_{\tau L} \right), \quad (\text{A.1.iii})$$

où σ désigne la vitesse de propagation de l'onde. De plus, les critères d'admissibilité suivants doivent être satisfaits :

$$\begin{aligned} M^2 \tau_L &> \gamma p_L + \gamma_\tau p_{\tau L} && \text{dans un 1-choc,} \\ M^2 \tau_R &< \gamma p_R + \gamma_\tau p_{\tau R} && \text{dans un 3-choc.} \end{aligned}$$

En supposant connu l'état gauche $\mathbf{v}_L$ et la vitesse de propagation de l'onde σ , seules restent à déterminer les quantités ρ_R et $p_{\tau R}$. Afin de simplifier la présentation, plaçons-nous dans le cadre d'une 1-onde de choc. Les quantités ρ_R et $p_{\tau R}$ sont alors déterminées par l'intégration du système d'EDO suivant régissant les solutions onde progressive du système convectif-dissipatif complet, *i.e.* en présence du terme de dissipation visqueuse :

$$\begin{aligned} \frac{ds_\tau(\tau)}{d\tau} &= M^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) (\gamma_\tau - 1) \frac{\tau^{\gamma_\tau - 1} s_\tau(\tau)^\theta (\tau - \tau_L)(\tau - \tau_0)}{\tau (\nu_\tau (\gamma_\tau - 1)^{\theta + 1} + s_\tau(\tau)^\theta)} + \\ &\quad (\gamma_\tau - \gamma) \frac{s_\tau(\tau)^\theta (s_\tau(\tau) - (\tau_L p_{\tau L}) \tau^{\gamma_\tau - 1})}{\tau (\nu_\tau (\gamma_\tau - 1)^{\theta + 1} + s_\tau(\tau)^\theta)}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.i})$$

$$s_\tau(\tau_R) = (\tau_L p_{\tau L}) \tau_R^{\gamma_\tau - 1} - \left(\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma_\tau - \gamma} \right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M^2 \tau^{\gamma_\tau - 1} (\tau_R - \tau_L)(\tau_R - \tau_0), \quad (\text{A.2.ii})$$

$$s_\tau(\tau_L) = \frac{p_{\tau L}}{(\rho_L)^{\gamma_\tau}} \quad \text{et} \quad \tau_L = \frac{1}{\rho_L}, \quad (\text{A.2.iii})$$

$$s_\tau(\tau_R) = \frac{p_{\tau R}}{(\rho_R)^{\gamma_\tau}} \quad \text{et} \quad \tau_R = \frac{1}{\rho_R}, \quad (\text{A.2.iv})$$

où les notations suivantes ont été considérées :

$$\theta = 2 - C_{\epsilon 1}, \quad \nu = \frac{\mu(\gamma_\tau - 1)^2}{C_\mu} \rho_L^{C_{\epsilon 1} - 1} \frac{(\rho\epsilon)_L}{(p_{\tau L})^{C_{\epsilon 1}}} \quad \text{et} \quad \tau_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\rho_L} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_L + p_{\tau L}}{M^2}.$$

Dans la pratique, après avoir choisi une vitesse de propagation σ et un état gauche

$$\mathbf{v}_L = {}^T (\rho_L, (\rho u)_L, (\rho E)_L, p_{\tau L}, (\rho\epsilon)_L),$$

l'équation différentielle (A.2.i) est résolue numériquement à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta du quatrième-cinquième ordre de Fehlberg proposée dans les subroutines Maple. Cette résolution est réalisée sur un intervalle $[\tau^*, \tau_L]$ où $\tau^* > 0$ est choisi arbitrairement. La solution ainsi obtenue admet deux points d'intersection avec la courbe suivante :

$$s_\tau(\tau) = (\tau_L p_{\tau L}) \tau^{\gamma_\tau - 1} - \left(\frac{\gamma_\tau - 1}{\gamma_\tau - \gamma} \right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M^2 \tau^{\gamma_\tau - 1} (\tau - \tau_L) (\tau - \tau_0).$$

Par construction, un des deux points d'intersection n'est autre que l'état gauche tandis que le second est associé à l'état droit cherché de sorte que nous connaissons ainsi

$$\left(\frac{1}{\rho_R}, \frac{p_{\tau R}}{(\rho_R)^{\gamma_\tau}} \right).$$

La connaissance de ρ_R et $p_{\tau R}$ permet alors la détermination l'état droit cherché en utilisant les relations (A.1).

Annexe B

Raideur numérique des termes de relaxation

B Raideur numérique des termes de relaxation

Cette annexe est dédiée à l'énoncé ainsi qu'à la preuve d'un résultat illustrant la raideur des termes de relaxation et en conséquence les difficultés numériques qui s'ensuivent. Ce résultat est obtenu en constatant qu'il est possible d'intégrer exactement le système considéré d'un point de vue numérique lors du pas fractionnaire consacré à la prise en compte des termes de relaxation.

En effet, en figeant le terme $(\partial_x u)^2$ sur chaque cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, hypothèse naturelle dans un cadre de méthodes numériques du premier ordre, il en résulte qu'à l'issue du premier pas fractionnaire, dédié à l'opérateur du premier ordre extrait, les équations suivantes portant sur les variables ρS_τ et ρs_ϵ sont dès lors découplées des autres équations :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho s_\tau &= \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'(h^{-1}(S_\tau)) \left(\mu_\tau \left[\overline{(\partial_x u)^2} \right] - \rho^{C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau - 1) + 1} \frac{s_\tau^{C_{\epsilon 1}}}{s_\epsilon} \right), \\ \partial_t \rho s_\epsilon &= (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})(\gamma_\tau - 1) \rho^{(C_{\epsilon 1} - 1)(\gamma_\tau - 1) + 1} h^{-1}(S_\tau)^{C_{\epsilon 1} - 1}.\end{aligned}$$

Il importe de noter qu'un tel résultat permet également la construction d'autres méthodes numériques préservant l'ensemble des inégalités demandées (inégalité d'entropie ou positivité des grandeurs physiques).

Lemme B.1

Supposons la fonction h égale à l'identité et considérons le système suivant :

$$\partial_t \rho s_\tau = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} \left(\mu_\tau \left[\overline{(\partial_x u)^2} \right] - \rho^{C_{\epsilon 1}(\gamma_\tau - 1) + 1} \frac{s_\tau^{C_{\epsilon 1}}}{s_\epsilon} \right), \quad (\text{B.1.i})$$

$$\partial_t \rho s_\epsilon = (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})(\gamma_\tau - 1) \rho^{(C_{\epsilon 1} - 1)(\gamma_\tau - 1) + 1} s_\tau^{C_{\epsilon 1} - 1}, \quad (\text{B.1.ii})$$

$$\text{avec} \quad \mu_\tau = \frac{C_\mu}{(\gamma_\tau - 1)^2} \rho^{(C_{\epsilon 1} - 1)(1 - \gamma_\tau) + \gamma_\tau} s_\tau^{2 - C_{\epsilon 1}} s_\epsilon, \quad (\text{B.1.iii})$$

où

$$\left[\overline{(\partial_x u)^2} \right] (x, t) = \overline{(\partial_x u)^2}_i^{n+1/2} \geq 0 \quad \text{si } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad t \in [t^n, t^{n+1}[$$

et où ρ est une fonction constante du temps. Ce système, muni de la donnée initiale $(s_\tau(0, x), s_\epsilon(0, x))$, admet pour tout $t \in]0, t^1[$ et tout $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ l'unique solution

$$s_\tau(t, x; s_\tau(0, x), s_\epsilon(0, x)) = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho(x)^{\gamma_\tau}} (\alpha(x, t) \beta(x, t))^{\frac{1}{C_{\epsilon 1} - 1}}, \quad (\text{B.2})$$

$$s_\epsilon(t, x; s_\tau(0, x), s_\epsilon(0, x)) = \rho(x)^{1 - C_{\epsilon 1}} (\gamma_\tau - 1)^{C_{\epsilon 1}} \alpha(x, t), \quad (\text{B.3})$$

où α et β sont deux fonctions réelles positives définies par

$$\alpha(x, t) = \alpha_0(x) e^{tb/a} \left(e_1(t) + \beta_0(x) a^2 t e_2(t) \right)^{1/a^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$\beta(x, t) = \frac{\beta_0(x) e_1(t) + b^2 t e_2(t)}{e_1(t) + \beta_0(x) a^2 t e_2(t)}, \quad (\text{B.5})$$

avec

$$e_1(t) = \frac{1 + e^{-2abt}}{2} \quad \text{et} \quad e_2(t) = \frac{1 - e^{-2abt}}{2abt},$$

$$\alpha_0(x) = \frac{s_\epsilon(0, x)}{(\gamma_\tau - 1)^{C_{\epsilon 1}}} \rho(x)^{C_{\epsilon 1} - 1} \quad \text{et} \quad \beta_0(x) = \frac{1}{\alpha_0(x)} \left(\frac{s_\tau(0, x) \rho(x)^{\gamma_\tau}}{\gamma_\tau - 1} \right)^{C_{\epsilon 1} - 1},$$

où a et b sont deux constantes réelles positives définies par

$$a = \sqrt{\frac{C_{\epsilon 2} - 1}{C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{C_\mu (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})(C_{\epsilon 1} - 1) \left[(\partial_x u)^2 \right]}.$$

De plus, si $C_{\epsilon 2} \in]6 - \sqrt{20}, 6 + \sqrt{20}[$, alors l'application

$$t \rightarrow \rho^{\gamma_\tau} \frac{s_\tau}{\gamma_\tau - 1},$$

est strictement convexe.

Remarque B.2

Dans un souci de simplification, la fonction h a été choisie égale à l'identité. Il est aisé de constater que le résultat précédent s'étend sans difficulté à une fonction h strictement monotone quelle-conque.

Remarque B.3

La condition $C_{\epsilon 2} \in]6 - \sqrt{20}, 6 + \sqrt{20}[$ est bien entendu tout à fait non standard. Cependant, la constante $C_{\epsilon 2}$ est, dans la pratique, choisie dans un voisinage de 2 ce qui assure que la condition relative à $C_{\epsilon 2}$ est toujours satisfaite.

Démonstration du lemme B.1

Puisque $t \in]0, t^1[$ alors $\left[(\partial_x u)^2 \right] (x, t)$ est une constante du temps. En posant

$$X = \rho^{\gamma_\tau} \frac{s_\tau}{\gamma_\tau - 1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{s_\epsilon}{(\gamma_\tau - 1)^{C_{\epsilon 1}}} \rho^{C_{\epsilon 1} - 1},$$

la viscosité laminaire trouve l'expression suivante :

$$\mu_\tau = C_\mu \alpha X^{C_{\epsilon 1}}.$$

En conséquence, le système (B.1) s'écrit sous la forme

$$\partial_t X = C_\mu \alpha X^{2 - C_{\epsilon 1}} \left[(\partial_x u)^2 \right] - \frac{X^{C_{\epsilon 1}}}{\alpha}, \quad (\text{B.6.i})$$

$$\partial_t \alpha = (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) X^{C_{\epsilon 1} - 1}. \quad (\text{B.6.ii})$$

En dérivant (B.6.ii) par rapport à la variable t , il vient

$$\frac{1}{C_{\epsilon 1} - 1} \partial_{tt} \alpha = (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) X^{C_{\epsilon 2} - 2} \partial_t X,$$

qui s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{C_{\epsilon 1} - 1} \partial_{tt} \alpha + \frac{1}{(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \alpha} (\partial_t \alpha)^2 = C_{\mu} (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \alpha \left[(\partial_x u)^2 \right].$$

En posant $\partial_t \alpha = \alpha \beta$, la fonction β vérifie l'équation de Riccati suivante :

$$\partial_t \beta = b^2 - a^2 \beta^2,$$

dont la solution analytique est donnée par (B.5). L'obtention de la solution analytique de (B.1) n'est plus alors qu'un simple, mais long, calcul.

De plus, en notant

$$Y = C_{\mu} \left[(\partial_x u)^2 \right] \alpha \quad \text{et} \quad Z = \frac{X^{2(C_{\epsilon 1} - 1)}}{\alpha},$$

nous obtenons

$$\partial_{tt} X = X^{3-2C_{\epsilon 1}} \left((2 - C_{\epsilon 1}) Y^2 + (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1} - 2) Y Z + C_{\epsilon 2} Z^2 \right).$$

Il est immédiat que les fonctions α et β sont strictement positives pour tout $t \in]0, t^1[$ et $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. En conséquence, l'application $t \rightarrow X$ est strictement positive pour tout $t \in]0, t^1[$ et $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Un simple calcul assure alors que si $C_{\epsilon 2} \in]6 - \sqrt{20}, 6 + \sqrt{20}[$, alors pour tout $C_{\epsilon 1} \in]1, 2[$ nous avons

$$\partial_{tt} X > 0, \quad \forall t \in]0, t^1[\quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}].$$

La démonstration est ainsi achevée. ■

Bibliographie

- [1] A. FORESTIER, J.M. HERARD et X. LOUIS, *A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, tome 324, Série I, No 8, pp. 919-926 (1997).
- [2] P.G. LEFLOCH, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1990).
- [3] V. VATEL, Ph.D. Thèse de l'Université Bordeaux I (1993).
- [4] X. LOUIS, Ph.D. Thèse de l'Université Paris VI (1995).
- [5] L. SAINSAULIEU, Thèse d'Habilitation de l'Université Paris VI, (1995).
- [6] B. MOHAMMADI and O. PIRONNEAU, **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [7] L. SAINSAULIEU, *Travelling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative*, SIAM journal of Applied Math., vol 55, No 6, pp 1552-1576 (1995).
- [8] P. A. RAVIART and L. SAINSAULIEU, *A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 2. Existence of travelling waves solutions*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [9] B. LARROUTUROU, C. OLIVIER: *On the numerical approximation of the K-eps turbulence model for two dimensional compressible flows*, INRIA report 1526 (1991).
- [10] D. VANDROMME, *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. Thèse de l'Université de Lille (1983).
- [11] L. SAINSAULIEU, *Initial value problem for the parabolic regularization of a first order non hyperbolic system*, accepted for publication in Mathematical Methods and Models in Applied Sciences.
- [12] D. SERRE, **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).
- [13] G. DAL MASO, P. LEFLOCH and F. MURAT, *Definition and weak stability of a non conservative product*, J. Math. Pures Appl., vol 74, pp. 483-548 (1995).
- [14] J.F. COLOMBEAU and A.Y. LEROUX, *Numerical methods for hyperbolic system in non-conservative form using products of distributions*, in **Advances in Comp. Meth. dor P.D.E.'s 4**, ed. R. Vichnevetsky and R. Steplemar IMACS (1987).
- [15] L. SAINSAULIEU, *Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs*, C.R.A.S. Paris, t. 312, Série I, pp. 491-494 (1991).
- [16] C. BERTHON et F. COQUEL, *A convection-diffusion system with first and second order in a nonconserv ation form. Part 1: Existence of travelling wave solutions*, en préparation.

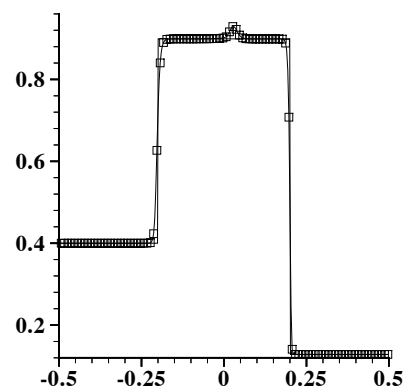
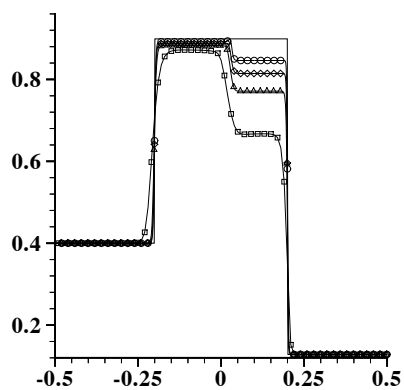
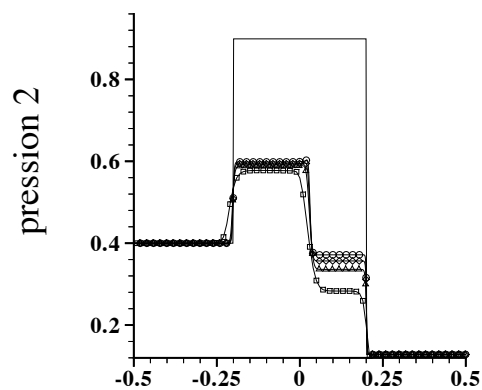
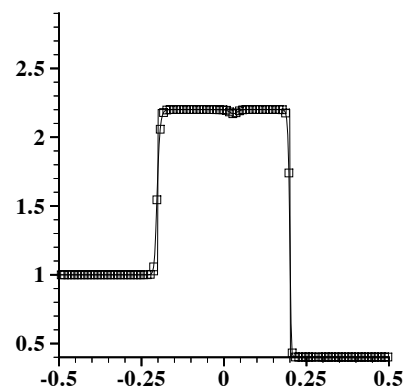
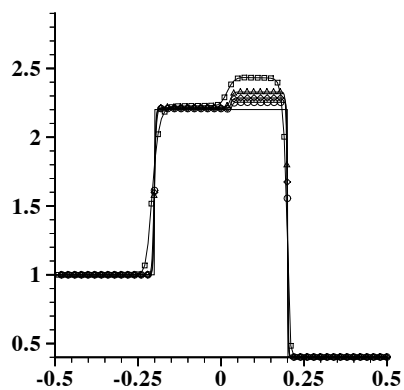
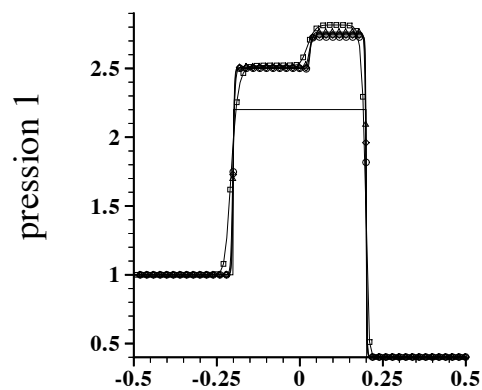
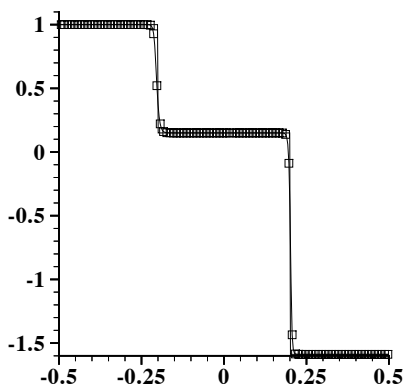
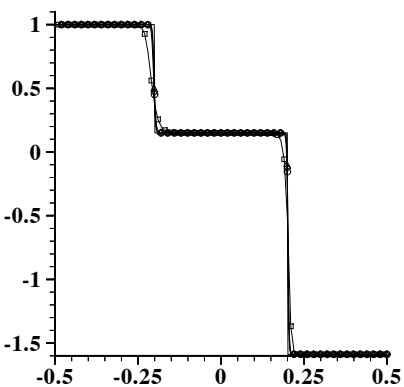
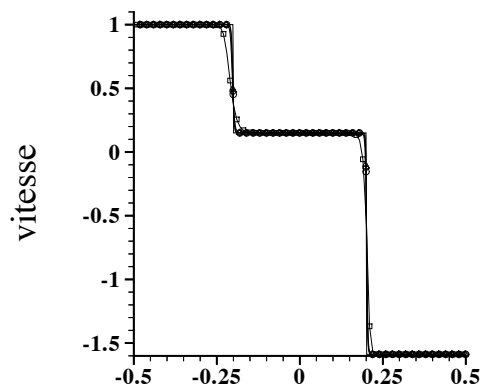
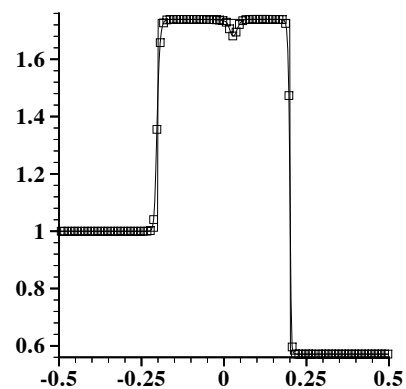
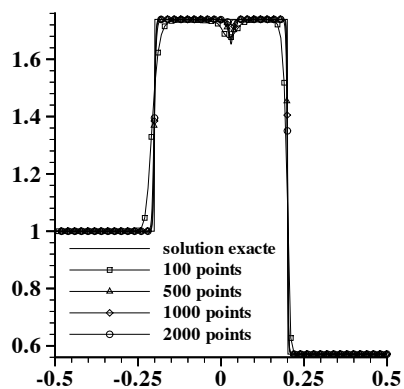
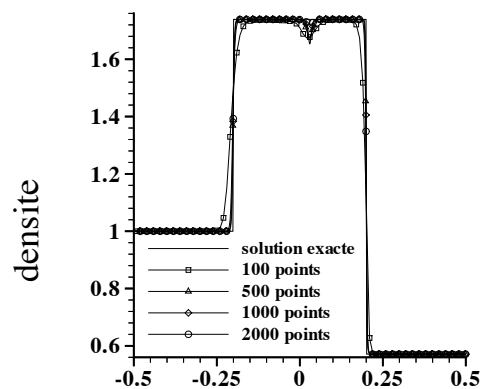
- [17] C. BERTHON et F. COQUEL, *A convection-diffusion system with first and second order in nonconservative form. Part 2: Approximate jump relations*, en préparation.
- [18] F. COQUEL et C. MARMIGNON, *A Roe-type linearization for the Euler equations for weakly ionized multi-component and multi-temperature gas*, AIAA 12th CFD Conference, San Diego (USA) (1995).
- [19] R. ABGRALL, *Extension of the Roe's approximate Riemann solver to equilibrium and nonequilibrium flows*, Proc 8th GAMM Conference on Num. Methods in Fluid Mech., Vol 29, P. Wesseling Ed., Vieweg (1990).
- [20] B. LARROUTUROU, *On upwind approximations of multi-dimensional multi-species flows*, Computational methods in applied sciences, Ch. Hirsch (Eds), Elsevier, (1992).
- [21] B. R. SMITH, *A near wall model for the $(k - l)$ two equation turbulence model*, 25th AIAA fluid dynamics conference, Colorado Springs, (1994).
- [22] F. R. MENTER, *Zonal two equation $(k - \omega)$ turbulence model for aerodynamic flows*, 24th AIAA fluid dynamics conference, Orlando, (1993).
- [23] F. R. MENTER, *Improved two equation $(k - \omega)$ turbulence model for aerodynamic flows*, NASA Technical Report 103975, (1992).
- [24] D. C. WILCOX, *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*, AIAA Journal, Vol 26, pp 1299-1310, (1988).
- [25] V. GLEIZE, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II (1994).
- [26] V. GLEIZE, *communication privée*
- [27] D. GILBARG: *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math., Vol 73, pp 256-274 (1951).
- [28] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 1, SMAI (Eds), Ellipse (1991).
- [29] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 2, Applied Mathematical Sciences, Vol 118, Springer (1995).
- [30] F. COQUEL et B. PERTHAME, *Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics*, Preprint du LAN, Université Paris VI (1997).
- [31] F. COQUEL et C. MARMIGNON, *A consistent conservative formulation for the Euler system for weakly ionized mixtures of gaz*, en préparation.
- [32] T. Y. HOU et P. G. LEFLOCH, *Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis*, Math. of Comp., Vol 62, No 206, pp. 497-530 (1994).
- [33] F. DEVUIST, Ph.D. Thèse de l'Université Paris VI (1994).

- [34] J. F. COLOMBEAU, A. Y. LEROUX, A. NOUSSAIR et B. PERROT, *Microscopic profiles of shock waves and ambiguities in multiplications of distributions*, SIAM, J. of Numer. Anal., Vol 26, No 4, pp. 871-883 (1989).
- [35] E. TADMOR: *A minimum entropy principle in the gas dynamics equations*, Appl. Numer. Math., No 2, pp. 211-219 (1986).
- [36] B. PERTHAME: *Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 27, No 6, pp. 1405-1421 (1990).
- [37] G. B. WHITAM, **Linear and nonlinear waves**, Pure and Applied Mathematics (1974).
- [38] J. M. GREENBERG, A. Y. LEROUX, R. BARAILLE et A. NOUSSAIR, *Analysis and approximation of conservation laws with source terms*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 34, No.5, pp. 1980-2007 (1997).
- [39] P. LEFLOCH et T. P. LIU: *Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservation form*, Forum Math., Vol 5, pp 261-280 (1993).
- [40] Y. ZEL'DOVICH et Y. P. RAIZER, **Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena**, Vol 1 et 2, Academic Press (1966).
- [41] C. BERTHON et F. COQUEL, *Multiple solutions for a non-Lipschitz system: Application to compressible flow models*, en préparation.
- [42] J. M. HERARD: *Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible*, Rapport Technique, EDF Chatou (1995).
- [43] F. COQUEL et M. S. LIOU: *Hybrid upwind splitting (HUS) by a field-by-field decomposition*, NASA Tech. Memo., ICOMP-95-2 (1995).
- [44] P. LASCAUX et R. THEODOR: **Analyse numerique matricielle appliquee a l'art de l'ingenieur**, Masson (1989).
- [45] R. ABGRALL, *Extention of the Roe's approximate Riemann solver to equilibrium and nonequilibrium flows*, Proc 8th GAMM Conference on Num. Methods in Fluid Mech., Vol 29, P. Wesseling Ed., Vieweg (1990).
- [46] F. COQUEL et P. LEFLOCH: *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimension: A general theory*, SIAM Journal of Num. Anal., Vol 30, pp. 675-700 (1993).
- [47] J. M. HERARD, *Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures*, ASME FED, Vol 215, pp. 73-80 (1995).
- [48] J. L. MONTAGNE, H. C. YEE et M. VINOKUR, *Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas*, Numerical methods in fluid mechanics, Proc. 7th GAMM-Conf., Louvain-La-Neuve/Belg. 1987, Notes Numer. Fluid Mech. 20, 219-228 (1988).

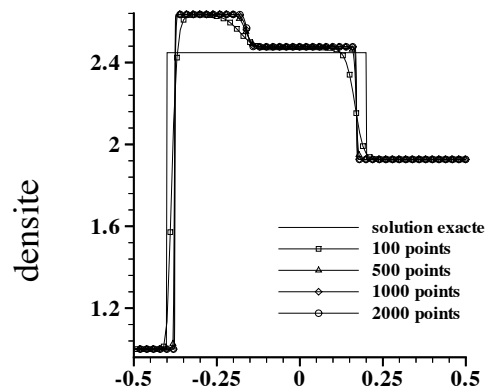
Schema classique

Schema par projection L2

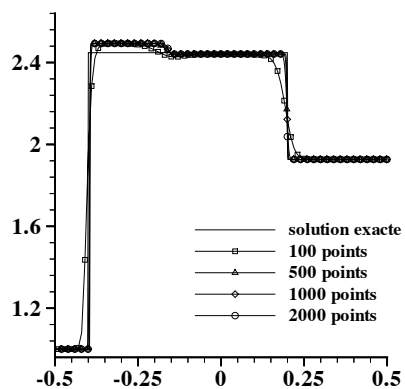
Schema par projection
nonlineaire



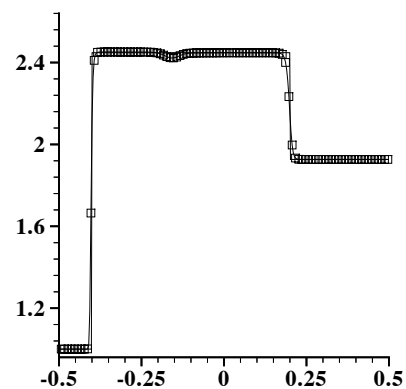
Schema classique



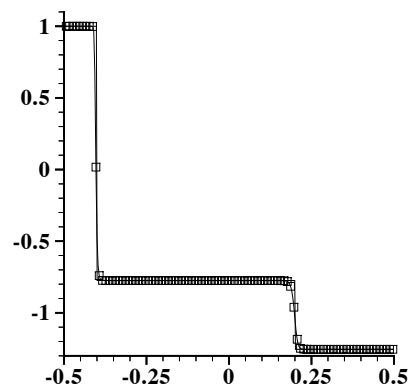
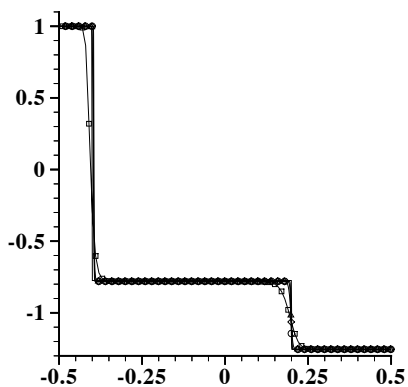
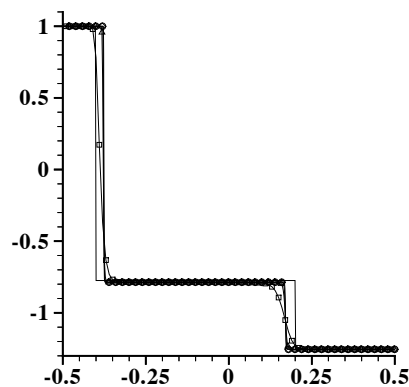
Schema par projection L2



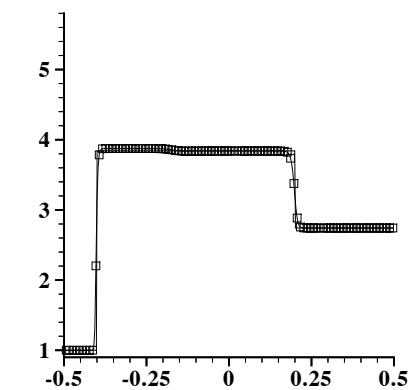
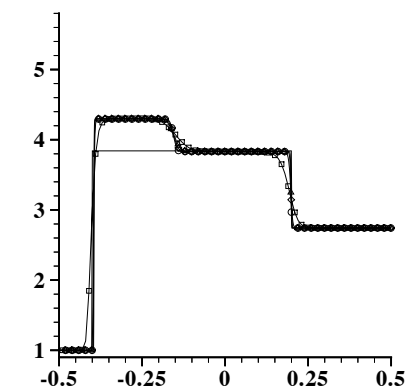
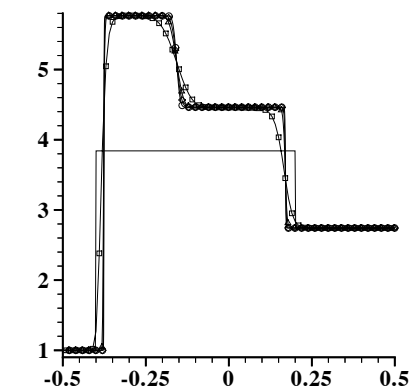
Schema par projection nonlineaire



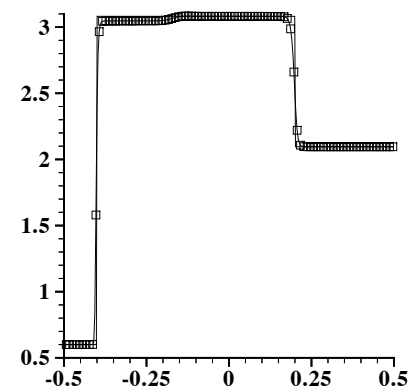
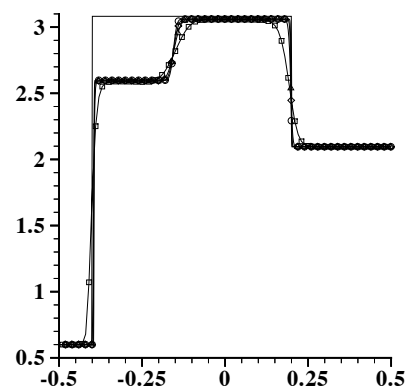
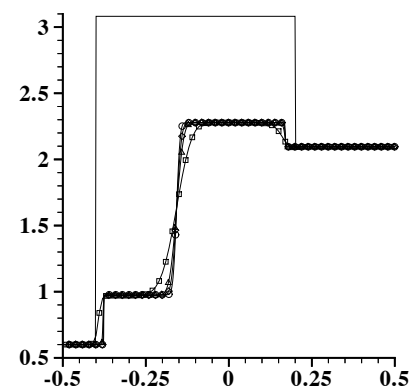
vitesse



pression 1



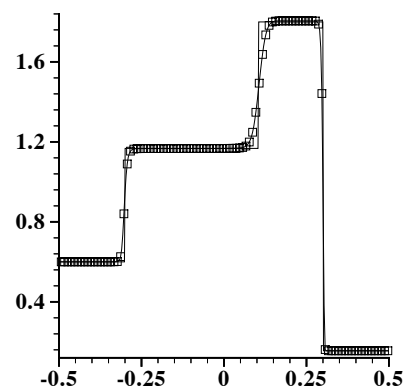
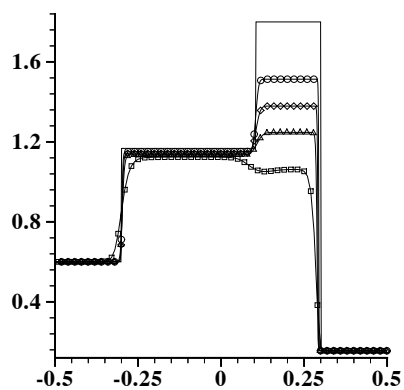
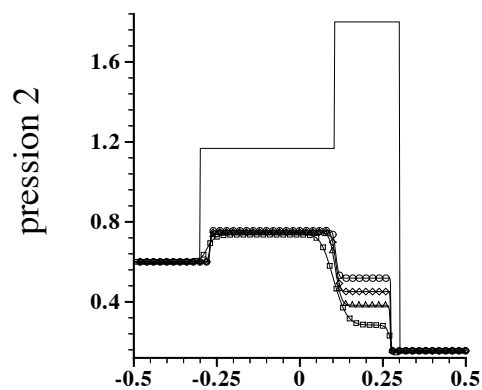
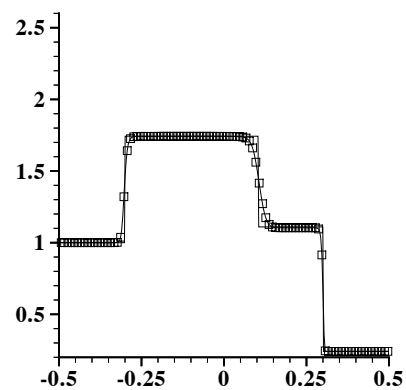
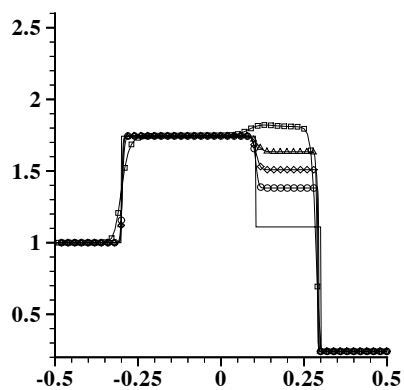
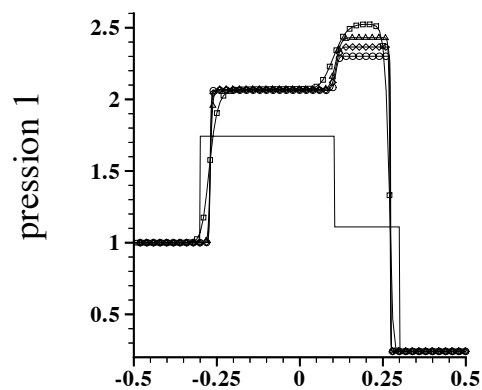
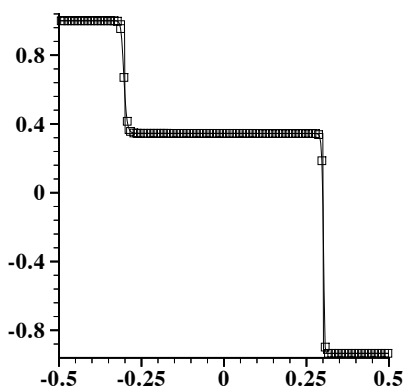
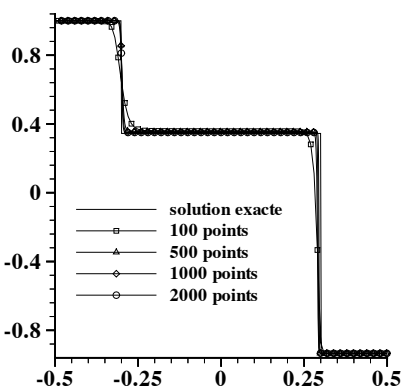
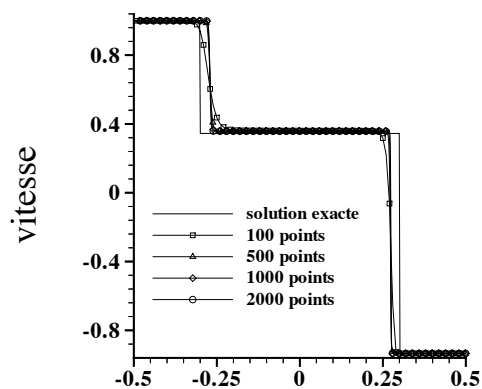
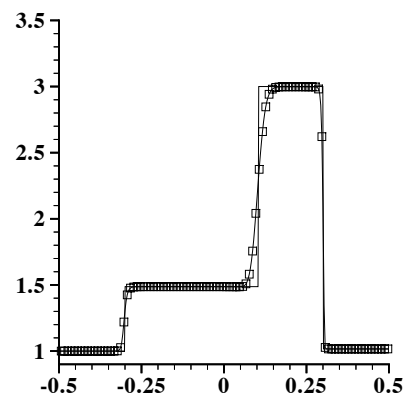
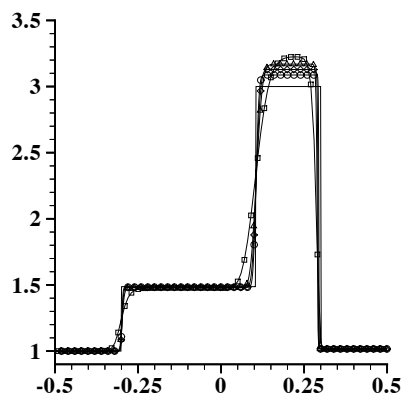
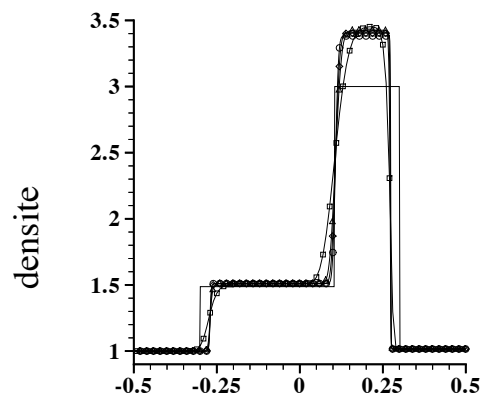
pression 2



Schema classique

Schema par projection L2

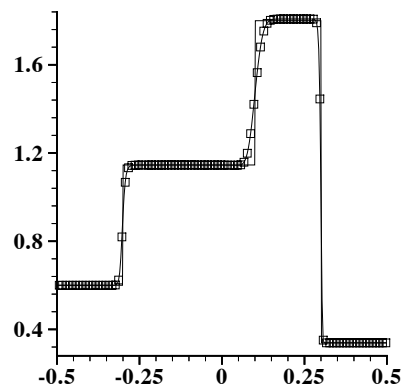
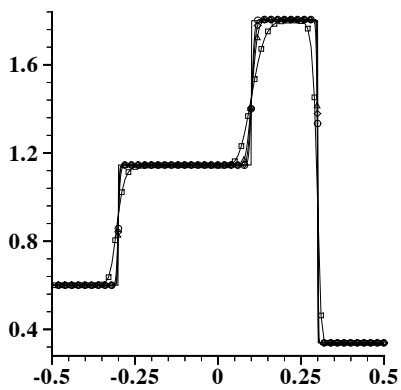
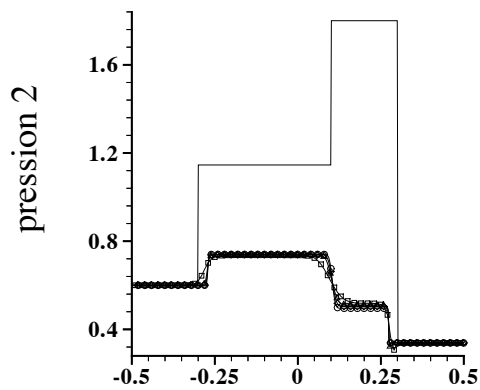
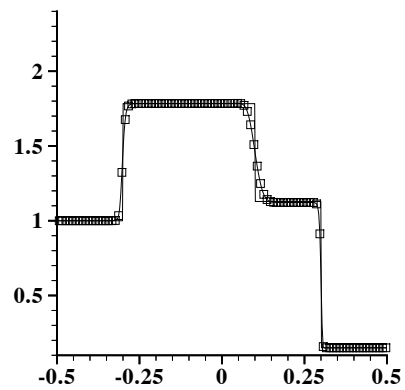
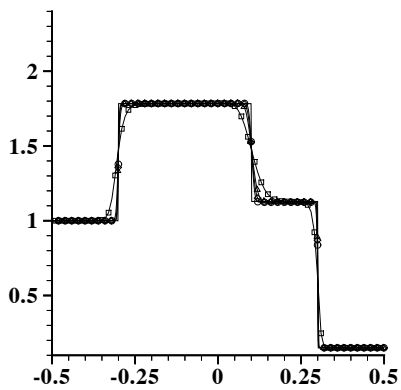
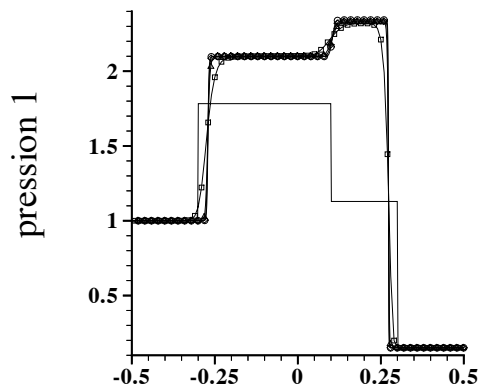
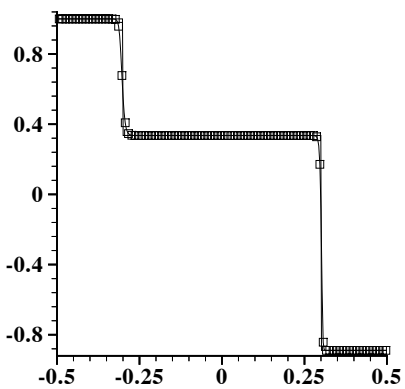
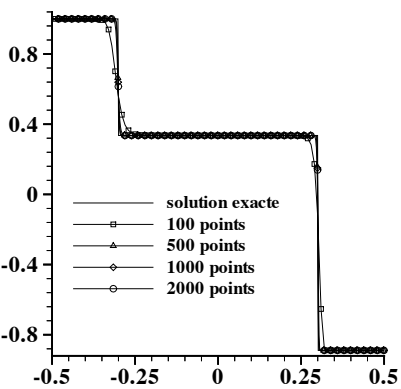
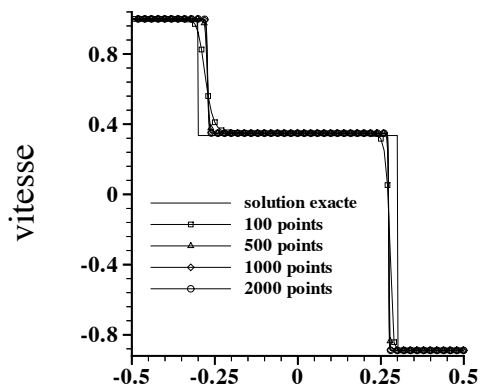
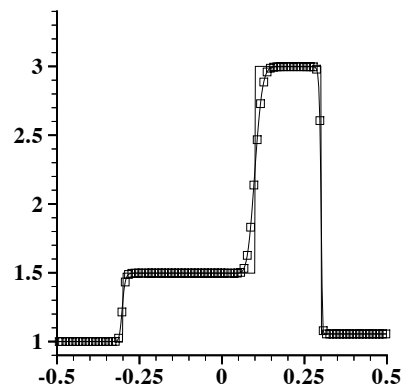
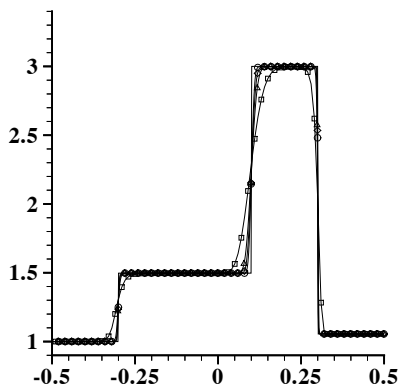
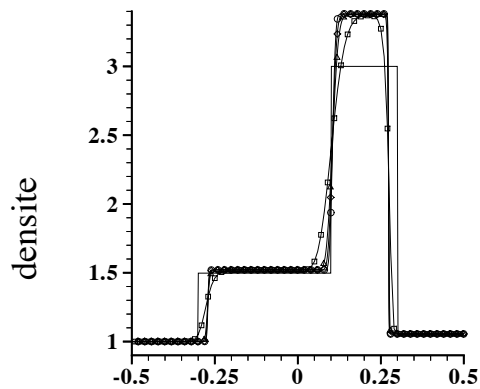
Schema par projection nonlineaire



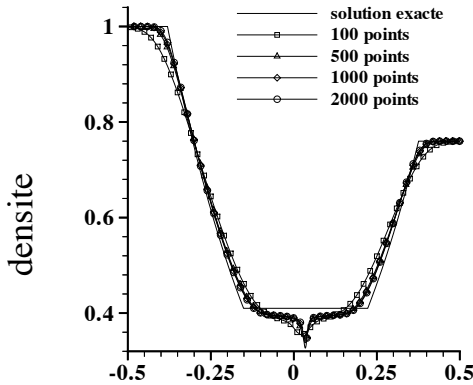
Schema classique

Schema par projection L2

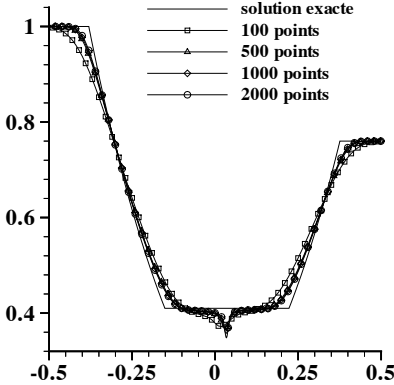
Schema par projection nonlineaire



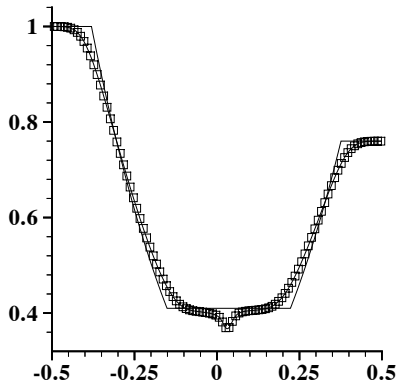
Schema classique



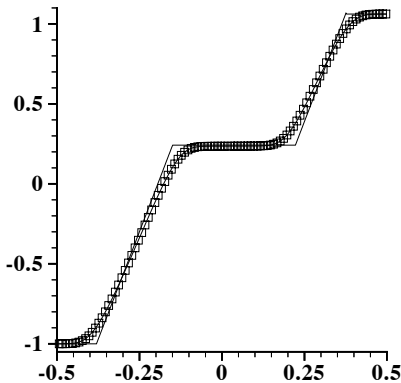
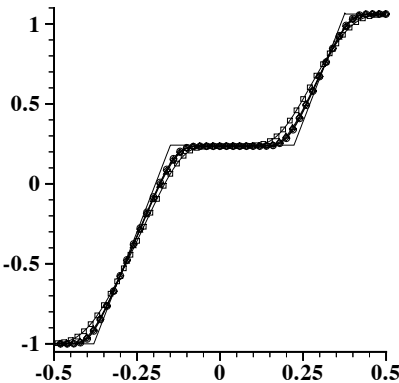
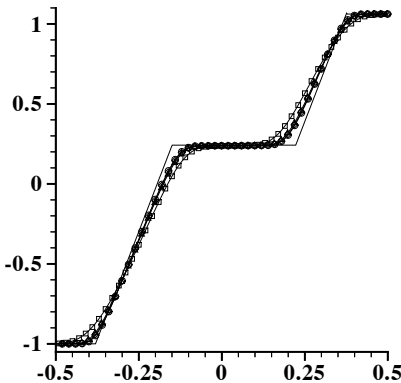
Schema par projection L2



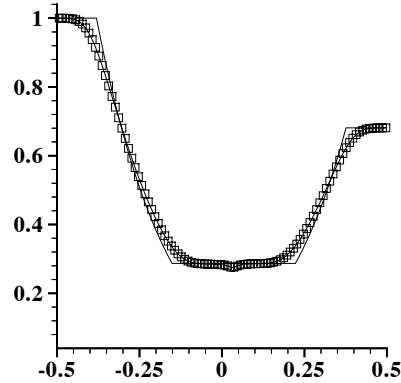
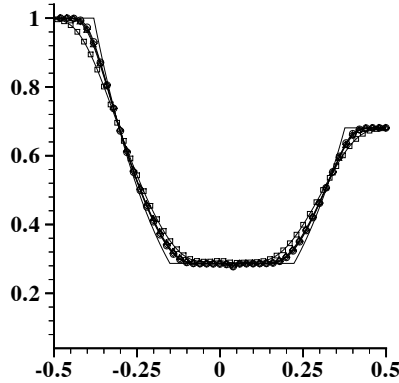
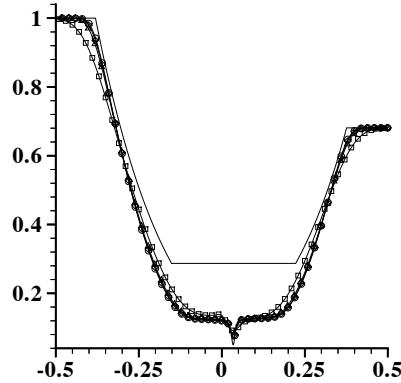
Schema par projection nonlineaire



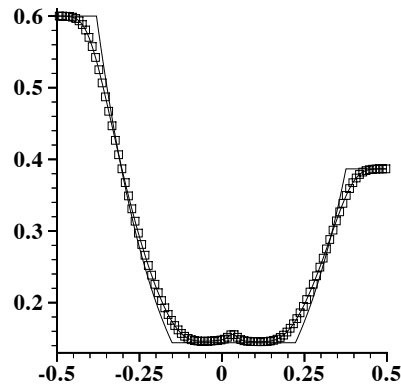
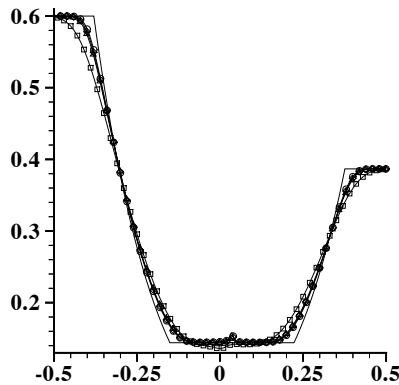
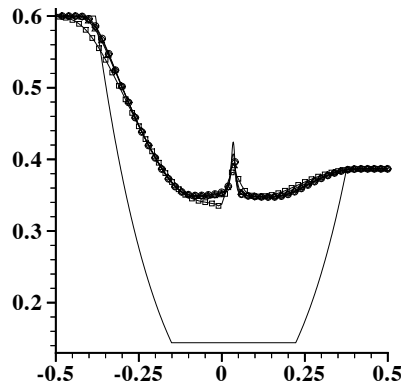
vitesse



pression 1



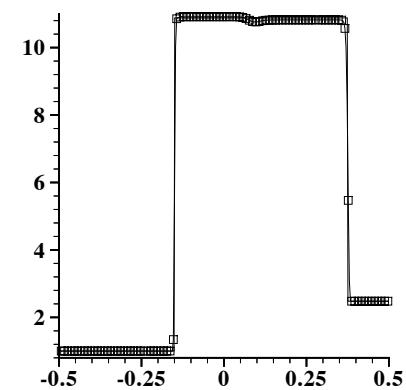
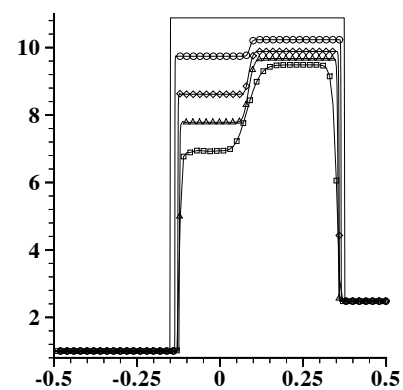
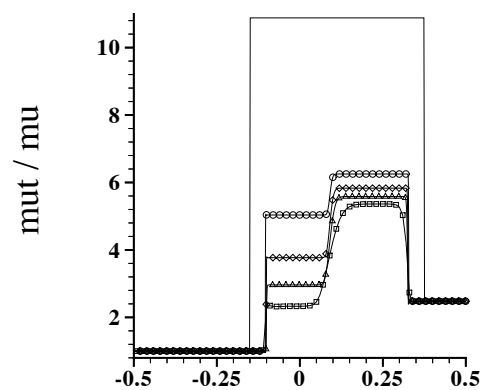
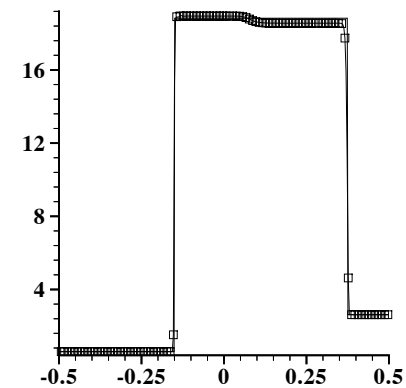
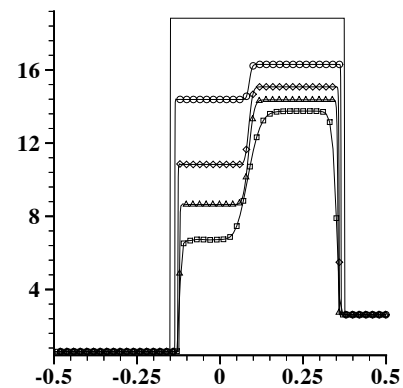
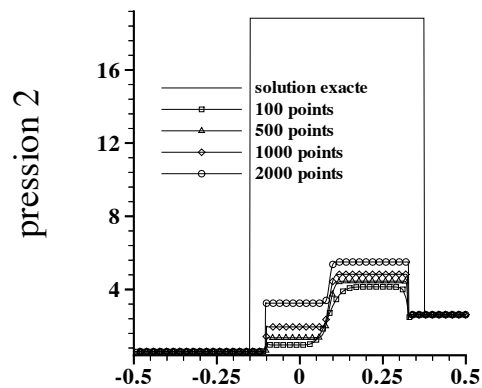
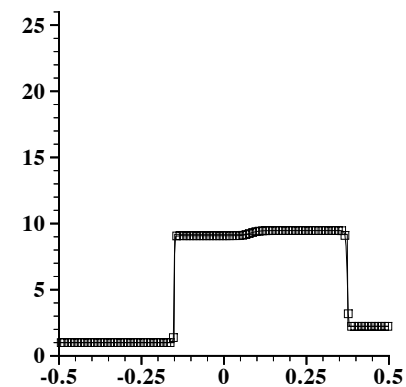
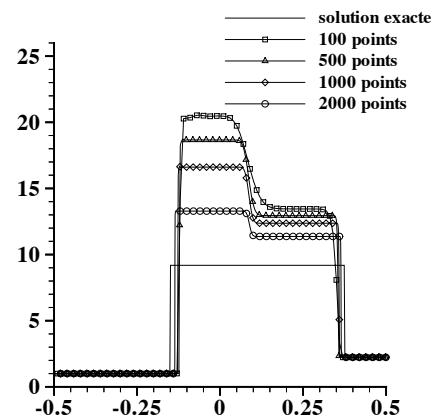
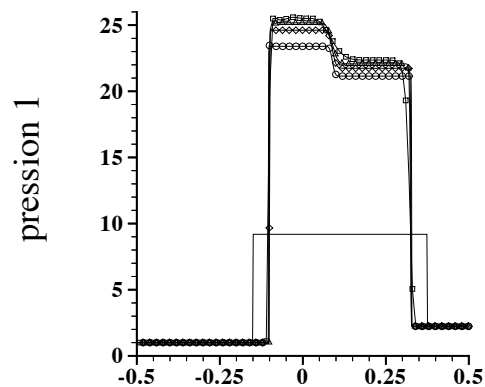
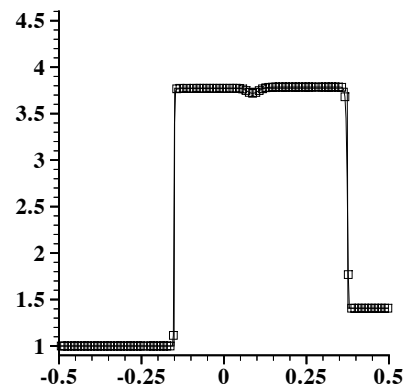
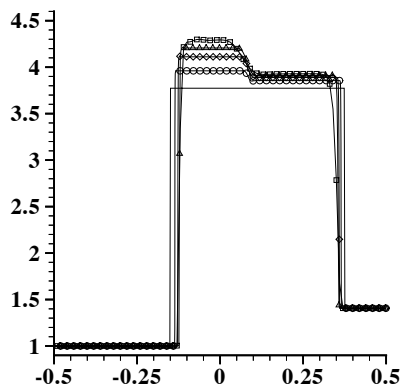
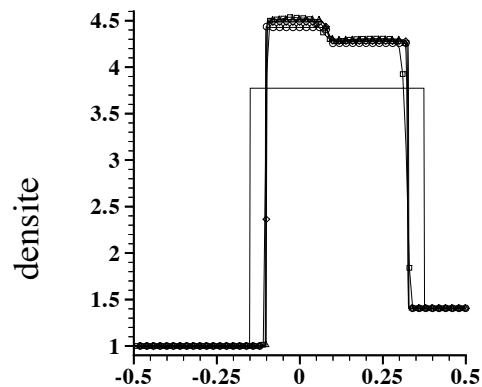
pression 2



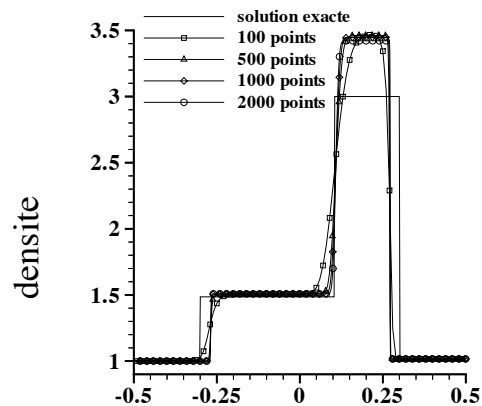
Schema classique

Schema par projection L2

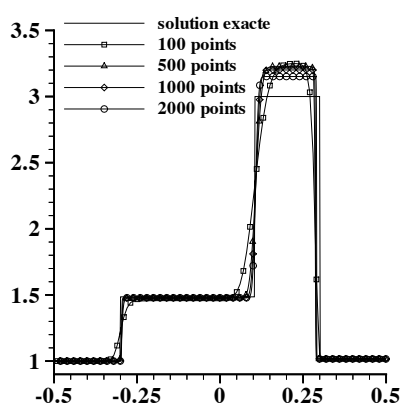
Schema par projection
nonlineaire



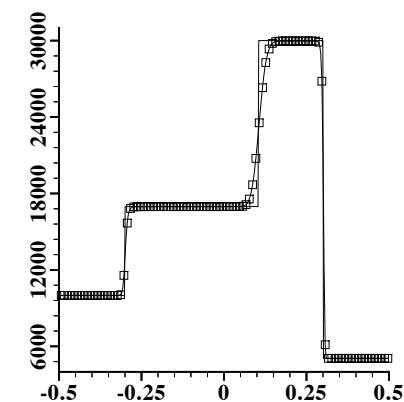
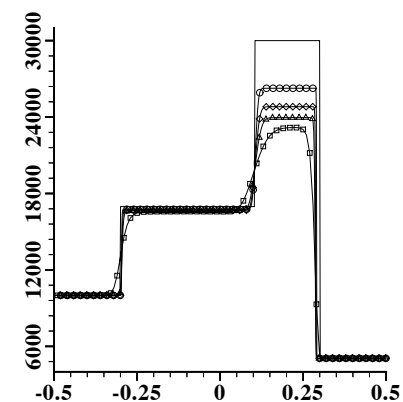
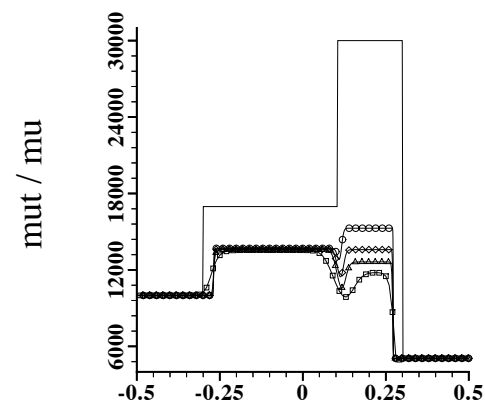
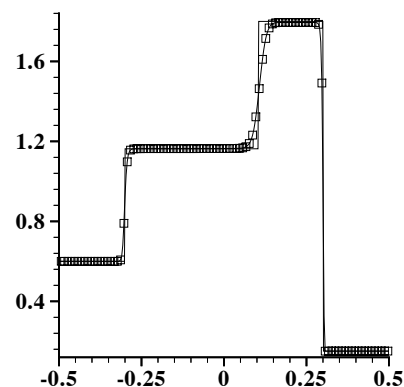
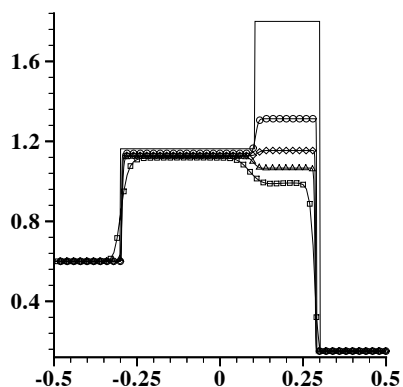
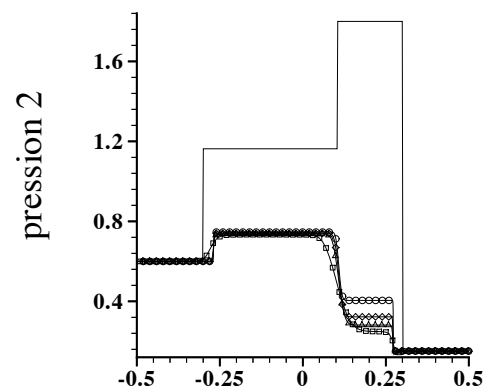
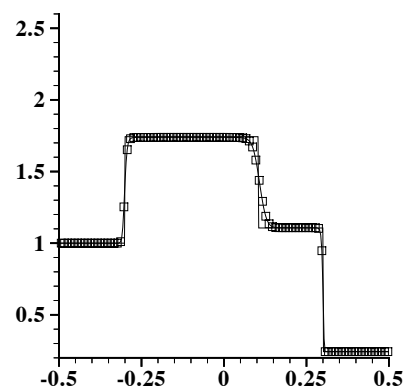
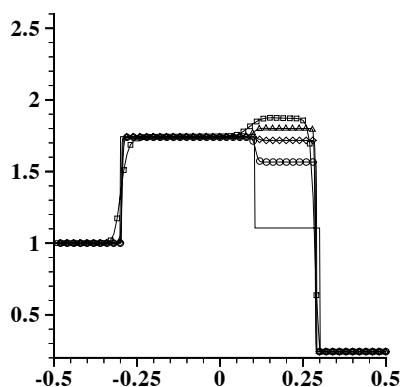
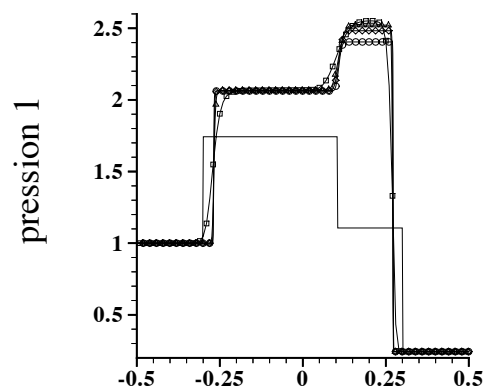
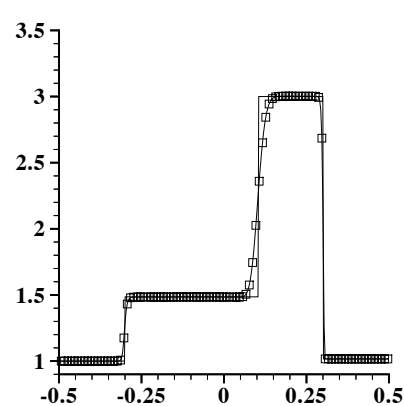
Schema classique



Schema par projection L2



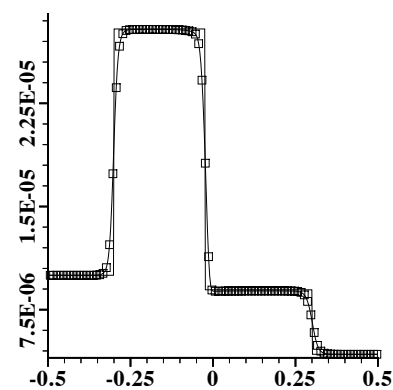
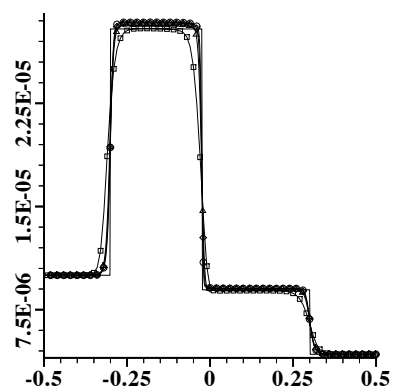
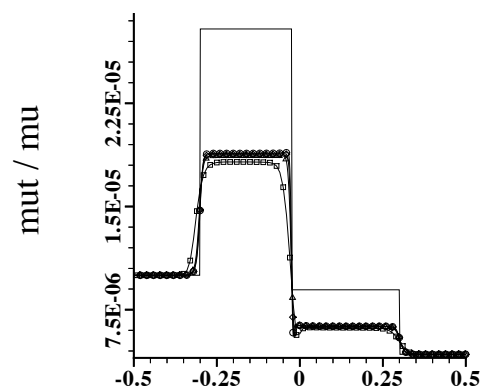
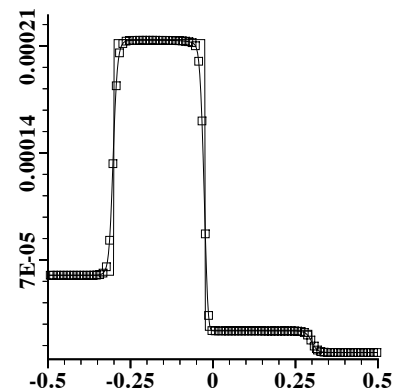
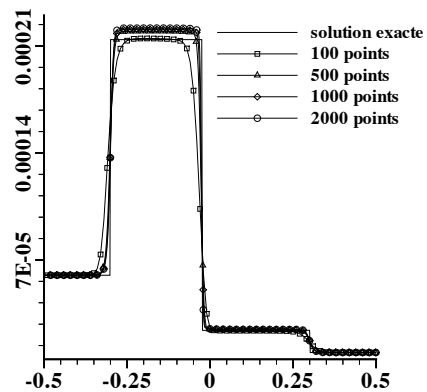
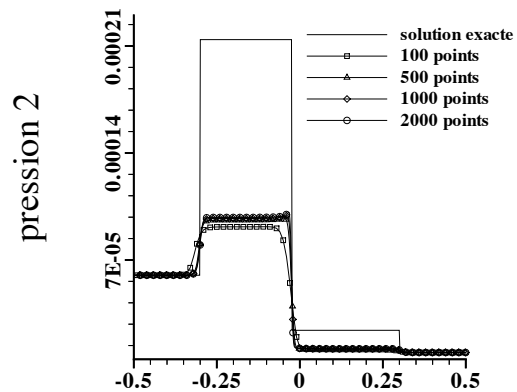
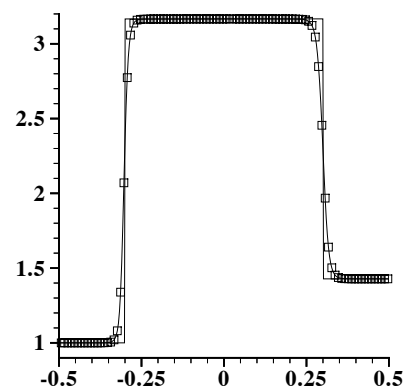
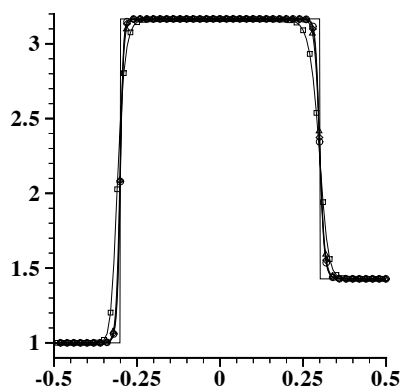
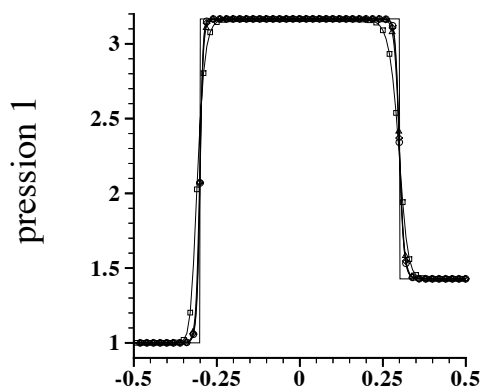
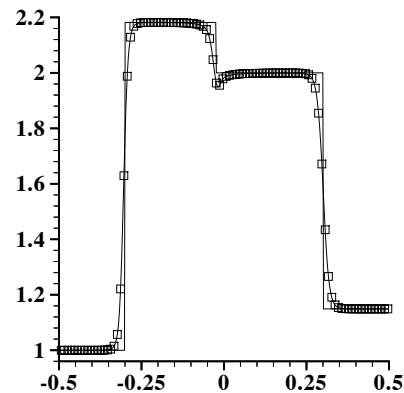
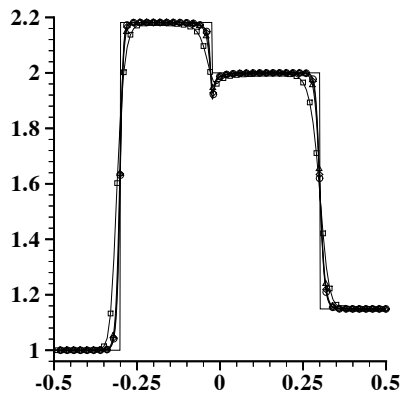
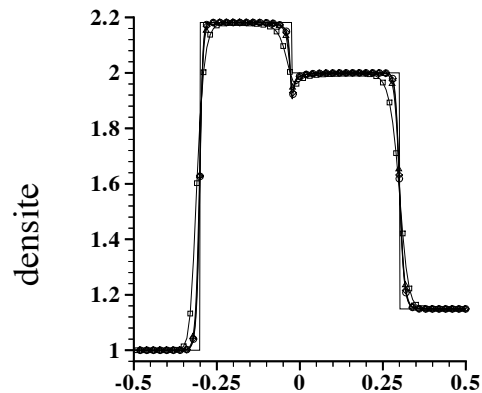
Schema par projection nonlineaire



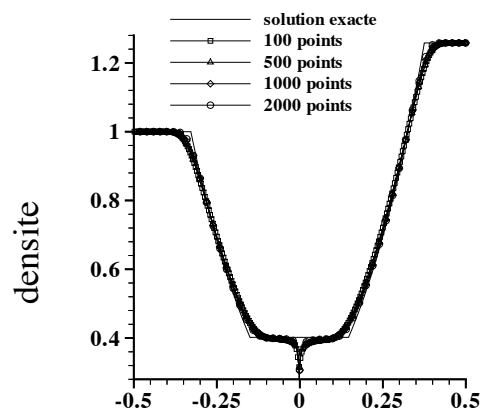
Schema classique

Schema par projection L2

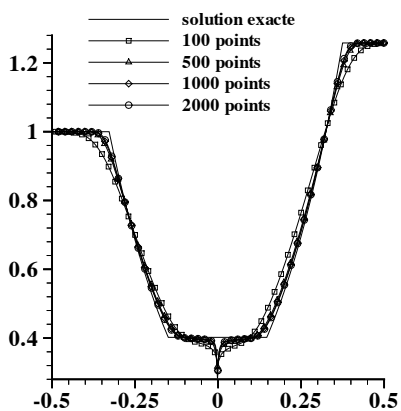
Schema par projection
nonlineaire



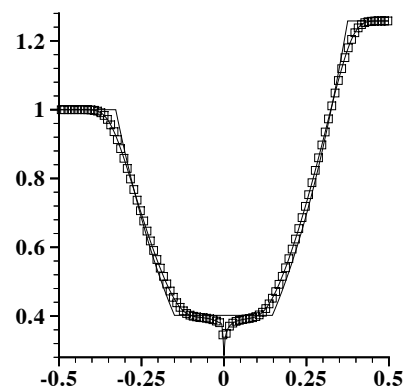
Schema classique



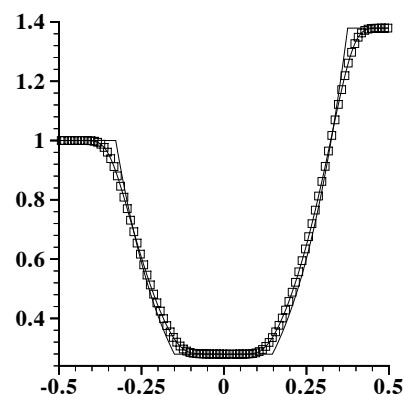
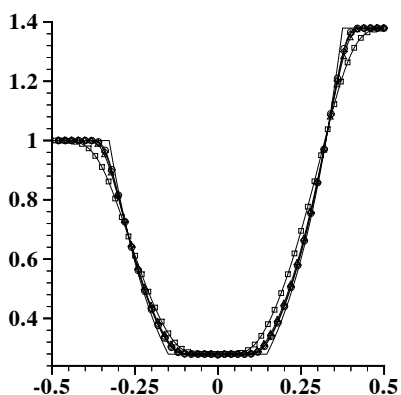
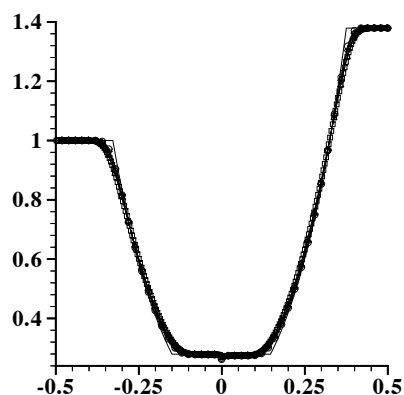
Schema par projection L2



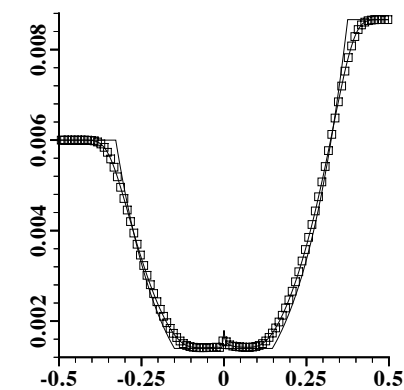
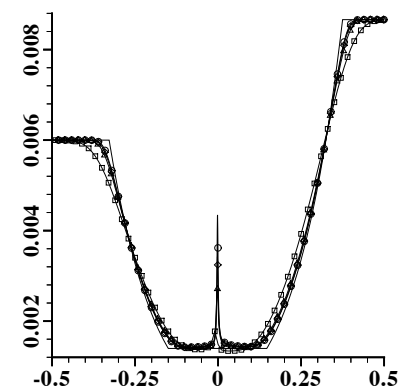
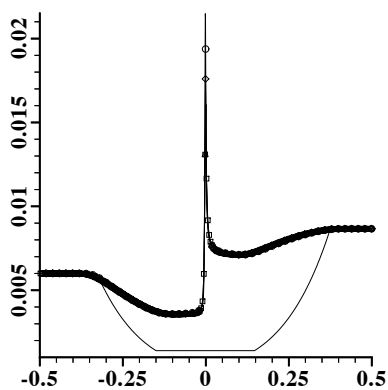
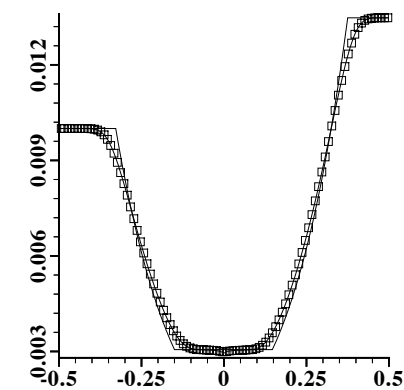
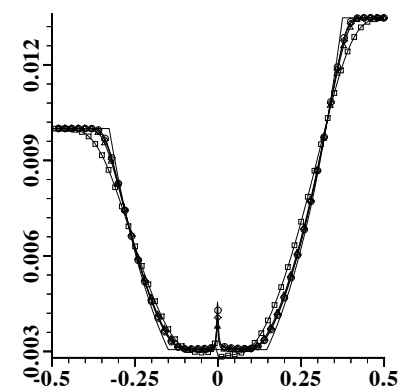
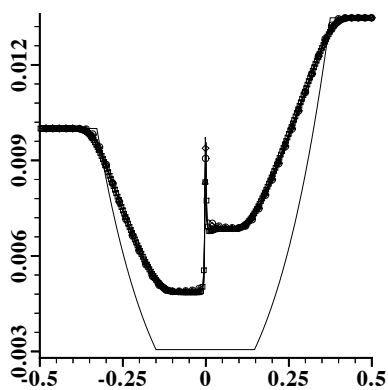
Schema par projection nonlineaire



pression 1



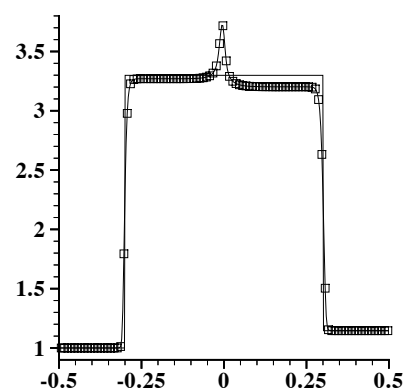
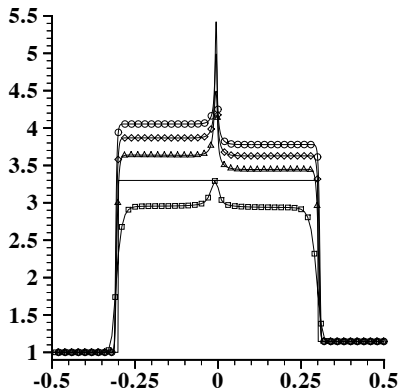
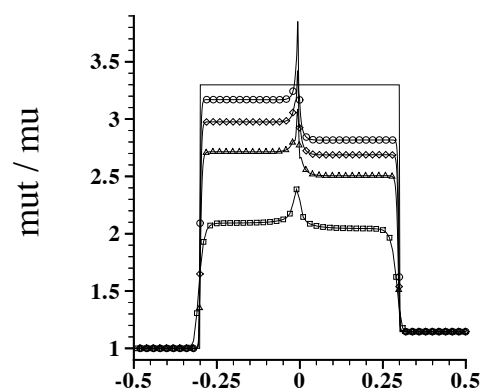
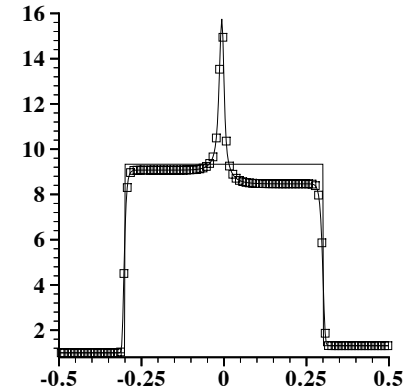
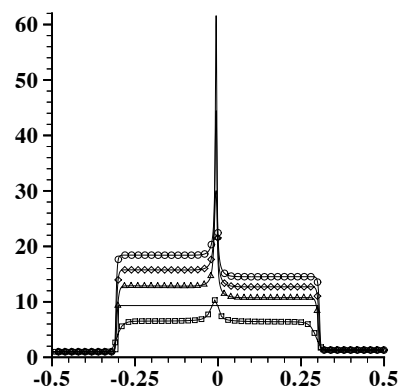
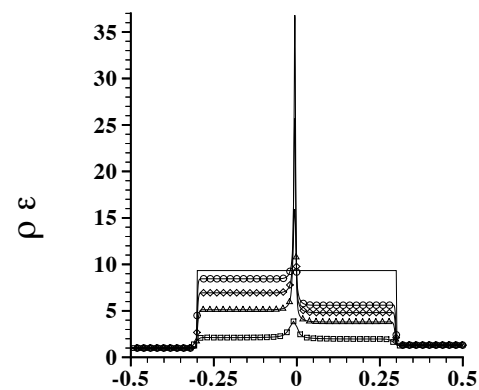
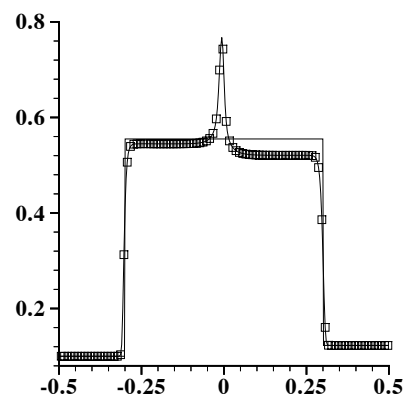
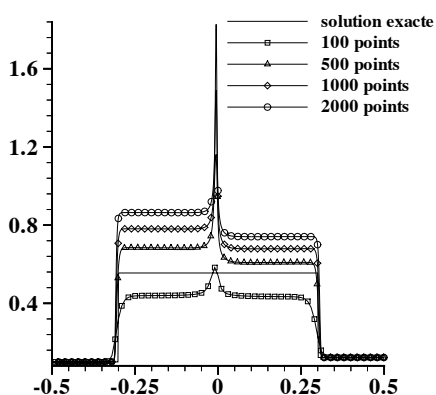
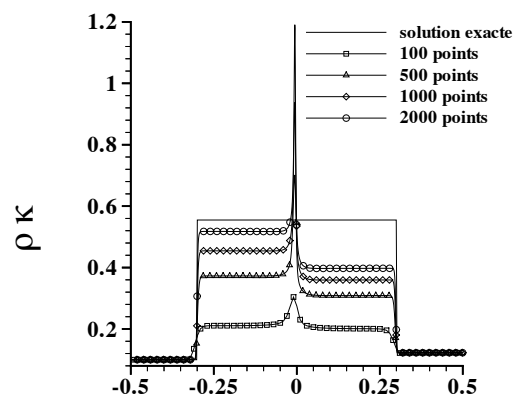
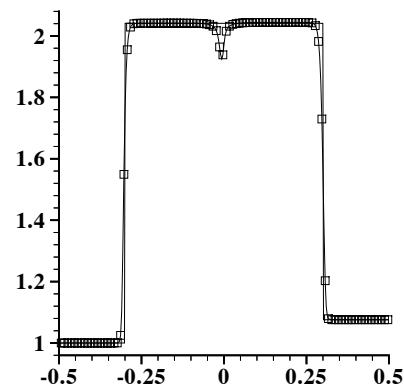
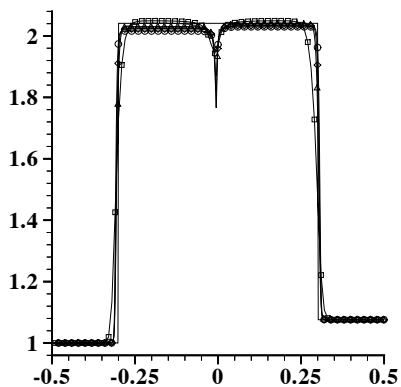
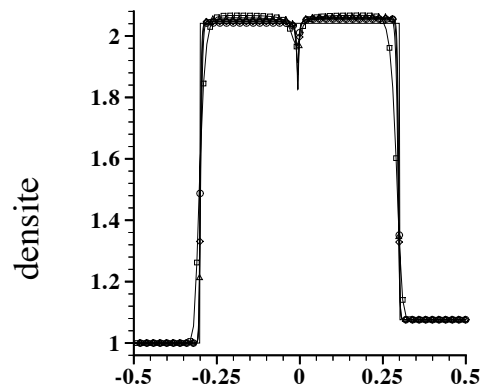
pression 2

 μ 

Schema classique

Schema par projection L2

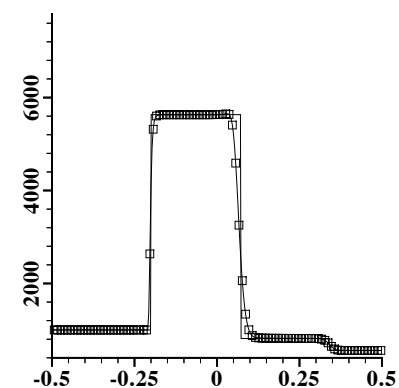
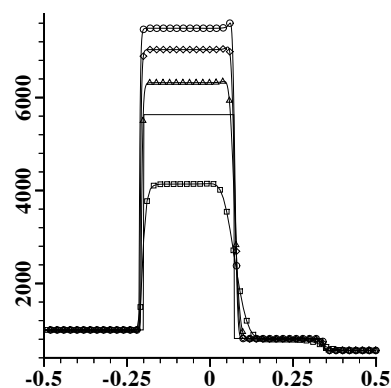
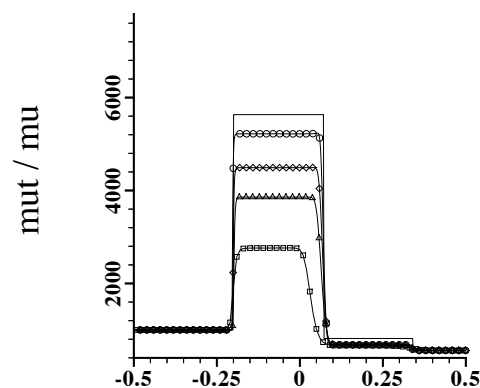
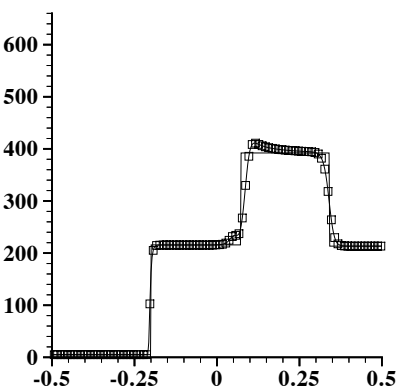
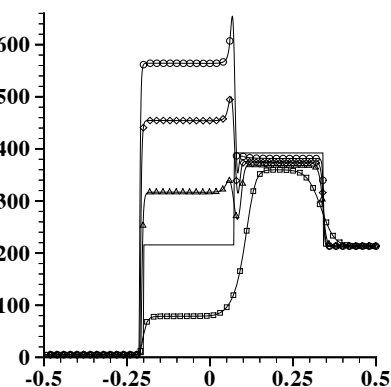
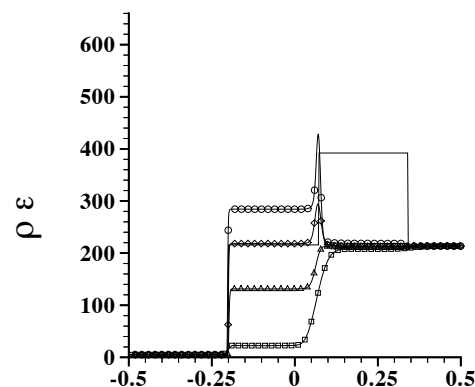
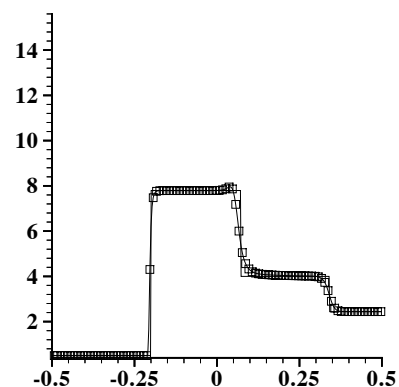
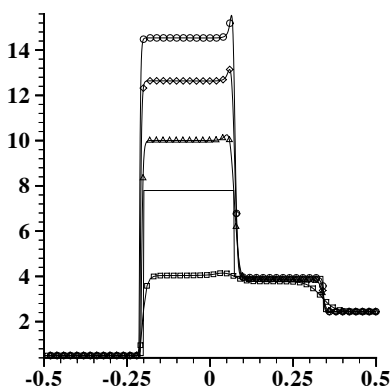
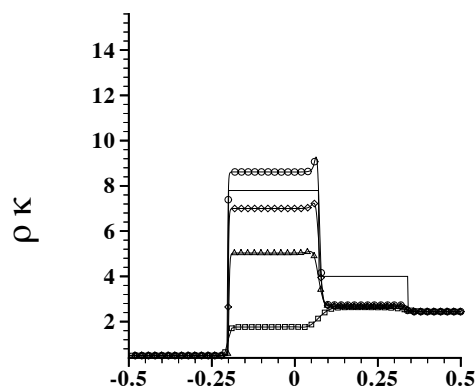
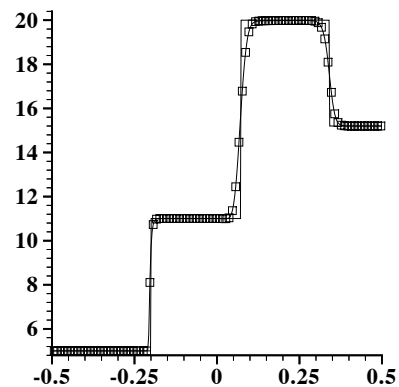
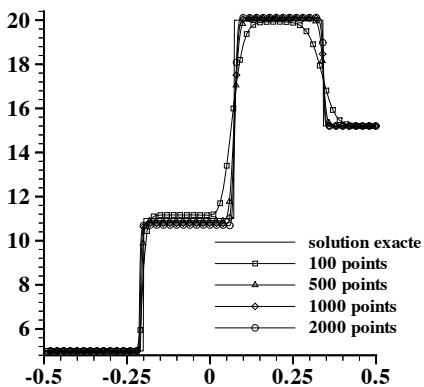
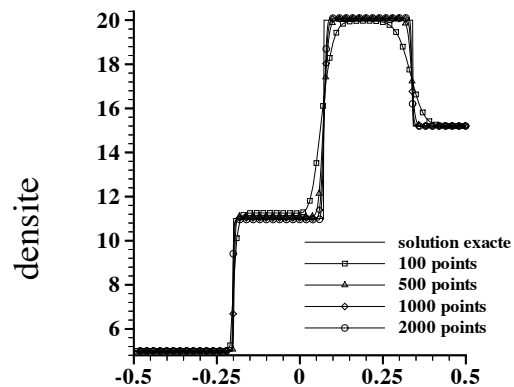
Schema par projection
nonlineaire



Schema classique

Schema par projection L2

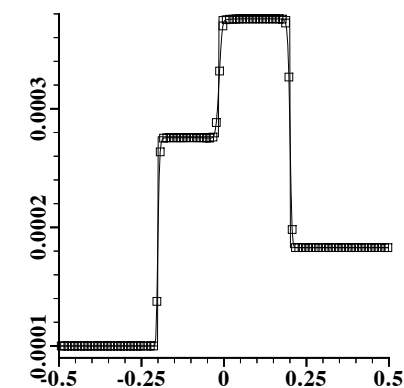
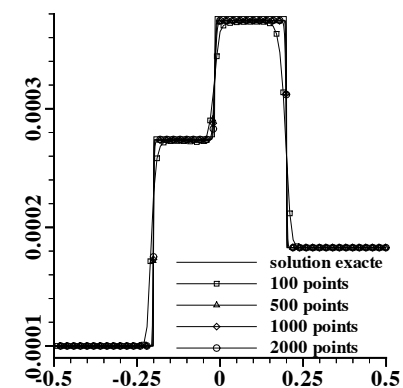
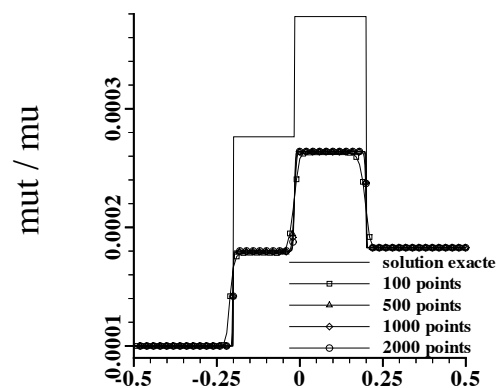
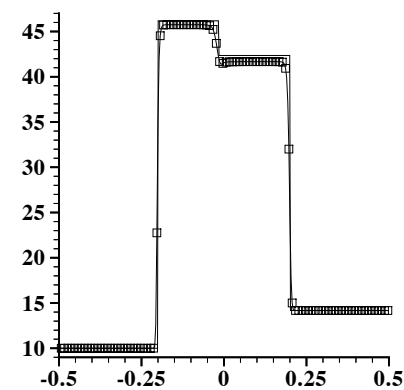
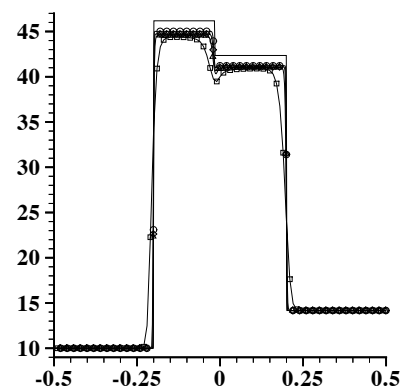
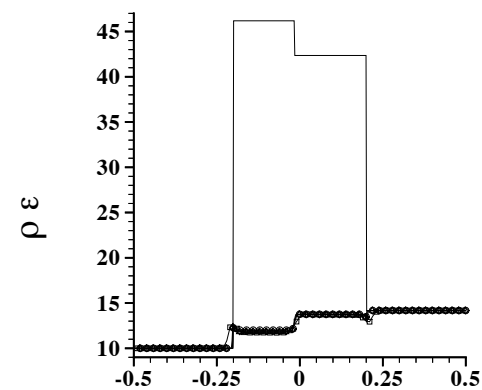
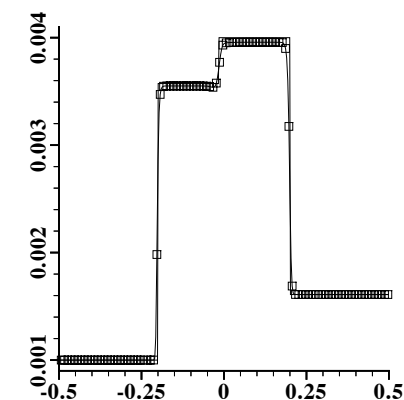
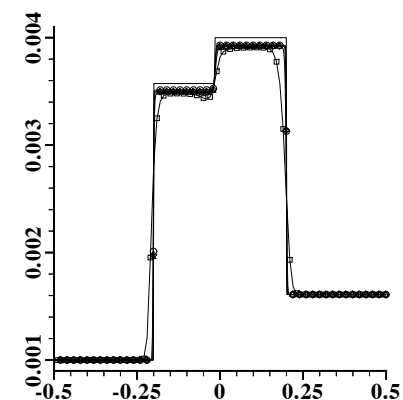
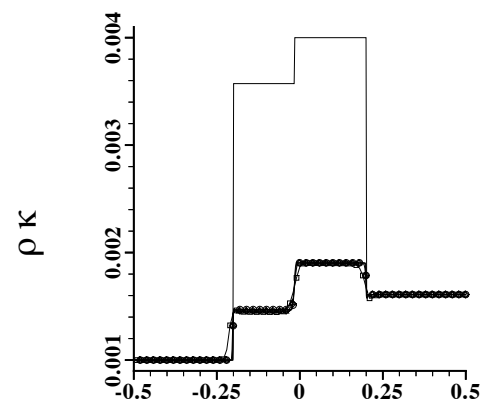
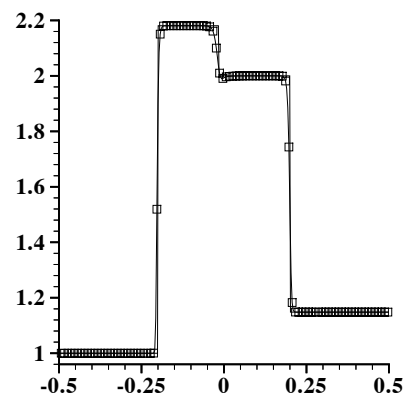
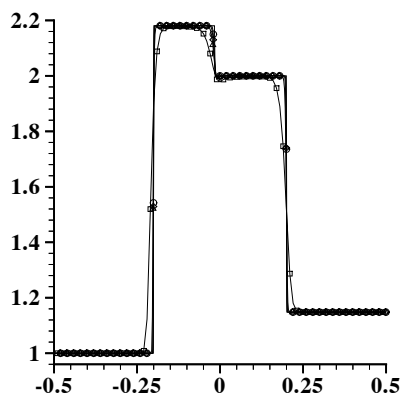
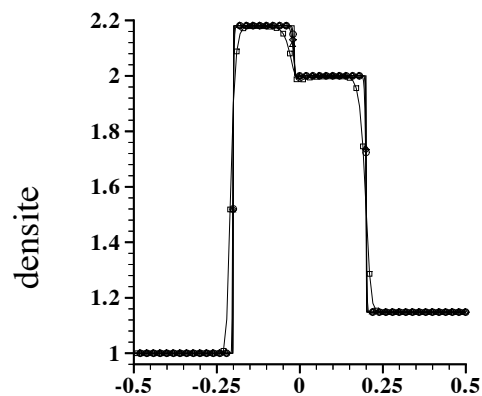
Schema par projection
nonlineaire



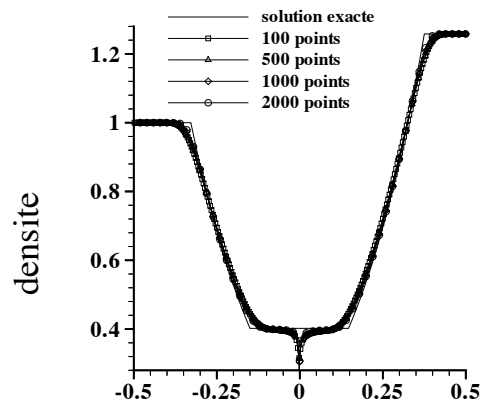
Schema classique

Schema par projection L2

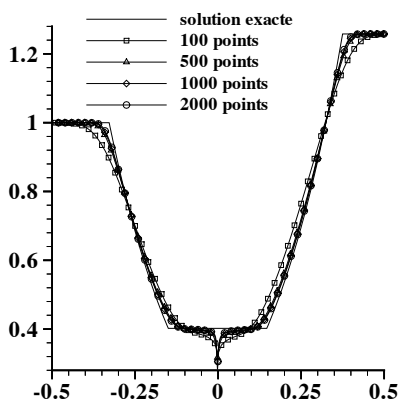
Schema par projection
nonlineaire



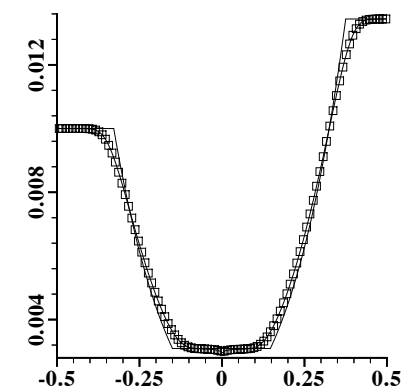
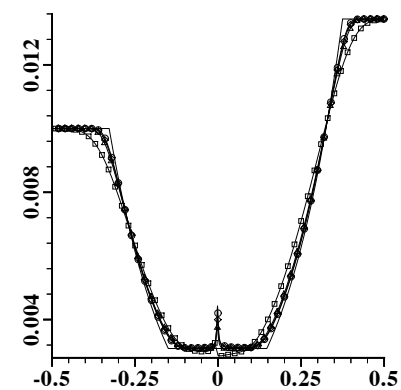
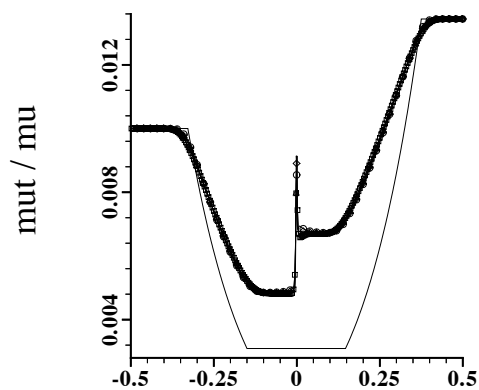
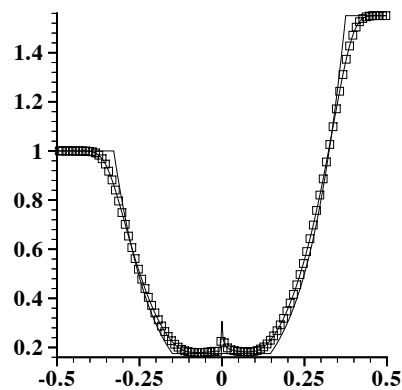
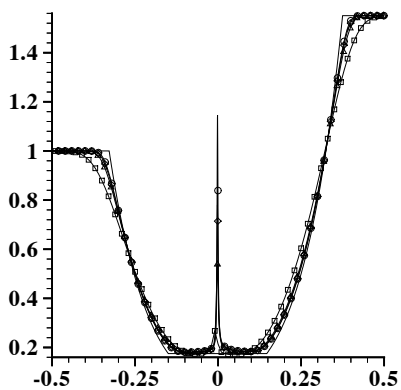
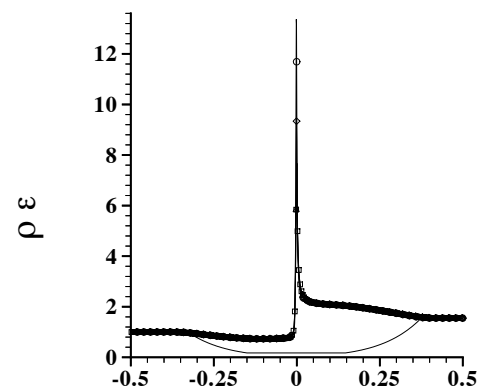
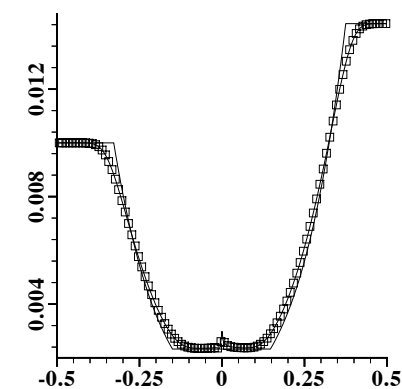
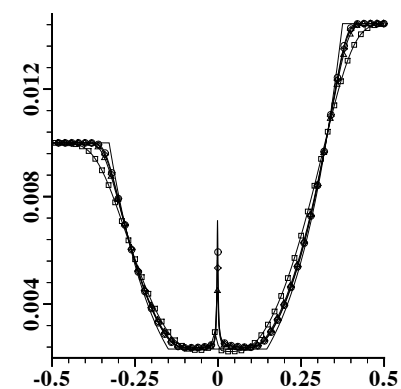
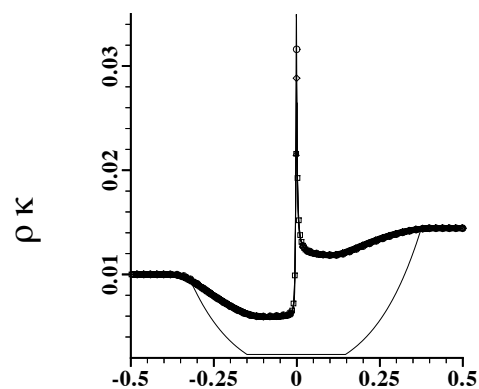
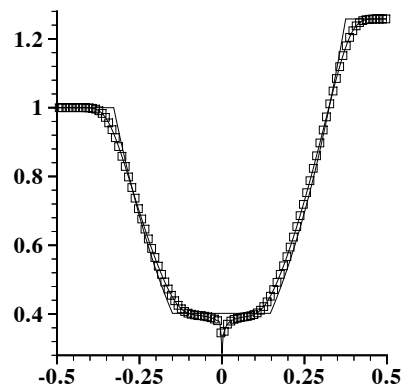
Schema classique



Schema par projection L2



Schema par projection nonlineaire

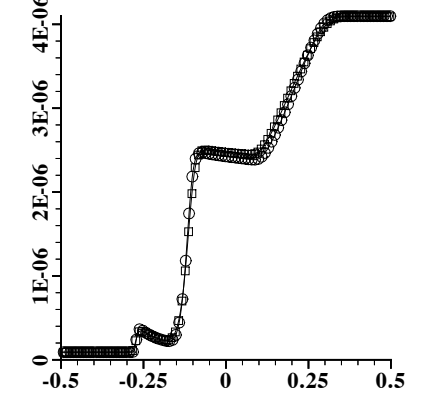
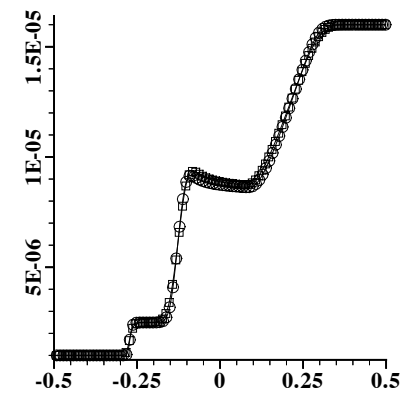
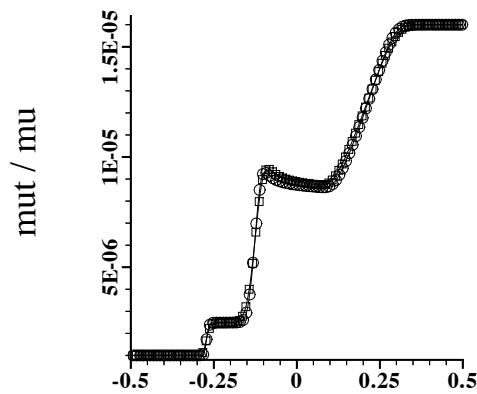
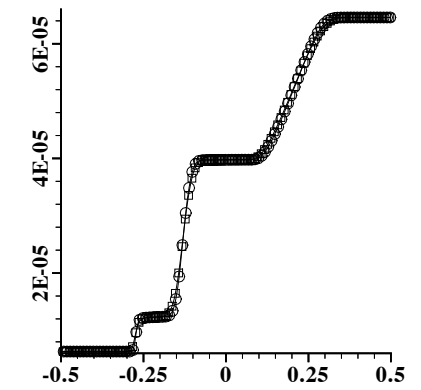
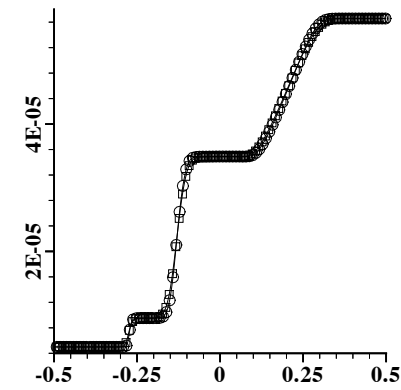
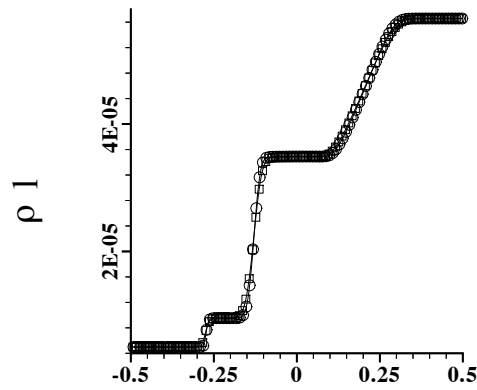
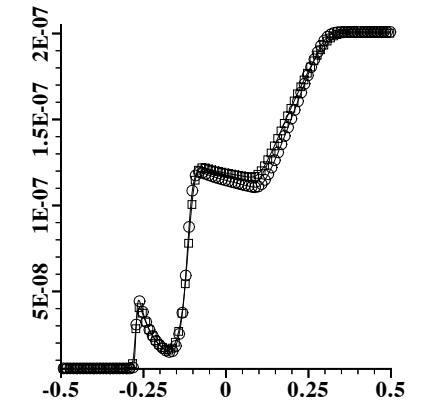
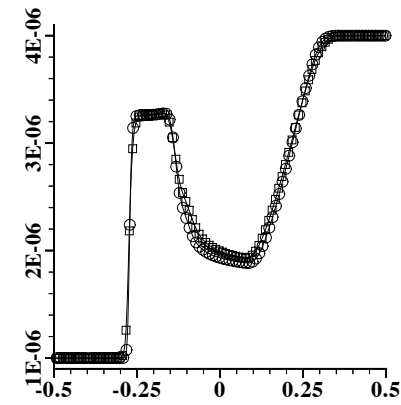
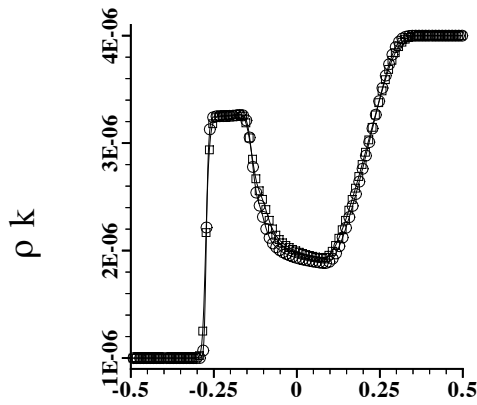
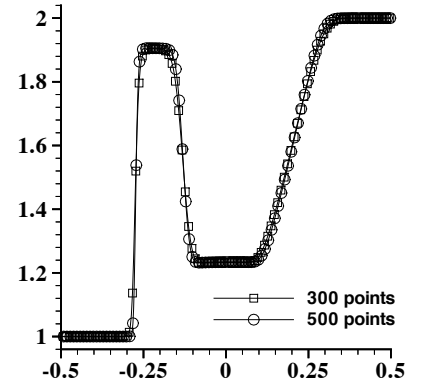
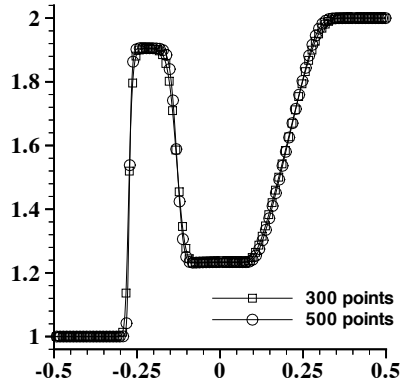
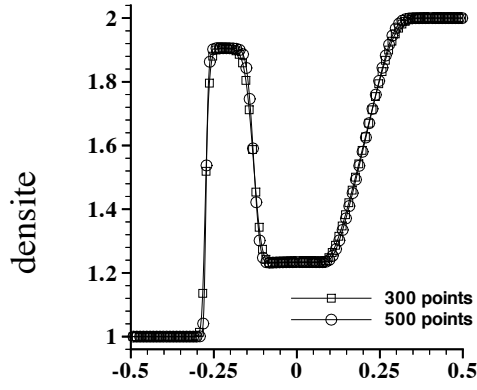


Schema par projection nonlineaire

Schema sans diffusion ni source

Schema sans source

Schema complet

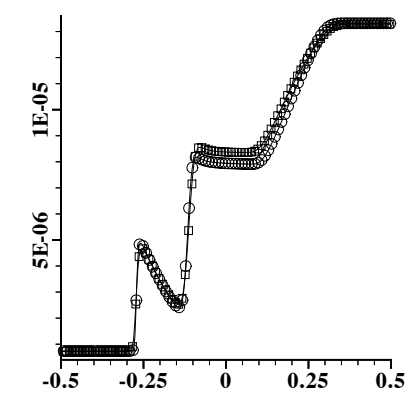
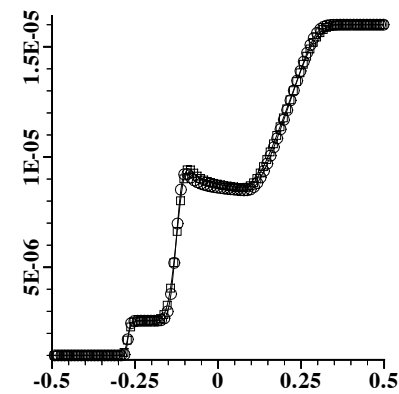
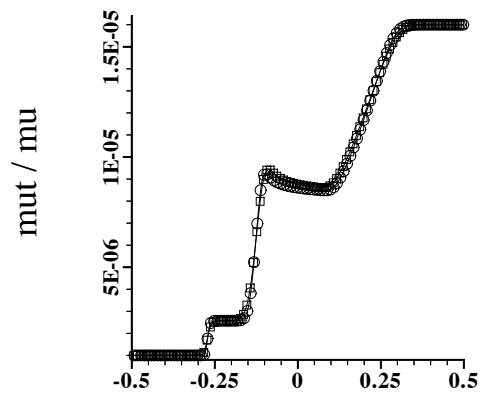
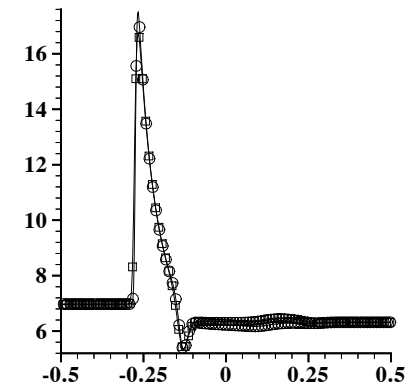
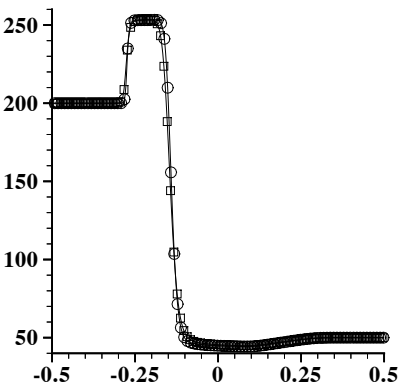
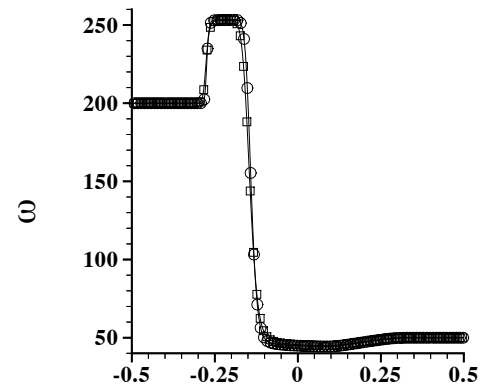
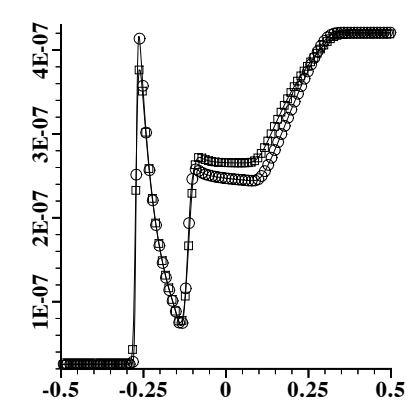
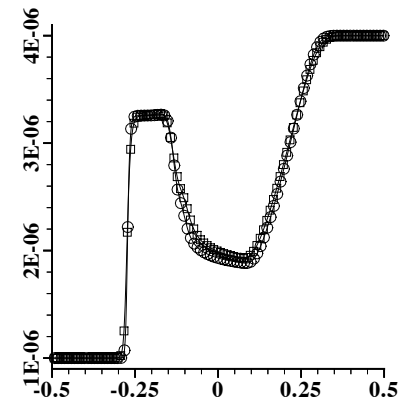
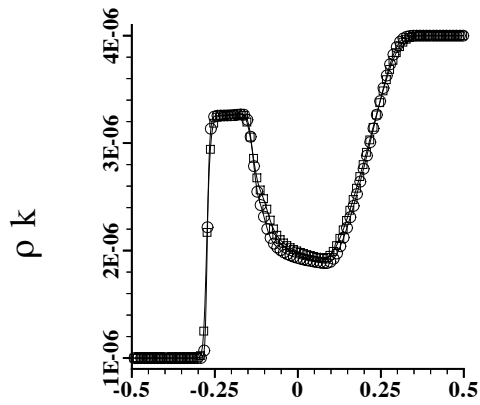
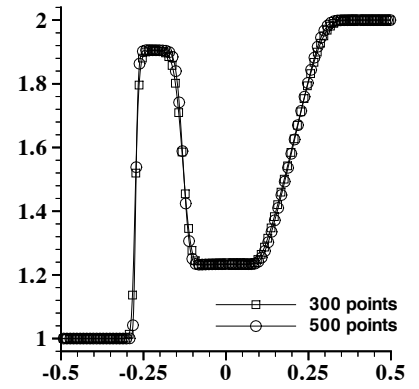
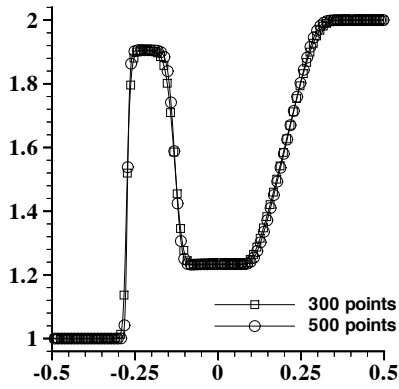
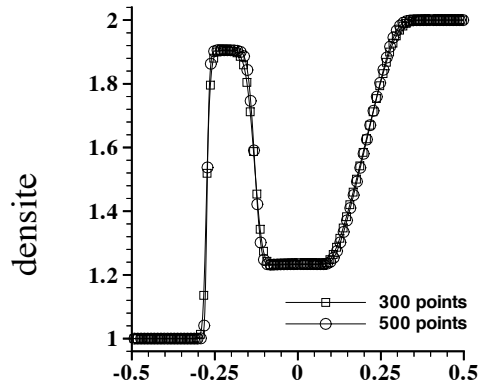


Schema par projection nonlineaire

Schema sans diffusion ni source

Schema sans source

Schema complet

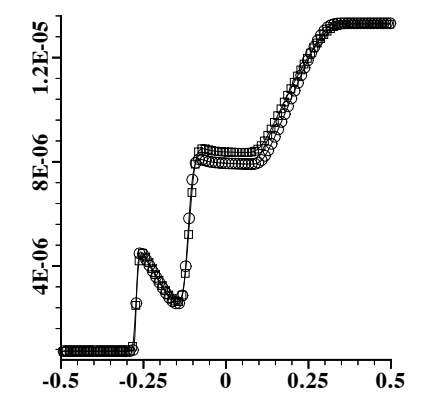
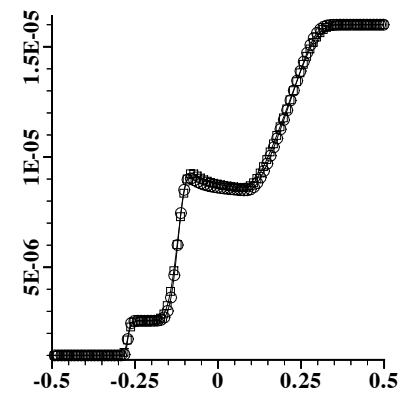
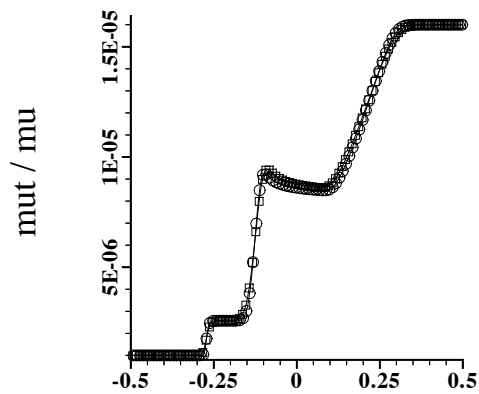
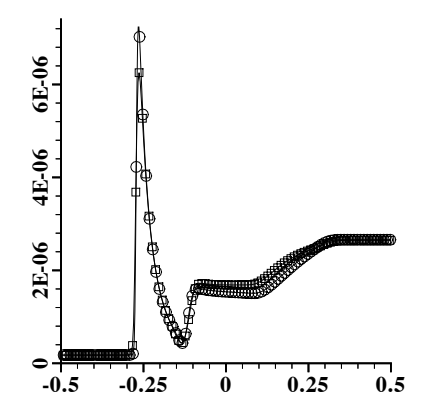
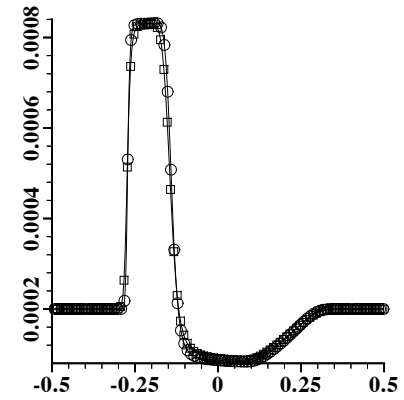
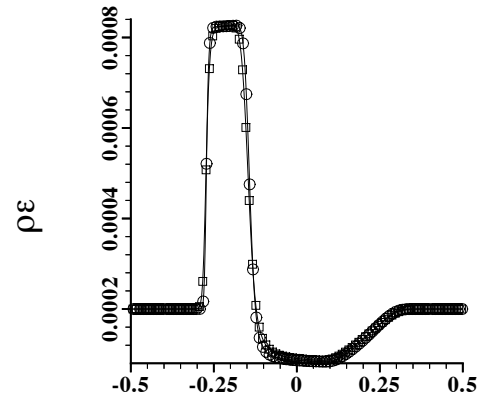
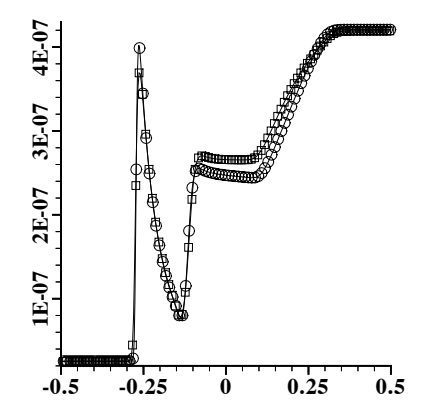
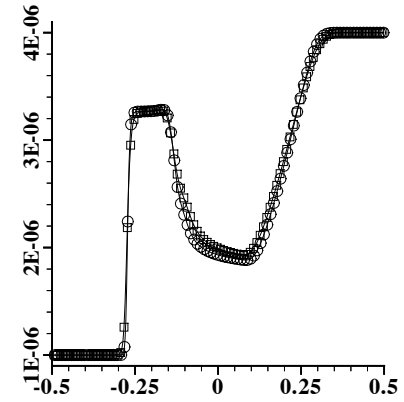
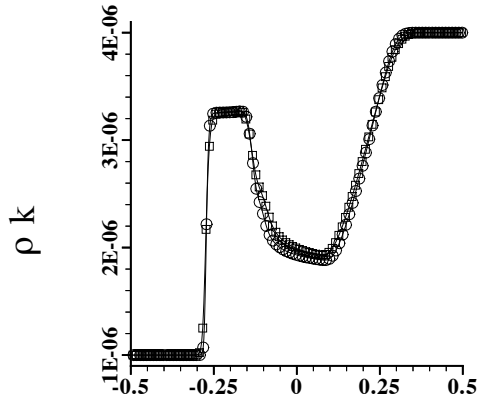
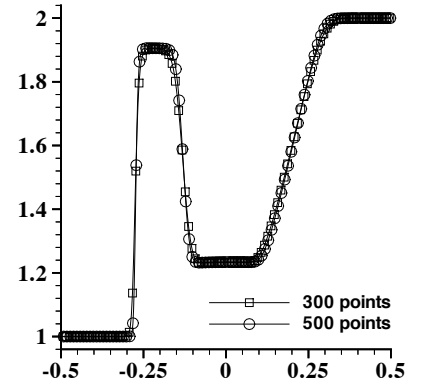
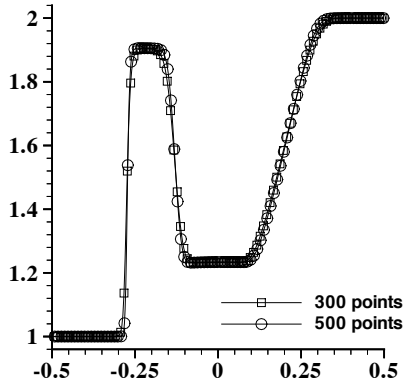
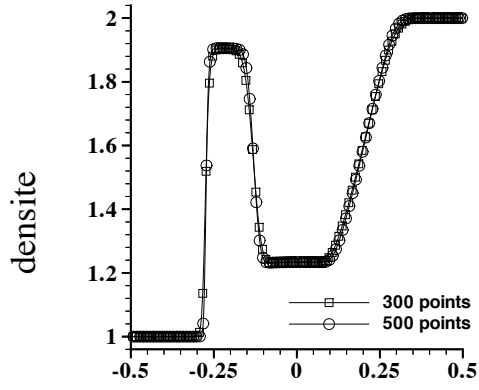


Schema par projection nonlineaire

Schema sans diffusion ni source

Schema sans source

Schema complet

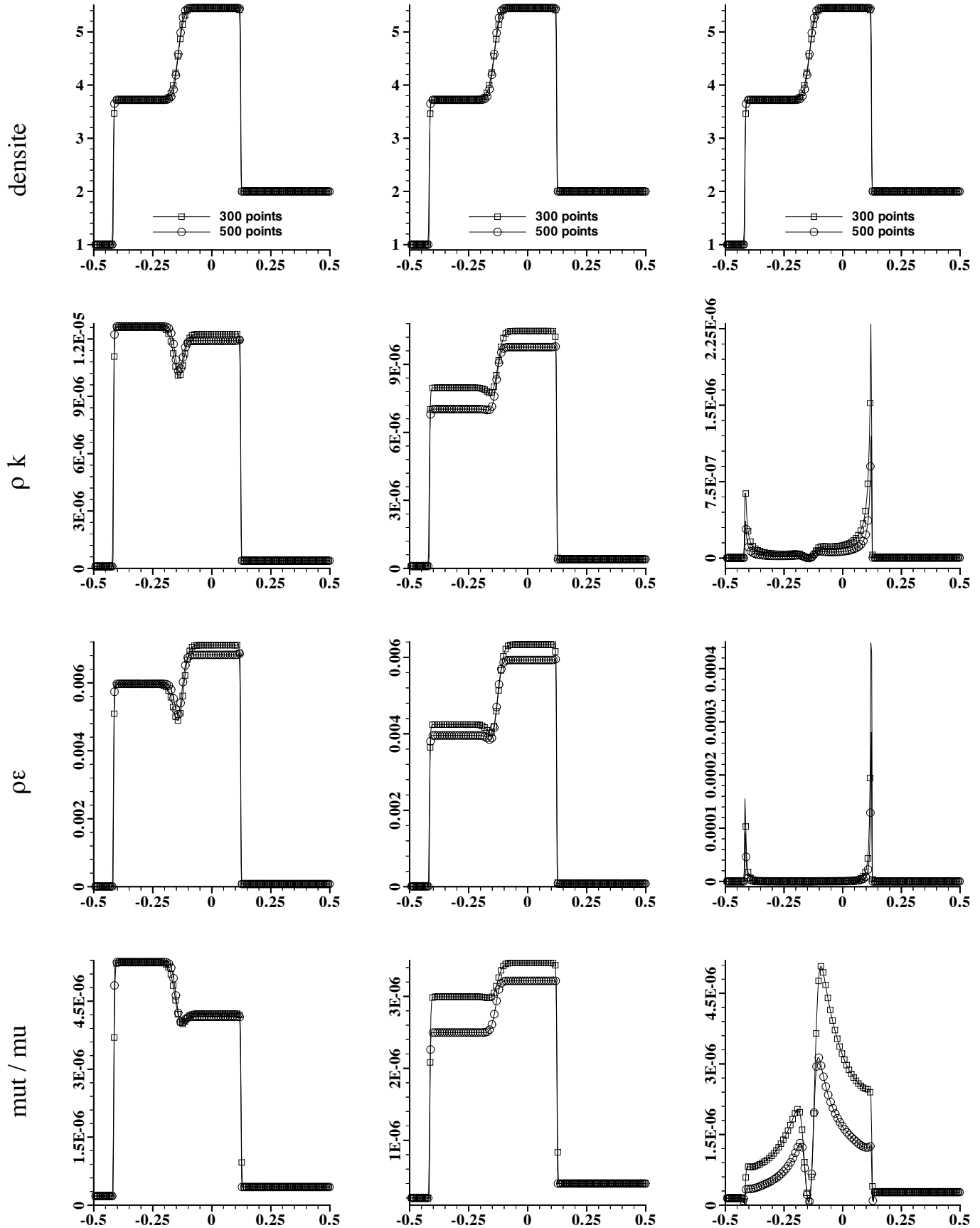


Schema par projection nonlineaire

Schema sans diffusion ni source

Schema sans source

Schema complet



Chapitre 5

Un modèle B.G.K. pour le modèle
 (k, ϵ) compressible et applications

Un modèle B.G.K. pour le modèle (k, ϵ) compressible et applications

Résumé

Ce travail est consacré à l'approximation numérique du système conservatif du premier ordre extrait du modèle (k, ϵ) compressible. Ce système régit l'écoulement turbulent de fluides compressibles. Nous montrons comment construire un formalisme cinétique abstrait pour ce modèle. Ce formalisme est obtenu en explicitant la transformée de Fenchel (ou polaire) des couples d'entropies de Lax associés au système. De manière surprenante, le système initial n'admet pas de couple d'entropies "simple", dans un sens à préciser, qui satisfasse les conditions de Lax. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons une grande famille de changements de variable permettant d'une part de préserver les solutions faibles du système initial et d'autre part d'assurer la stricte convexité des couples d'entropies. Sur la base de ces changements de variable, nous montrons que plusieurs formalismes cinétiques peuvent être construits. L'un d'entre eux est privilégié et est appliqué à l'extension, pour le système ici considéré, des méthodes numériques proposées par B. Perthame ([1], [2]) pour l'approximation des solutions des équations d'Euler.

1 Introduction

Ce travail est dédié à des extensions de méthodes numériques classiquement développées dans le cadre des équations d'Euler. En particulier, nous nous intéressons ici aux extensions possibles des schémas cinétiques (Perthame [1], Godlewski-Raviart [15], Harten-Lax-Van Leer [8]).

De telles méthodes, pour les équations d'Euler, reposent sur l'équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v \nabla f = Q(f, f), \quad (1.1)$$

régiissant les fonctions de répartition des vitesses des particules (Khobalatte [4], Cercignani [16]). Il est connu ([1], [15]) que cette équation conduit au système de la dynamique des gaz d'Euler lorsque le nombre de particules tend vers l'infini pour un fluide à l'équilibre thermodynamique. Puisque la propriété d'équilibre thermodynamique implique

$$Q(f, f) = 0,$$

il en résulte, formellement, une interprétation cinétique abstraite négligeant ce terme de collision et conduisant à l'équation de transport libre suivante :

$$\partial_t f + v \nabla f = 0. \quad (1.2)$$

La prise en compte d'une telle équation de transport libre permet le développement de méthodes numériques conservatives et stables pour les équations d'Euler (Perthame [2], Khobalatte-Perthame [3], Khobalatte [4]).

Si l'interprétation cinétique abstraite (1.2) trouve une justification formelle au sens de l'équation de Boltzmann, elle est en fait motivée par l'existence d'une symétrisation des équations d'Euler. En effet, cette symétrisation, dont l'existence est assurée par le Théorème de Godunov Mock, peut trouver une formulation intégrale conduisant à l'interprétation cinétique (1.2) (cf. Croisille [6]).

Cependant, il n'existe pas *a priori* d'équation de Boltzmann dont la limite fluide coïncide avec le système de lois de conservation considéré dans le présent travail. En conséquence, le formalisme abstrait (1.2) est ici inconnu.

Le principe de symétrisation est adopté pour l'obtention du formalisme (1.2). En vertu du Théorème de Godunov Mock, la seule existence d'une entropie de Lax assure l'existence d'une formulation symétrique. Cependant, le formalisme cinétique, ici recherché, ne peut en être déduit que si le système symétrique est explicitement connu. Après avoir constaté que la dépendance fonctionnelle des couples d'entropies de Lax doit être, en général, simple pour pouvoir conduire à une formulation explicite du système symétrique, nous montrons que les entropies naturelles et fonctionnellement simples ne satisfont pas les critères de stricte convexité. Nous proposons alors des changements de variable admissibles pour les solutions faibles. Ceux-ci permettent d'exhiber des couples d'entropies de Lax dont la dépendance fonctionnelle est simple et conduisant à une symétrisation explicite puis à un formalisme cinétique analogue à (1.2).

Nous montrons que chacun des systèmes équivalents mène à un formalisme cinétique différent. Après avoir privilégié une des interprétations cinétiques, nous étendons les méthodes numériques proposées par B. Perthame ([1] et [2]) au système de lois de conservation qui motive notre propos.

2 Formalisme cinétique abstrait

Les principes généraux du formalisme cinétique pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation ainsi que ses applications sont brièvement décrits. Ici, nous adoptons le formalisme proposé par Croisille [6], Villedieu [5], Perthame [1] (voir également Chen-LeFloch [17] pour un formalisme de décomposition de flux plus général). Si un tel formalisme est bien connu pour les équations d'Euler (cf. [1], [6] par exemple), il n'en est plus de même pour tout autre système de lois de conservation (Villedieu [5]) et en particulier pour le modèle qui nous intéresse dans le présent travail. A partir de l'exemple

des équations d'Euler, nous rappelons qu'un formalisme cinétique peut être obtenu sur la base d'un couple d'entropies de Lax strictement convexe. En constatant qu'une telle approche nécessite une dépendance fonctionnelle simple des entropies de Lax, nous montrons que pour le système, ici considéré, la dépendance fonctionnelle simple des couples d'entropies n'est pas compatible avec les conditions de convexité imposées par Lax. Nous proposons alors des changements de variable admissibles **préservant** les solutions faibles et **assurant** la condition de stricte convexité.

2.1 Position du problème

Nous considérerons un système hyperbolique de lois de conservation dont la forme condensée est la suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

où le vecteur des états $\mathbf{u} \in \Omega$, ouvert de $\mathbb{R}^n$, et la fonction flux $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ sont précisés ci-après. Supposons que ce système admet des lois de conservation supplémentaires de la forme

$$\partial_t U(\mathbf{u}) + \operatorname{div} F(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

où l'application $U : \mathbf{u} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée régulière de classe $\mathcal{C}^2$. Le couple (U, F) est qualifié de couple d'entropies de Lax dès que l'application $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe (cf. Godlewski-Raviart [15]).

L'existence d'un couple d'entropies de Lax assure, en vertu du Théorème de Godunov Mock (Godunov [18], Mock [19]), l'existence d'un changement de variable $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui symétrise le système (2.1). En effet, la stricte convexité de l'entropie assure que l'application $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par

$$\Phi(\mathbf{u}) = \nabla U(\mathbf{u}),$$

réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. En considérant la transformée de Fenchel de l'entropie U définie par

$$U^*(\mathbf{v}) = \max_{\{\mathbf{u} \in \Omega\}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - U(\mathbf{u})), \quad (2.2)$$

il résulte de la stricte convexité que

$$U^*(\Phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u} \cdot \Phi(\mathbf{u}) - U(\mathbf{u}).$$

En conséquence, un simple calcul conduit à la relation suivante :

$$\nabla U^*(\Phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \Omega.$$

Il en résulte que si $\mathbf{u}$ est une solution faible de (2.1) alors $\mathbf{u}^* = \Phi(\mathbf{u})$ est une solution faible du système symétrique de lois de conservation suivant :

$$\partial_t \nabla U^*(\mathbf{u}^*) + \operatorname{div} \nabla F^*(\mathbf{u}^*) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.3)$$

où l'application $F^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie par

$$F^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\Phi^{-1}(\mathbf{v})) - F(\Phi^{-1}(\mathbf{v})). \quad (2.4)$$

Sous certaines hypothèses, ce principe de symétrisation macroscopique peut être prolongé par un principe de symétrisation cinétique (Perthame [1], Croisille [6], Villedieu [5], Chen-LeFloch [17]). Soit $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe astreinte à des conditions d'intégrabilité qui seront précisées par la suite. Désignons par H^* la transformée de Fenchel de la fonction H . Le formalisme cinétique est alors obtenu s'il existe une application $K : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q) \rightarrow \mathbb{R}^n$, où m et q sont des entiers éventuellement nuls, telle que

$$U^*(\mathbf{u}^*) = \int_{\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q)} H^*(\mathbf{u}^* \cdot K(\xi, I)) d\xi dI, \quad (2.5.i)$$

$$F^*(\mathbf{u}^*) = \int_{\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q)} \xi H^*(\mathbf{u}^* \cdot K(\xi, I)) d\xi dI. \quad (2.5.ii)$$

L'application K peut être comprise comme un vecteur de moments généralisé.

Le principal intérêt d'un tel formalisme réside dans le résultat formel suivant dont la démonstration peut être trouvée dans Perthame [1], Croisille [6], Godlewski-Raviart [15] :

Lemme 2.1

Soit $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ une solution faible de (2.1) associée à la donnée initiale $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$. Considérons le problème de transport libre suivant :

$$\partial_t f + \sum_{i=1}^d \xi_i \partial_{x_i} f = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \xi = {}^T(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (2.6.i)$$

$$f(0, x, \xi, I) = f_0(x, \xi, I). \quad (2.6.ii)$$

La solution de (2.6) est donnée par

$$f(t, x, \xi, I) = f_0(x - \xi t, \xi, I), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Si la donnée initiale est choisie telle que

$$f_0(x, \xi, I) = H^*(\mathbf{u}^*(x, 0) \cdot K(\xi, I)),$$

alors formellement

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q)} f_0(x, \xi, I) K(\xi, I) d\xi dI,$$

et les K -moments de $f(\Delta t, x, \xi, I)$ vérifient l'estimation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q)} K(\xi, I) f(\Delta t, x, \xi, I) d\xi dI = \mathbf{u}(x, \Delta t) + O(\Delta t), \quad \Delta t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ce résultat est à la base de méthodes numériques présentant d'importantes propriétés de stabilité pour l'approximation du système de lois de conservation (2.1). Un exemple en est donné dans la section 3.

Un tel formalisme est bien connu pour le système des équations d'Euler (Perthame [1], [2], Khobalatte-Perthame [3]) pour lequel

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, E), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = {}^T(\rho \underline{u}, \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + p I_d, (E + p) \underline{u})$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel et I_d la matrice identité dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et où $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$ et

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} \right), \quad \gamma > 1.$$

De plus, les couples (U, F) , définis par

$$U(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{F} \left(\ln \left(\frac{\rho^\gamma}{p} \right) \right), \quad F(\mathbf{u}) = \underline{u} U(\mathbf{u}),$$

où l'application $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est assez régulière, sont des couples d'entropie de Lax si

$$\mathcal{F}'(y) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{F}''(y)}{\mathcal{F}'(y)} > -\frac{1}{\gamma} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En conséquence, le Théorème de Godunov Mock assure l'existence d'un système symétrique équivalent pour les solutions faibles dont la forme condensée est donnée par (2.3).

Après Croisille [6], Villedieu [5], posons

$$\mathbf{v} = {}^T(v_\rho, v_{u,1}, \dots, v_{u,d}, v_E),$$

où $v_E < 0$, la transformée de Fenchel des entropies de Lax trouve la forme suivante :

$$U^*(\mathbf{v}) = \frac{1}{(-v_E)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \mathcal{G} \left(v_\rho - \frac{\sum_{i=1}^d (v_{u,i})^2}{2v_E} \right),$$

où $\mathcal{G}$ est une application régulière, en dualité avec la fonction $\mathcal{F}$, astreinte à des conditions de convexité.

Il est alors possible de montrer ([5]) que si l'application $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est strictement convexe et satisfait

$$\begin{aligned} & H(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)/x = +\infty, \quad \text{et une des deux conditions suivantes :} \\ (a) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = -\infty, \\ H''(x) \geq C |H'(x)|^a \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante} \\ \text{et } a > \frac{5}{2} + \frac{d}{2} + \frac{1}{i}, \end{matrix} \\ (b) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = 0, \\ H''(x) \geq C H'(x)^a \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante et } a < 1, \end{matrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

alors l'application $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$K(\xi, I) = {}^T \left(1, \xi, \frac{|\xi|^2}{2} + I \right),$$

conduit aux relations (2.5) si et seulement si

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{d}{2}.$$

De plus, les fonctions H et $\mathcal{G}$ sont en dualité.

Dans le cadre du système Euler, le formalisme cinétique vérifie le Lemme 2.1. L'analogue d'un tel formalisme est en réalité inconnu dans le cadre du système qui nous préoccupe. C'est la raison pour laquelle nous en recherchons une interprétation cinétique abstraite au sens du Lemme 2.1. Il s'agit donc de caractériser toutes les entropies de Lax strictement convexes du système (2.1), d'en calculer explicitement la transformée de Fenchel (au moins pour une famille suffisamment grande) et d'en déduire un principe de symétrisation cinétique.

Il est important de noter que la caractérisation explicite de la transformée de Fenchel ne peut être, en général, obtenue que pour des familles d'entropies dont la dépendance fonctionnelle est simple, ce qui est le cas pour les équations d'Euler où

$$U(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{F} \left(\ln \left(\frac{\rho^\gamma}{p} \right) \right).$$

Nous montrons que cette contrainte de simplicité fonctionnelle de l'entropie n'est pas nécessairement compatible avec la condition de stricte convexité.

2.2 Modèle mathématique

Nous considérons l'écoulement turbulent d'un fluide compressible supposé régi par le modèle (k, ϵ) (cf. Mohammadi-Pironneau [12]). Le fluide est caractérisé par sa densité ρ , sa vitesse $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$, son énergie totale E ainsi que son énergie cinétique turbulente ρk et le taux de dissipation de cette énergie $\rho \epsilon$. Nous adoptons le système du premier ordre extrait tel qu'il est habituellement considéré, *i.e.* sous forme conservative. Ce système trouve la forme développée suivante :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} (\rho \underline{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.8.i)$$

$$\partial_t \rho u_j + \operatorname{div} (\rho u u_j) + \partial_{x_j} \tilde{p} = 0, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.8.ii)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div} ((E + \tilde{p}) \underline{u}) = 0, \quad (2.8.iii)$$

$$\partial_t \rho k + \operatorname{div} (\rho k \underline{u}) = 0, \quad (2.8.iv)$$

$$\partial_t \rho \epsilon + \operatorname{div} (\rho \epsilon \underline{u}) = 0, \quad (2.8.v)$$

où

$$\tilde{p} = p + (\gamma_\tau - 1)\rho k \quad \text{avec} \quad \gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}. \quad (2.9)$$

La pression du gaz p est supposée satisfaire une loi de gaz parfait :

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} - \rho k\right), \quad \gamma > 1.$$

Le système étudié se distingue du système Euler 3×3 habituel par la présence d'une pression totale apparente $\tilde{p}$ somme de deux pressions ayant chacune leur propre "coefficient adiabatique".

En notant

$$\mathbf{u} = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, E, \rho k, \rho \epsilon),$$

l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+4}; \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, \tilde{p} = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma - 1} \rho k \right) > 0, k > 0, \epsilon > 0 \right\}.$$

Le système (2.8) trouve la forme condensée suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.10)$$

où les applications $\mathbf{f}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ trouvent clairement leur expression à partir de la forme développée de (2.8).

Le résultat suivant énonce les propriétés fondamentales de (2.8), utiles aux développements menés ci-après :

Lemme 2.2

i) Le système (2.8) est hyperbolique sur l'espace des états Ω . En notant

$$\mathbf{n} = {}^T(n_1, \dots, n_d)$$

un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$, la matrice $\sum_{i=1}^d n_i \nabla \mathbf{f}_i(\mathbf{u})$ admet les valeurs propres suivantes :

$$\underline{u} \cdot \mathbf{n} - c, \quad \underline{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \underline{u} \cdot \mathbf{n} + c, \quad c^2 = \frac{\gamma \tilde{p}}{\rho}.$$

ii) La valeur propre $\underline{u} \cdot \mathbf{n}$ est d'ordre de multiplicité $d + 2$, le champ associé est linéairement dégénéré et admet pour invariants de Riemann le couple $(\underline{u} \cdot \mathbf{n}, \tilde{p})$.

iii) Les valeurs propres $\underline{u} \cdot \mathbf{n} \pm c$ sont simples. Les champs associés sont vraiment non linéaires et admettent pour invariants de Riemann communs :

$$\frac{\rho^\gamma}{\tilde{p}}, \quad k \quad \text{et} \quad \epsilon.$$

iv) Les quantités k et ϵ sont continues pour les solutions onde de choc de (2.8).

La démonstration de ce résultat est obtenue de façon usuelle et nous renvoyons le lecteur à Godlewski-Raviart [15] ou Serre [13] dans le cadre de la dynamique des gaz.

Remarque 2.3

Il est important de noter que dans le cadre des systèmes de lois de conservation multidimensionnels, les notions de champs vraiment nonlinéaires et linéairement dégénérés ainsi que des invariants de Riemann n'ont en général pas de sens (cf. [13]). Cependant, en remarquant que le système (2.8) est invariant par rotation, au même titre que le système d'Euler, ces notions admettent une extension immédiate dans le cas des solutions onde plane.

De plus, il est possible de caractériser l'ensemble des lois de conservation scalaires supplémentaires satisfaites par les solutions régulières de (2.8). Le résultat suivant, relatif à cette caractérisation, est une extension directe des travaux menés dans Coquel-Marmignon [11] dans le cadre de la dynamique des gaz faiblement ionisés :

Lemme 2.4

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \Omega)$ une solution de (2.8). Alors $\mathbf{u}$ satisfait les lois de conservation suivantes :

$$\partial_t \rho g(\mathbf{u}) + \operatorname{div} (\rho g(\mathbf{u}) \underline{u}) = 0, \quad (2.11)$$

où $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière arbitraire des trois invariants de Riemann communs aux deux champs vraiment nonlinéaires.

Remarque 2.5

Par abus de notation et sans que cela puisse porter à confusion, nous notons de nouveau

$$g(\mathbf{u}) = g\left(\frac{\rho^\gamma}{\tilde{p}}, k, \epsilon\right). \quad (2.12)$$

Il résulte du Lemme 2.4 que les éventuels couples d'entropies de Lax du système (2.8) sont nécessairement de la forme

$$(U, F) = (\rho g(\mathbf{u}), \rho g(\mathbf{u}) \underline{u}),$$

où l'application $\mathbf{u} \rightarrow \rho g(\mathbf{u})$, où g est donnée par (2.12), doit être strictement convexe. Notons qu'il est possible d'extraire des conditions suffisantes de stricte convexité, mais qu'en raison de leur forme compliquée et presque inexploitable, nous ne les énonçons pas dans le présent travail.

Rappelons (cf. section 2.1) que l'obtention d'un formalisme cinétique, reposant sur une symétrisation macroscopique associée au Théorème de Godunov Mock, nécessite la connaissance explicite de la transformée de Fenchel des entropies de Lax considérées. La

forme explicite d'une telle transformation ne peut être obtenue que pour une dépendance fonctionnelle simple des entropies de Lax. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra se référer à la démonstration de la Proposition 2.9 et aux commentaires qui s'ensuivent.

Les entropies de (2.8), dont la dépendance fonctionnelle est donnée par (2.12), ne satisfont pas cette condition de dépendance simple. Cependant, en vertu de la propriété *iv*) du Lemme 2.2, les quantités k et ϵ sont constantes à la traversée d'une onde de choc. En conséquence, puisque les entropies de Lax sont introduites afin de caractériser l'admissibilité des solutions onde de choc de (2.8), il semble naturel de privilégier les couples d'entropies de la forme :

$$(\rho g(s), \rho g(s)\underline{u}), \quad s = \frac{\rho^\gamma}{\tilde{p}}.$$

Cependant, le résultat négatif suivant montre que ces couples, fonctionnellement simples, ne sont pas des entropies de Lax :

Lemme 2.6

Soit l'application $U : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$U(\rho, \rho\underline{u}, E, \rho k) = \rho g\left(\frac{\rho^\gamma}{\tilde{p}}\right)$$

où

$$\tilde{p} = p + (\gamma_\tau - 1)\rho k = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|\rho\underline{u}|^2}{2\rho} + \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma - 1} \rho k \right),$$

et

$$\tilde{\Omega} = \left(\tilde{\mathbf{u}} = (\rho, \rho\underline{u}, E, \rho k) \in \mathbb{R}^{d+3}; \quad \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, \tilde{p} > 0, \kappa > 0 \right)$$

L'application $\tilde{v}\mathbf{u} \rightarrow U(\tilde{\mathbf{u}})$ est convexe mais n'est jamais strictement convexe.

Démonstration du Lemme 2.6

La détermination des mineurs de la matrice hessienne de l'application U met en évidence que ceux-ci sont soit positifs sur $\tilde{\Omega}$ soit nuls sur $\tilde{\Omega}$. En conséquence, l'application U est convexe mais ne peut jamais être strictement convexe. ■

Il résulte du Lemme 2.6 que le système (2.8) ne peut pas être symétrisé à partir de cette famille d'entropies.

En fait, il est possible de concilier le besoin de simplicité des entropies considérées avec l'exigence de stricte convexité en étudiant l'existence de changements de variable admissibles qui d'une part préservent les solutions faibles de (2.8) et d'autre part assurent la stricte convexité des entropies.

L'existence de tels changements de variable résulte d'une part du Lemme 2.4 consacré aux solutions régulières de (2.8) et d'autre part de la propriété *iv*) du Lemme 2.2, relative à la continuité de k et ϵ pour les solutions onde de choc du système (2.8). En effet, nous

montrons dans le résultat suivant que tout $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme impliquant des nonlinéarités de la forme $\rho\varphi(k, \epsilon)$ permet de définir un nouveau système de lois de conservation possédant les mêmes solutions faibles que (2.8) :

Lemme 2.7

Soit l'application $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$, définie par

$$\Phi(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho\mathbf{u}, v_E, \rho v_{\rho k}, \rho v_{\rho\epsilon}), \quad (2.13)$$

avec

$$v_E = E + \rho\varphi_E(k, \epsilon), \quad v_{\rho k} = \varphi_{\rho k}(k, \epsilon) \quad \text{et} \quad v_{\rho\epsilon} = \varphi_{\rho\epsilon}(k, \epsilon),$$

où les applications φ_E , $\varphi_{\rho k}$ et $\varphi_{\rho\epsilon}$ sont telles que Φ réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Alors $\mathbf{v} = \Phi(\mathbf{u})$ est une solution faible de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux du système suivant :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.14.i)$$

$$\partial_t \rho u_j + \operatorname{div}(\rho u u_j) + \partial_{x_j} \tilde{p} = 0, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.14.ii)$$

$$\partial_t v_E + \operatorname{div}((v_E + \tilde{p})\mathbf{u}) = 0, \quad (2.14.iii)$$

$$\partial_t \rho v_{\rho k} + \operatorname{div}(\rho v_{\rho k} \mathbf{u}) = 0, \quad (2.14.iv)$$

$$\partial_t \rho v_{\rho\epsilon} + \operatorname{div}(\rho v_{\rho\epsilon} \mathbf{u}) = 0, \quad (2.14.v)$$

où $\tilde{p}$ est définie par (2.9).

Démonstration du Lemme 2.7

L'équivalence entre les systèmes (2.8) et (2.14) est immédiate dans le cadre de solutions régulières de classe $\mathcal{C}^1$ et repose sur un simple calcul.

Soit Σ une surface de discontinuité dans le plan (x, t) de normale unitaire

$$\mathbf{n} = {}^T(n_t, n_{x_1}, \dots, n_{x_d}).$$

Puisque le système (2.14) est invariant par rotation, il est toujours possible de supposer que $\mathbf{n} = {}^T(n_t, n_{x_1}, 0, \dots, 0)$ avec n_{x_1} non nul.

En conséquence, la formulation faible usuelle (cf. Godlewski-Raviart [14] ou Serre [13] dans le cadre de la dynamique des gaz) conduit la solution $\mathbf{v}$ de (2.14) à satisfaire les relations de saut suivantes :

$$[M] = 0, \quad \text{avec} \quad M = \rho(u_1 - \sigma),$$

$$M[u_1] + [\tilde{p}] = 0,$$

$$M[u_i] = 0, \quad i = 2, \dots, d$$

$$M \left[\frac{v_E}{\rho} \right] + [\tilde{p}u] = 0$$

$$M[v_{\rho k}] = 0,$$

$$M[v_{\rho\epsilon}] = 0,$$

où $[X]$ désigne le saut de la quantité X à la traversée de la surface de discontinuité Σ et où $\sigma = -\frac{n_t}{n_{x_1}}$ désigne la vitesse de propagation de la discontinuité.

Deux cas doivent être distingués : $M = 0$ et $M \neq 0$.

Si $M = 0$, la discontinuité est de type onde de contact et est caractérisée par la continuité de u_1 et $\tilde{p}$ à la traversée d'une telle discontinuité. Il en résulte que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ satisfont les mêmes conditions pour une discontinuité de contact.

Si $M \neq 0$, il en résulte de (2.14) que les quantités $\varphi_{\rho k}(k, \epsilon)$ et $\varphi_{\rho \epsilon}(k, \epsilon)$ sont continues à la traversée d'une surface de discontinuité. Puisque l'application Φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, il est alors immédiat que les quantités k et ϵ sont continues à la traversée d'une discontinuité.

Puisque $v_E = E + \rho \varphi_E(k, \epsilon)$, nous en déduisons

$$\left[\frac{v_E}{\rho} \right] = \left[\frac{E}{\rho} \right].$$

En conséquence, les solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ satisfont les mêmes relations de saut. ■

Un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme particulier est privilégié dès qu'il permet de satisfaire la stricte convexité des entropies sous les conditions les plus générales possibles.

Dans ce but, nous considérons dans la suite les deux $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes suivants dont le premier a été mis en évidence par B. Larrouturou et C. Olivier dans [10] :

1) Soit l'application $\Phi_1 : \Omega \rightarrow \Omega_1$ définie par

$$\Phi_1(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, \mathcal{E}, \rho v, \Sigma), \quad (2.15)$$

avec

$$\mathcal{E} = E + \alpha \rho v^2, \quad v = \sqrt{k}, \quad \Sigma = \rho \epsilon + \rho \frac{v^2}{2}, \quad \alpha = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma - 1},$$

et où

$$\Omega_1 = \left\{ \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, \mathcal{E} - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2} > 0, v > 0, \Sigma - \rho \frac{v^2}{2} > 0 \right\}.$$

Notons que la pression $\tilde{p}$ trouve alors l'expression suivante :

$$\frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} = \mathcal{E} - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho}.$$

2) Soit l'application $\Phi_2 : \Omega \rightarrow \Omega_2$ définie par

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = {}^T(\rho, \rho \underline{u}, \Xi, \rho v, \rho \omega), \quad (2.16)$$

avec

$$\Xi = E + \alpha \rho v^2 + \rho \frac{v^2 + \omega^2}{2}, \quad v = \sqrt{k}, \quad \omega = \sqrt{\epsilon}, \quad \alpha = \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\gamma - 1},$$

et où

$$\Omega_2 = \left\{ \rho > 0, \underline{u} \in \mathbb{R}^d, \Xi - \rho \frac{|\underline{u}|^2 + v^2 + \omega^2}{2} > 0, v > 0, \omega > 0 \right\}.$$

Notons que la pression $\tilde{p}$ trouve alors l'expression suivante :

$$\frac{\tilde{p}}{\gamma - 1} = \Xi - \frac{|\rho \underline{u}|^2}{2\rho} - \frac{(\rho v)^2}{2\rho} - \frac{(\rho \omega)^2}{2\rho}.$$

Il est clair que les deux applications précédemment décrites définissent des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes de la forme (2.13) présentée dans le Lemme 2.7. En conséquence, les changements de variable (2.15) et (2.16) conduisent à des systèmes de lois de conservation respectivement associés aux fonctions flux suivantes :

$${}^T \mathcal{F}(\mathbf{v}) = (\rho \underline{u}, \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + \tilde{p} I_d, (\mathcal{E} + \tilde{p}) \underline{u}, \rho v \underline{u}, \Sigma \underline{u}), \quad (2.17)$$

$${}^T \mathcal{G}(\mathbf{w}) = (\rho \underline{u}, \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + \tilde{p} I_d, (\Xi + \tilde{p}) \underline{u}, \rho v \underline{u}, \omega \underline{u}). \quad (2.18)$$

De plus, ces deux systèmes admettent les mêmes solutions faibles que le système (2.8).

Dans le résultat suivant, nous montrons que ces deux changements de variable conduisent à des familles d'entropies strictement convexes et de dépendance fonctionnelle simple :

Lemme 2.8

i) Soit $\delta > 0$ un réel. Soit l'application $U : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$U(\mathbf{v}) = \rho g \left(\ln \left(\frac{\rho^\gamma}{\mathcal{E} - |\rho \underline{u}|^2 / 2\rho} \times \frac{\rho^\delta}{(\Sigma - (\rho v)^2 / 2\rho)^\delta} \right) \right), \quad (2.19)$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière. Alors, pour tout réel δ , l'application U est une entropie du système de lois de conservation (2.15)-(2.17) de flux associé $\underline{u} U$. De plus, elle est strictement convexe sur Ω_1 dès que $\delta > 0$ et que g est de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$g'(y) > 0, \quad \frac{g''(y)}{g'(y)} > \frac{-1}{\gamma + \delta} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

ii) Soit l'application $U : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$U(\mathbf{w}) = \rho g \left(\ln \left(\frac{\rho^\gamma}{\Xi - \{|\rho \underline{u}|^2 + (\rho v)^2 + (\rho \omega)^2\} / 2\rho} \right) \right) \quad (2.21)$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière. Alors, l'application U est une entropie du système de lois de conservation (2.16)-(2.18) de flux associé $\underline{u} U$. De plus, elle est strictement convexe sur Ω_2 dès que g est de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$g'(y) > 0, \quad \frac{g''(y)}{g'(y)} > \frac{-1}{\gamma} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Démonstration du Lemme 2.8

L'obtention des résultats *i)* et *ii)* étant analogue, nous ne prouvons, ici, que *i)*, la preuve de l'assertion *ii)* étant laissée au lecteur.

En vertu du résultat d'équivalence énoncé dans le Lemme 2.7 et de la caractérisation des lois de conservation supplémentaires, Lemme 2.4, il en résulte que le couple $(U, \underline{u}U)$ est un couple d'entropies du système (2.15)-(2.17).

La démonstration est alors conclue en remarquant que si δ est un réel strictement positif et que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les conditions (2.20) alors la matrice hessienne de l'application U est définie positive sur Ω_1 . ■

2.3 Symétrisation cinétique

Sur la base des deux systèmes équivalents, (2.15)-(2.17) et (2.16)-(2.18), exhibés précédemment, et des familles d'entropies de Lax, présentées dans le Lemme 2.8, qui leur sont associées, nous sommes en mesure de proposer une symétrisation de ces deux systèmes suivant le formalisme de Godunov Mock.

Dans le résultat suivant, la transformée de Fenchel des familles d'entropies considérées pour chacun des deux systèmes équivalents est déterminée :

Lemme 2.9

i) Soit $\delta > 0$ un réel. Soit $\mathbf{v} \in \Omega_1$ une solution faible de (2.15)-(2.17) et U une entropie de Lax définie par (2.19) satisfaisant les propriétés de stricte convexité (2.20). En notant

$$\mathbf{v}^* = {}^T(v_\rho^*, \underline{v}_{\rho\underline{u}}^*, v_\varepsilon^*, v_v^*, v_\Sigma^*) \in \mathbb{R}^{d+4}$$

avec

$$\underline{v}_{\rho\underline{u}}^* = {}^T(v_{\rho u_1}^*, \dots, v_{\rho u_d}^*) \in \mathbb{R}^d,$$

supposons l'application $\mathbf{v}^ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ définie par*

$$\mathbf{v}^* = \nabla U(\mathbf{u}).$$

Alors les applications U^ et F^* , définies par (2.2) et (2.4), trouvent les expressions suivantes :*

$$U^*(\mathbf{v}^*) = \frac{1}{(-v_\varepsilon^*)^{\frac{1}{\gamma-1}} (-v_\Sigma^*)^{\frac{\delta}{\gamma-1}}} \Theta \left(v_\rho^* - \frac{|\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*|^2}{2v_\varepsilon^*} - \frac{(v_{\rho v}^*)^2}{2v_\Sigma^*} \right), \quad (2.23.i)$$

$$F^*(\mathbf{v}^*) = -\frac{\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*}{v_\varepsilon^*} U^*(\mathbf{v}^*), \quad (2.23.ii)$$

où $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\Theta'(x) > 0, \quad \Theta''(x) > 0, \quad (\gamma + \delta) \Theta(x) \Theta''(x) - (\delta + 1) \Theta'(x)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

ii) Soit $\mathbf{w} \in \Omega_2$ une solution faible de (2.16)–(2.18) et U une entropie de Lax définie par (2.21) satisfaisant les propriétés de stricte convexité (2.22). En notant

$$\mathbf{w}^* = {}^T(w_\rho^*, \underline{w}_{\rho\underline{u}}^*, w_\varepsilon^*, w_\nu^*, w_\omega^*) \in \mathbb{R}^{d+4},$$

avec

$$\underline{w}_{\rho\underline{u}}^* = {}^T(w_{\rho u_1}^*, \dots, w_{\rho u_d}^*) \in \mathbb{R}^d,$$

supposons l'application $\mathbf{w}^* : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ définie par

$$\mathbf{w}^* = \nabla U(\mathbf{w}).$$

Alors les applications U^* et F^* , définies par (2.2) et (2.4), trouvent les expressions suivantes :

$$U^*(\mathbf{w}^*) = \frac{1}{(-w_\varepsilon^*)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \Theta \left(w_\rho^* - \frac{1}{2w_\varepsilon^*} \{ |\underline{w}_{\rho\underline{u}}^*|^2 + (w_{\rho\nu}^*)^2 + (w_{\rho\omega}^*)^2 \} \right), \quad (2.25.i)$$

$$F^*(\mathbf{w}^*) = -\frac{\underline{w}_{\rho\underline{u}}^*}{w_\varepsilon^*} U^*(\mathbf{w}^*), \quad (2.25.ii)$$

où $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\Theta'(x) > 0, \quad \Theta''(x) > 0, \quad \gamma \Theta(x) \Theta''(x) - \Theta'(x)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Démonstration du Lemme 2.9

La preuve des assertions i) et ii) étant analogue seule la première est ici démontrée.

Puisque $\mathbf{v}^*$ satisfait

$$\mathbf{v}^* = \nabla U(\mathbf{v}),$$

il en résulte les relations suivantes :

$$v_\rho^* = g(y) + \rho \left((\gamma + \delta)/\rho - \frac{|\rho\underline{u}|^2/(2\rho^2)}{\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/(2\rho)} - \delta \frac{(\rho\nu)^2/(2\rho^2)}{\Sigma - (\rho\nu)^2/(2\rho)} \right) g'(y), \quad (2.27.i)$$

$$\underline{v}_{\rho\underline{u}}^* = \frac{\rho\underline{u}}{\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/(2\rho)} g'(y), \quad (2.27.ii)$$

$$v_\varepsilon^* = -\frac{\rho}{\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/(2\rho)} g'(y), \quad (2.27.iii)$$

$$v_{\rho\nu}^* = \delta \frac{\rho\nu}{\Sigma - (\rho\nu)^2/(2\rho)} g'(y), \quad (2.27.iv)$$

$$v_\Sigma^* = -\delta \frac{\rho}{\Sigma - (\rho\nu)^2/(2\rho)} g'(y), \quad (2.27.v)$$

où

$$y = \ln \left(\frac{\rho^\gamma}{\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/2\rho} \times \frac{\rho^\delta}{(\Sigma - (\rho\nu)^2/2\rho)^\delta} \right).$$

Puisque l'application U est strictement convexe il en résulte que g est strictement croissante. Nous en déduisons alors que

$$v_{\mathcal{E}}^* < 0 \quad \text{et} \quad v_{\Sigma}^* < 0,$$

car $\mathbf{v} \in \Omega$.

Le système (2.27) conduit aux relations suivantes :

$$\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*/v_{\mathcal{E}}^* = -\underline{u}, \quad v_{\rho v}^*/v_{\Sigma}^* = -v \quad \text{et} \quad v_{\mathcal{E}}^*/v_{\Sigma}^* = \frac{1}{\delta} \frac{\Sigma - (\rho v)^2/(2\rho)}{\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/(2\rho)}. \quad (2.28)$$

De plus, puisque $\mathbf{v}^*$ satisfait

$$\mathbf{v}^* = \nabla U(\mathbf{v}),$$

nous avons

$$U^*(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* - U(\mathbf{v}), \quad (2.29)$$

qui trouve la forme développée suivante :

$$U^*(\mathbf{v}^*) = -v_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{E} - |\rho\underline{u}|^2/(2\rho)). \quad (2.30)$$

Il est immédiat que (2.29) conduit à :

$$\mathbf{v} = \nabla U^*(\mathbf{v}^*).$$

En conséquence, les équations (2.28) et (2.30) conduisent au système suivant :

$$\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho}^*} v_{\rho\underline{u}}^* + \nabla_{\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*}(U^*) v_{\mathcal{E}}^* = 0, \quad (2.31.i)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho}^*} v_{\rho v}^* + \frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho v}^*} v_{\Sigma}^* = 0, \quad (2.31.ii)$$

$$\delta v_{\mathcal{E}}^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\mathcal{E}}^*} - \frac{1}{2} |\nabla_{\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*}(U^*)|^2 \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho}^*} \right)^{-1} \right) = v_{\Sigma}^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\Sigma}^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho v}^*} \right)^2 \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho}^*} \right)^{-1} \right), \quad (2.31.iii)$$

$$U^*(\mathbf{v}^*) = -v_{\mathcal{E}}^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\mathcal{E}}^*} - \frac{1}{2} |\nabla_{\underline{v}_{\rho\underline{u}}^*}(U^*)|^2 \left(\frac{\partial U^*}{\partial v_{\rho}^*} \right)^{-1} \right). \quad (2.31.iv)$$

La résolution de ce système par les intégrales premières conduit à (2.23.i) où $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière en dualité avec U . L'obtention de (2.23.ii) s'en déduit alors aisément en remarquant que

$$F^*(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v}^* \cdot \mathcal{F}(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}),$$

où

$$F(\mathbf{v}) = \underline{u} U(\mathbf{v}) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^* \cdot \mathcal{F}(\mathbf{v}) = \underline{u} (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}).$$

Il est aisé de montrer que la transformée de Fenchel d'une application strictement convexe est encore une application strictement convexe. En conséquence, l'application $U^* : \mathbb{R}^{d+4} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe. Un calcul direct assure que cette condition est satisfaite si la fonction Θ vérifie les conditions (2.24). ■

Remarque 2.10

Il est important de noter qu'une dépendance fonctionnelle simple de l'entropie est, en général, nécessaire dans la preuve précédente. En effet, dans le cas où la famille d'entropies considérée est plus complexe, le système d'EDO (2.31) ne peut plus, en général, être résolu.

Remarque 2.11

En vertu du Théorème de Godunov Mock et du Lemme 2.7, les systèmes (2.8), (2.3)-(2.23) et (2.3)-(2.25) sont équivalents pour les solutions faibles.

Remarque 2.12

Nous pouvons constater que le deuxième changement de variable (Φ_2) conduit à une transformée de Fenchel de l'entropie (2.25.i) qui coïncide avec la transformée de Fenchel des entropies des équations d'Euler en dimension $d+2$. Il en résulte qu'un tel changement de variable permet d'associer les variables k et ϵ à des vitesses au même titre que $\underline{u}$.

Remarque 2.13

De même que dans la remarque précédente, le premier changement de variable (Φ_1) peut trouver une interprétation physique. En effet, il ressort de (2.23.i) que les couples $(v_{\mathcal{E}}^*, v_{\rho \underline{u}}^*)$ et $(v_{\Sigma}^*, v_{\rho v}^*)$ ont des rôles symétriques. En conséquence, les couples $(\mathcal{E}, \underline{u})$ et (Σ, v) peuvent être entendus comme des couples (énergie, vitesse) au même titre que $(E, \underline{u})$.

Nous sommes alors en mesure de proposer une interprétation cinétique pour chacun des deux systèmes symétriques (2.3)-(2.23) et (2.3)-(2.25). Dans un premier temps nous énonçons le formalisme cinétique obtenu pour le système (2.3)-(2.23).

Théorème 2.14

Soit $\delta > 0$ un réel différent de $(\gamma - 1)/2$. Soit l'application $K_1 : \Psi_1 \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ où $\Psi_1 = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ définie par

$$K_1(\xi, I, \zeta, J) = {}^T \left(1, \xi, \frac{|\xi|^2}{2} + \frac{I^2}{2}, \zeta, \frac{\zeta^2}{2} + \frac{J^2}{2} \right),$$

avec $i > 0$ et $j > 0$. Soit $H \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une application strictement

convexe satisfaisant

$$\begin{aligned}
 & H(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)/x = +\infty, \quad \text{et une des deux conditions suivantes :} \\
 (a) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = -\infty, \\ H''(x) \geq C |H'(x)|^a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante} \\ \text{et } a > \frac{5}{2} + \frac{d}{2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j}, \end{array} \quad (2.32) \\
 (b) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = 0, \\ H''(x) \geq C H'(x)^a \end{cases} \quad \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante et } a < 1.
 \end{aligned}$$

En désignant par H^* la transformée de Fenchel de l'application H , si

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{j} = \frac{\delta}{\gamma - 1} - \frac{1}{2},$$

alors le couple (U^*, F^*) , défini par

$$U^*(\mathbf{v}^*) = \int_{\Psi_1} H^*(\mathbf{v}^* \cdot K_1) d\xi dI d\zeta dJ, \quad F^*(\mathbf{v}^*) = \int_{\Psi_1} \xi H^*(\mathbf{v}^* \cdot K_1) d\xi dI d\zeta dJ, \quad (2.33)$$

trouve l'expression (2.23) où la fonction Θ est en dualité avec H . De plus, puisque $i > 0$ alors $\gamma < \frac{2}{d} + 1$.

Remarque 2.15

La remarque 2.13 trouve, dans le résultat précédent, une interprétation cinétique. En effet, le vecteur des moments K_1 fait intervenir deux énergies abstraites indépendantes (I, J) et deux vecteurs de vitesses microscopiques (ξ, ζ) . Ceci traduit, d'un point de vue cinétique, les rôles joués pour les couples $(\mathcal{E}, \underline{u})$ et (Σ, v) .

Notons que dans le Théorème 2.14, une restriction sur le paramètre δ est imposée puisque

$$\delta \neq \frac{\gamma - 1}{2}.$$

Toutefois, ce résultat peut être étendu aisément au cas

$$\delta = \frac{\gamma - 1}{2},$$

de la façon suivante :

Théorème 2.16

Soit l'application $K_1: \Psi_1 \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$, où $\Psi_1 = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}$, définie par

$$K_1(\xi, I, \zeta) = {}^T \left(1, \xi, \frac{|\xi|^2}{2} + \frac{I^2}{2}, \zeta, \frac{\zeta^2}{2} \right),$$

avec $\iota > 0$. Soit $H \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une application strictement convexe satisfaisant

$$\begin{aligned} H(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)/x = +\infty, \quad \text{et une des deux conditions suivantes :} \\ (a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = -\infty, \\ H''(x) \geq C |H'(x)|^a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante} \\ \text{et } a > \frac{5}{2} + \frac{d}{2} + \frac{1}{\iota}, \end{array} \\ (b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = 0, \\ H''(x) \geq C H'(x)^a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante et } a < 1. \end{array} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En désignant par H^* la transformée de Fenchel de l'application H , si

$$\frac{1}{\iota} = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{d}{2},$$

alors le couple (U^*, F^*) , défini par

$$U^*(\mathbf{v}^*) = \int_{\Psi_1} H^*(\mathbf{v}^* \cdot K_1) d\xi dId\zeta dJ, \quad F^*(\mathbf{v}^*) = \int_{\Psi_1} \xi H^*(\mathbf{v}^* \cdot K_1) d\xi dId\zeta dJ, \quad (2.35)$$

trouve l'expression (2.23) où la fonction Θ est en dualité avec H . De plus, puisque $\iota > 0$ alors $\gamma < \frac{2}{d} + 1$.

Remarque 2.17

Le choix $\delta = (\gamma - 1)/2$ conduit à un formalisme cinétique plus simple dans le sens où le vecteur des moments ne met en jeu, cette fois, qu'une seule énergie abstraite I .

De même, dans le résultat suivant, nous donnons le formalisme cinétique obtenu pour le système (2.3)-(2.25) :

Théorème 2.18

Soit l'application $K_2: \Psi_2 \rightarrow \mathbb{R}^{d+4}$ où $\Psi_2 = \mathbb{R}^{d+2} \times \mathbb{R}^+$ définie par

$$K_2(\xi, I) = {}^T \left(1, \underline{\xi}, \frac{|\underline{\xi}|^2}{2} + \frac{I^2}{2}, \xi_{d+1}, \xi_{d+2} \right) \quad \text{où } \underline{\xi} = {}^T(\xi_1, \dots, \xi_d)$$

avec $\iota > 0$. Soit $H \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une application strictement convexe satisfaisant

$$\begin{aligned} H(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)/x = +\infty, \quad \text{et une des deux conditions suivantes :} \\ (a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = -\infty, \\ H''(x) \geq C |H'(x)|^a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante} \\ \text{et } a > \frac{7}{2} + \frac{d}{2} + \frac{1}{\iota}, \end{array} \\ (b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H'(x) = 0, \\ H''(x) \geq C H'(x)^a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \text{ avec } C > 0 \text{ une constante et } a < 1. \end{array} \end{aligned} \quad (2.36)$$

En désignant par H^* la transformée de Fenchel de l'application H , si

$$\frac{1}{\iota} = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{d+2}{2},$$

alors le couple (U^*, F^*) défini par

$$U^*(\mathbf{w}^*) = \int_{\Psi_2} H^*(\mathbf{w}^* \cdot K_2) d\xi dI, \quad F^*(\mathbf{w}^*) = \int_{\Psi_2} \xi H^*(\mathbf{w}^* \cdot K_2) d\xi dI, \quad (2.37)$$

trouve l'expression (2.25) où la fonction Θ est en dualité avec H . De plus, puisque $\iota > 0$ alors $\gamma < \frac{2}{d+2} + 1$.

Remarque 2.19

La remarque 2.12 trouve, dans le résultat précédent, une interprétation cinétique. En effet, le vecteur des moments K_2 fait intervenir une unique énergie abstraite I et un vecteur de vitesses microscopiques $\xi \in \mathbb{R}^{d+2}$. Puisque la vitesse macroscopique appartient à $\mathbb{R}^d$, il en résulte, d'un point de vue cinétique, la présence de deux composantes supplémentaires de vitesse respectivement associées aux rôles joués par v et ω .

Les trois résultats précédents sont obtenus de façon classique et nous renvoyons le lecteur à Perthame [1], Villedieu [5] pour de plus amples détails. Cependant, nous rappelons que les conditions d'intégrabilité sur H , énoncées en (a) ou (b) dans les deux Théorèmes 2.14, 2.16 et 2.18, permettent la dérivation des relations (2.33) ou (2.35) ou (2.37). En conséquence, nous avons

$$\mathbf{v} = \nabla U^*(\mathbf{v}^*) = \int_{\Psi_1} K_1 H^{*'}(\mathbf{v}^* \cdot K_1) d\xi dI d\zeta dJ,$$

ou

$$\mathbf{w} = \nabla U^*(\mathbf{w}^*) = \int_{\Psi_2} K_1 H^{*'}(\mathbf{w}^* \cdot K_2) d\xi dI d\zeta dJ,$$

avec U^* respectivement définie par (2.23.i) et (2.25.i). Il en résulte que l'application

$$(x, t) \rightarrow H^{*'}(\mathbf{v}^* \cdot K_{\mathbf{v}^*})$$

peut être comprise comme une fonction de répartition des vitesses.

Il est important de noter que le support de cette fonction de répartition des vitesses est non borné, respectivement compact, sous la condition (a), respectivement (b) (cf. [5]).

Il résulte des Théorèmes 2.14, 2.16 et 2.18 la non-unicité du formalisme cinétique du système de lois de conservation (2.8). Cependant, chacune des interprétations cinétiques précédentes étend le Lemme 2.1 au cadre du système (2.8).

3 Application aux schémas de Perthame ([1], [2])

Les formalismes cinétiques précédents sont appliqués à l'extension de méthodes numériques, proposées par B. Perthame ([1], [2]) dans le cadre des équations d'Euler, pour le système (2.8).

Seul le formalisme (2.35) est ici considéré (cf. Théorème 2.16). En effet, il admet une condition sur le coefficient adiabatique γ moins restrictive que le formalisme (2.37) (cf. Théorème 2.18). De plus, il implique un vecteur des moments admettant une unique énergie abstraite et ce à la différence du formalisme (2.33) (cf. Théorème 2.18) qui met en jeu deux énergies abstraites.

3.1 Schémas cinétiques

Dans un souci de simplicité, une seule dimension d'espace est considérée ($d = 1$). En conséquence, les vitesses $\underline{u} \in \mathbb{R}^d$ sont notées $u \in \mathbb{R}$. L'ensemble des résultats présentés ci-après trouve une extension pour une dimension d'espace quelconque.

Nous montrons que le formalisme cinétique (2.35) permet d'obtenir une approximation numérique de (2.15)-(2.17) qui constitue un système équivalent au système initial (2.8).

Supposons la donnée initiale suivante :

$$\mathbf{v}(x, 0) = {}^T (\rho(x, 0), (\rho u)(x, 0), \mathcal{E}(x, 0), (\rho v)(x, 0), \Sigma(x, 0)).$$

La fonction d'équilibre

$$f^0(x, \xi, I, \zeta) = M(\xi - u(x, 0), I, \zeta; \mathbf{v}(x, 0)),$$

est définie de sorte que

$$\mathbf{v}(x, 0) = \int_{\Psi_1} f^0(x, \xi, I, \zeta) K_1 d\xi dI d\zeta,$$

où K_1 et Ψ_1 sont définis dans le Théorème 2.16. Dans le cadre des équations d'Euler, l'application M est en fait associée à la Maxwellienne.

Il résulte alors du Lemme 2.1 que la solution de l'équation de transport libre suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \xi \partial_x f &= 0, & t \in]0, \Delta t], \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0, x, \xi, I, \zeta) &= f^0(x, \xi, I, \zeta), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

définit une application

$$\mathbf{v}(x, t) = \int_{\Psi_1} f(t, x, \xi, I, \zeta) K_1 d\xi dI d\zeta, \quad t \in]0, \Delta t], \quad x \in \mathbb{R},$$

qui est une approximation d'ordre un en temps de (2.15)-(2.17).

Il est possible de supprimer le paramètre d'intégration I en définissant les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_0(x, \xi, \zeta) &= \int_{\mathbb{R}_+} M(\xi - u(x, 0), I, \zeta; \mathbf{v}(x, 0)) dI, \\ g_0(x, \xi, \zeta) &= \int_{\mathbb{R}_+} M(\xi - u(x, 0), I, \zeta; \mathbf{v}(x, 0)) I dI. \end{aligned}$$

En conséquence, en posant

$$\begin{aligned} K &= {}^T \left(1, \xi, \frac{|\xi|^2}{2}, \zeta, \frac{|\zeta|^2}{2} \right), \\ k &= {}^T (0, 0, 1, 0, 0), \end{aligned}$$

nous avons

$$\mathbf{v}(x, 0) = \int_{\Psi_1} f_0(x, \xi, \zeta) K + g_0(x, \xi, \zeta) k d\xi d\zeta.$$

En supposant connu les fonctions f_n et g_n nous pouvons définir un pas général en résolvant les deux équations suivantes :

$$\partial_t f + \xi \partial_x f = 0, \quad t \in]t^n, t^{n+1}], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1.i)$$

$$f(t^n + 0, x, \xi, \zeta) = f_n(x, \xi, \zeta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1.ii)$$

et

$$\partial_t g + \xi \partial_x g = 0, \quad t \in]t^n, t^{n+1}], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.i)$$

$$g(t^n + 0, x, \xi, \zeta) = g_n(x, \xi, \zeta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.ii)$$

dont les solutions sont données par

$$f(t, x, \xi, \zeta) = f_n(x - \xi(t - t^n), \xi, \zeta) \quad \text{et} \quad g(t, x, \xi, \zeta) = g_n(x - \xi(t - t^n), \xi, \zeta).$$

Nous définissons alors

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \mathcal{E} \\ \rho v \\ \Sigma \end{pmatrix} (x, t^{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} f_n \\ \xi f_n \\ \frac{|\xi|^2}{2} f_n + g_n \\ \zeta f_n \\ \frac{|\zeta|^2}{2} f_n \end{pmatrix} (x - \xi(t^{n+1} - t^n), \xi, \zeta) d\xi d\zeta. \quad (3.3)$$

Les fonctions f_{n+1} et g_{n+1} sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x, \xi, \zeta) &= \int_{\mathbb{R}_+} M(\xi - u(x, t^{n+1}), I, \zeta; \mathbf{v}(x, t^{n+1})) dI, \\ g_{n+1}(x, \xi, \zeta) &= \int_{\mathbb{R}_+} M(\xi - u(x, t^{n+1}), I, \zeta; \mathbf{v}(x, t^{n+1})) I dI. \end{aligned}$$

Le résultat suivant, dont la démonstration est classique et peut être trouvée dans [15] dans le cadre des équations d'Euler, assure que la méthode précédente permet d'approcher les solutions de (2.15)-(2.17) :

Lemme 3.1

les quantités

$$\rho(x, t^{n+1}), \quad \rho u(x, t^{n+1}), \quad \mathcal{E}(x, t^{n+1}), \quad \rho v(x, t^{n+1}) \quad \text{et} \quad \Sigma(x, t^{n+1}),$$

définies par (3.3), sont une approximation du premier ordre en temps de la solution du système (2.15)-(2.17).

Dans un contexte numérique, il est intéressant de remplacer $\int_{\mathbb{R}^+} M \, dI$ par une expression plus aisée à utiliser. Dans la pratique, B. Perthame ([1]) considère des fonctions d'équilibre à support compact. De telles fonctions sont déduites du résultat suivant :

Théorème 3.2

Considérons

$${}^T\vartheta_0 = \left(\rho(x, 0), 0, \dots, 0, \tilde{p}(x, 0)/(\gamma - 1), v(x, 0), \Sigma(x, 0) \right) \in \mathbb{R}^{d+4},$$

une donnée initiale du système de lois de conservation (2.15)-(2.17) pour une vitesse de l'écoulement nulle. Soit $\eta > 0$ un paramètre réel et soit $H : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application définie par

$$H(x, y) = \frac{1}{\eta^{p-1}} \frac{x^p}{y^q}, \quad (3.4)$$

où p et q sont des constantes réelles vérifiant

$$pq(p - q - 1) > 0 \quad \text{et} \quad p(p - 1) > 0,$$

de sorte que l'application H soit strictement convexe. Le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{f, g} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} H(f(x, \xi, \zeta), g(x, \xi, \zeta)) d\xi d\zeta; \quad f(x, \xi, \zeta) \geq 0, \quad g(x, \xi, \zeta) \geq 0, \right. \\ \left. \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} (f(x, \xi, \zeta)K(\xi, \zeta) + g(x, \xi, \zeta)k) d\xi d\zeta = \vartheta_0 \right\}, \quad (3.5)$$

admet un unique minimum, noté $U(\vartheta_0)$, atteint en (f_{eq}, g_{eq}) . Les fonctions $f_{eq}(x, \xi, \zeta)$ et $g_{eq}(x, \xi, \zeta)$ sont respectivement définies par

$$f_{eq}(x, \xi, \zeta) = C_0 \left(m_1 - \frac{m_2}{2} |\xi|^2 - \frac{1}{2} (\zeta - v(x, 0))^2 \right)_+^{\frac{q+1}{p-q-1}}, \quad (3.6.i)$$

$$g_{eq}(x, \xi, \zeta) = C_0 \frac{q}{pm_2} \left(m_1 - \frac{m_2}{2} |\xi|^2 - \frac{1}{2} (\zeta - v(x, 0))^2 \right)_+^{\frac{p}{p-q-1}}, \quad (3.6.ii)$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(\frac{(d+1)(p-q-1) + 2p}{d(p-q-1)} \right) \left(\frac{\Sigma(x,0) - \rho(x,0)v(x,0)^2/2}{\rho(x,0)} \right), \\ m_2 &= \left(\frac{d(p-q-1) + 2q}{d(p-q-1)} \right) \left(\frac{\Sigma(x,0) - \rho(x,0)v(x,0)^2/2}{\tilde{p}(x,0)/(\gamma-1)} \right), \\ C_0 &= \left(\frac{\rho(x,0)}{2^{\frac{d+1}{2}} \phi(\frac{q+1}{p-q-1})} \right) m_2^{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{m_1} \right)^{\frac{q+1}{p-q-1} + \frac{d+1}{2}}, \end{aligned}$$

où nous avons noté $a_+ = \max(0, a)$ et $\phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1 - |x|^2)_+^\alpha dx$.

De plus, la fonction

$$\begin{aligned} U(\mathbf{v}_0) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} H(f_{eq}(x, \xi - u(x,0), \zeta), g_{eq}(x, \xi - u(x,0), \zeta)) d\xi d\zeta \\ &= \frac{2^{\frac{d+1}{2}}}{\eta^{p-1}} C_0^{p-q} \phi\left(\frac{p}{p-q-1}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^q m_1^{\frac{d+1}{2} + \frac{p}{p-q-1}} m_2^{q-\frac{d}{2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

est une entropie de (2.15)–(2.17) si et seulement si

$$q = \frac{2 - d(\gamma - 1)}{\gamma(2 - d) + d}(p - 1). \quad (3.8)$$

Remarque 3.3

Le résultat précédent est énoncé pour une dimension d'espace d quelconque. Dans le contexte qui nous préoccupe ici, il suffit de considérer $d = 1$. De plus, en notant

$$s = \left(\frac{\rho(x,0)^\gamma}{\tilde{p}(x,0)} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \left(\frac{\rho(x,0)}{\Sigma(x,0) - \rho(x,0)v(x,0)^2/2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}},$$

nous avons sous la condition (3.8)

$$U(\mathbf{v}_0) = c(p, \gamma) \rho(x,0) s^{2(p-1)}, \quad (3.9)$$

où $c(p, \gamma)$ désigne une constante dépendant du paramètre p et du coefficient adiabatique γ . Nous ne donnons pas l'expression de cette constante qui trouve une forme très complexe. Enfin, il est important de noter que les contraintes de stricte convexité sur l'application H et la condition (3.8) impliquent

$$1 < \gamma < 1 + \frac{2}{d}.$$

Il est immédiat que les fonctions $f_{eq}(x, \xi - u(x,0), \zeta)$ et $g_{eq}(x, \xi - u(x,0), \zeta)$, définies par (3.6), peuvent être substituées aux fonctions d'équilibre $f_0(x, \xi, \zeta)$ et $g_0(x, \xi, \zeta)$ précédemment introduites. Il est alors possible de prouver que le résultat d'approximation, énoncé dans le Lemme 3.1, est préservé pour ce nouveau choix des fonctions d'équilibre.

En suivant les idées du schéma de Godunov, nous sommes en mesure de proposer un schéma cinétique. Supposons que la donnée initiale $\mathbf{v}(x, 0)$ soit constante sur chaque cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$.

En résolvant (3.1) et (3.2), nous obtenons une fonction $\mathbf{v}(x, t)$ définie par (3.3). Cette fonction est projetée de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_i^1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{v}(x, \Delta t) dx.$$

En conséquence, le schéma cinétique se décompose en trois étapes distinctes. Supposons $\mathbf{v}(x, t^n)$ constante sur chaque cellule $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ alors :

- (i) construction des fonctions d'équilibre f_{eq}^n et g_{eq}^n définies par (3.6),
- (ii) évolution des fonctions d'équilibre f_{eq}^n et g_{eq}^n par résolution de (3.1) et (3.2),
- (iii) projection de l'application $\mathbf{v}(x, t)$ définie par (3.3).

Cependant, un tel schéma trouve la formulation de type volumes finis suivante :

Lemme 3.4

Supposons la condition (3.8) satisfaite. Soit $\omega(x) \subset \mathbb{R}^2$ le support des fonctions d'équilibre $f_{eq}^n(x, \xi, \zeta)$ et $g_{eq}^n(x, \xi, \zeta)$ définies par (3.6). Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max \left(|u_i^n| + |\omega(x_i)| \sqrt{\frac{\tilde{p}_i^n}{\rho_i^n}} \right) \leq 1, \quad (3.10)$$

le schéma cinétique trouve la forme suivante :

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{v}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{f}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) \right), \quad (3.11)$$

où les flux numériques $\mathbf{f}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ sont donnés par

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \mathbf{f}^+(\mathbf{v}_L) + \mathbf{f}^-(\mathbf{v}_R), \quad \forall (\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \in \Omega_1 \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

avec

$$\mathbf{f}^\pm(\mathbf{v}_i^n) = \int_{\mathbb{R}^2} (\xi)_\pm \left(f_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta) K + g_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta) k \right) d\xi d\zeta. \quad (3.14)$$

La démonstration de ce résultat est usuelle et nous renvoyons le lecteur à [4] ou [15] dans le cadre de la dynamique des gaz.

Remarque 3.5

Il est aisé de constater que le résultat précédent conduit, en fait, à une famille de schémas cinétiques indexés par le paramètre $p \in \mathbb{R}$. Dans la section suivante, nous montrons qu'un choix judicieux de ce paramètre conduit le schéma, ainsi considéré, à satisfaire un principe du maximum sur l'entropie spécifique.

Une importante conséquence de ce schéma réside dans les propriétés de stabilité suivantes :

Théorème 3.6

Sous les hypothèses du Lemme 3.4, supposons que pour tout $i \in Z$

$$\rho_i^0 > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_i^0 > 0.$$

Alors le schéma cinétique (3.11) satisfait pour tout $n \in N$ et tout $i \in Z$

$$\rho_i^n \geq 0, \quad \tilde{p}_i^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_i^n - \frac{(v_i^n)^2}{\rho_i^n} = (\rho\epsilon)_i^n \geq 0,$$

et est L^1 -stable.

Remarque 3.7

Il est important de noter que dans le résultat précédent seule la positivité de la pression totale $\tilde{p}$ est assurée. En effet, l'étude du problème de Riemann du système (2.15)-(2.17) met en évidence la positivité de $\tilde{p}$ mais pas celle de la pression du gaz p . Des contre-exemples peuvent être trouvés.

Démonstration du Théorème 3.6

Puisque les fonctions d'équilibre sont positives, il en résulte que

$$\rho_i^1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{\mathbb{R}^2} f_{eq}^n(x - \xi\Delta t, \xi - u_i^n, \zeta) d\xi d\zeta dx \geq 0.$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^1 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\xi^2}{2} f_{eq}^n(x - \xi\Delta t, \xi - u_i^n, \zeta) + g_{eq}^n(x - \xi\Delta t, \xi - u_i^n, \zeta) \right) d\xi d\zeta dx, \\ &\geq \frac{1}{2\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\xi - u_i^1|^2 + |u_i^1|^2 + 2u_i^1(\xi - u_i^1) \right) f_{eq}^n(x - \xi\Delta t, \xi - u_i^n, \zeta) d\xi d\zeta dx, \\ &\geq \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{2} \rho_i^1 |u_i^1|^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De manière analogue, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\Sigma_i^1 \geq \frac{(v_i^1)^2}{2\rho_i^1}. \quad (3.16)$$

En se rappelant que $\tilde{p}/(\gamma - 1) = \mathcal{E} - |\rho u|^2/2$ et que $\rho\epsilon = \Sigma - \rho v^2/2$ nous déduisons de (3.15) et (3.16) la positivité de $\tilde{p}_i^1$ et de ϵ_i^1 .

Puisque le schéma (3.11) est conservatif, la positivité de ρ^1 , $\mathcal{E}^1$ et Σ^1 implique :

$$\|\rho^1\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\rho^0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \|\mathcal{E}^1\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\mathcal{E}^0\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \|\Sigma^1\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\Sigma^0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Il en résulte alors

$$\begin{aligned} \|\rho^1 u^1\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \left(\|\rho^1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\rho^1 (u^1)^2\|_{L^1(\mathbb{R})} \right)^{1/2}, \\ &\leq \left(2 \|\rho^0\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\mathcal{E}^1\|_{L^1(\mathbb{R})} \right)^{1/2}, \\ &\leq \|\rho^0\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\mathcal{E}^0\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\|\rho^1 v^1\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\rho^0\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\Sigma^0\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Le choix particulier des fonctions d'équilibre f_{eq} et g_{eq} , solutions d'un problème de minimisation sous contraintes dont le minimum définit une entropie du système (2.15)-(2.17), permet de satisfaire les inégalités d'entropie discrètes.

Lemme 3.8

Sous les hypothèses du Lemme 3.4, considérons l'application $U : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.7). Supposons la condition (3.8) vérifiée de sorte que U définisse une entropie du système (2.15)-(2.17). Sous la condition CFL (3.10) et en posant

$$U_j^n = U(\mathbf{v}_j^n),$$

le schéma cinétique (3.11) satisfait les inégalités d'entropie suivantes :

$$U_j^{n+1} - U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - F(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) \right) \leq 0, \quad (3.17)$$

avec

$$F(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = F^+(\mathbf{v}_L) + F^-(\mathbf{v}_R),$$

où

$$F^\pm(\mathbf{v}_i^n) = \int_{\mathbb{R}^2} (\xi)_\pm H(f_{eq}^n, g_{eq}^n)(x_i - \Delta t \xi, \xi - u_i^n, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Démonstration du Lemme 3.8

Dans un souci de clarté, nous notons

$$f_{eq_i}^n(\xi, \zeta) = f_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta) \quad \text{et} \quad g_{eq_i}^n(\xi, \zeta) = g_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta).$$

En posant

$$\begin{aligned} \overline{f_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f_{eq}^n(x - \Delta t \xi, \xi - u_i^n, \zeta) dx, \\ \overline{g_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g_{eq}^n(x - \Delta t \xi, \xi - u_i^n, \zeta) dx, \end{aligned}$$

nous avons

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(K \overline{f_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) + k \overline{g_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) \right) d\xi d\zeta.$$

Sous la condition CFL (3.10) et puisque les fonctions d'équilibre sont à support compact, en notant

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

les fonctions $\overline{f_{eq_i}^n}$ et $\overline{g_{eq_i}^n}$ trouvent l'expression d'une combinaison convexe :

$$\overline{f_{eq_i}^n} = \lambda(-\xi_-) f_{eq_{i+1}}^n + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-) f_{eq_i}^n + \lambda(\xi_+) f_{eq_{i-1}}^n, \quad (3.18)$$

$$\overline{g_{eq_i}^n} = \lambda(-\xi_-) g_{eq_{i+1}}^n + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-) g_{eq_i}^n + \lambda(\xi_+) g_{eq_{i-1}}^n. \quad (3.19)$$

L'application H , définie par (3.4), étant strictement convexe, il en résulte l'inégalité suivante :

$$H(\overline{f_{eq_i}^n}, \overline{g_{eq_i}^n}) \leq \lambda(-\xi_-) H(f_{eq_{i+1}}^n, g_{eq_{i+1}}^n) + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-) H(f_{eq_i}^n, g_{eq_i}^n) + \lambda(\xi_+) H(f_{eq_{i-1}}^n, g_{eq_{i-1}}^n). \quad (3.20)$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} H(f_{eq_i}^n, g_{eq_i}^n) d\xi d\zeta = U(\mathbf{v}_i^n),$$

où l'application U est définie par (3.7), et en posant

$$F(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = F^+(\mathbf{v}_L) + F^-(\mathbf{v}_R),$$

où

$$F^\pm(\mathbf{v}_i^n) = \int_{\mathbb{R}^2} (\xi)_\pm H(f_{eq_i}^n, g_{eq_i}^n)(x_i - \Delta t\xi, \xi - u_i^n, \zeta) d\xi d\zeta,$$

alors l'intégration de (3.20) sur $\mathbb{R}^2$ conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}^2} H(\overline{f_{eq_i}^n}, \overline{g_{eq_i}^n}) d\xi d\zeta \leq U(\mathbf{v}_i^n) - \lambda \left(F(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - F(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) \right).$$

De plus, en vertu du Théorème 3.2, nous avons

$$U(\mathbf{v}_i^{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^2} H(f_{eq_i}^{n+1}, g_{eq_i}^{n+1}) d\xi d\zeta \leq \int_{\mathbb{R}^2} H(\overline{f_{eq_i}^n}, \overline{g_{eq_i}^n}) d\xi d\zeta,$$

qui conduit à l'inégalité d'entropie (3.17). ■

3.2 Principe du maximum sur l'entropie spécifique

Dans le cadre des équations d'Euler, considérons l'application $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$s = \rho \left(\frac{p}{\rho} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Cette application satisfait l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u \leq 0.$$

De plus, E. Tadmor ([9]) prouve que cette entropie satisfait un principe du maximum :

$$s(x, t + \Delta t) \leq \max \left\{ s(y, t); |y - x| \leq \Delta t \|u\|_{L^\infty} \right\}.$$

Dans le cadre du système (2.15)-(2.17), une propriété analogue est obtenue en constatant que l'application $s : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$s = \left(\frac{\rho^\gamma}{\tilde{p}} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \left(\frac{\rho}{\Sigma - \rho v^2/2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}},$$

satisfait l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u \leq 0.$$

Nous montrons, dans le résultat suivant, que l'analogue discret du principe du maximum sur l'entropie spécifique s peut être obtenu pour le schéma cinétique (3.11) :

Théorème 3.9

Considérons le schéma cinétique (3.11) où les fonctions d'équilibre f_{eq} et g_{eq} , définies par (3.6), sont choisies pour des paramètres p et q satisfaisant (3.8) avec $p = \infty$. Alors

$$s_i^{n+1} \leq \max \left(s_{i+1}^n, s_i^n, s_{i-1}^n \right). \quad (3.21)$$

Démonstration du Théorème 3.9

Dans un souci de clarté, nous considérons les notations introduites dans la démonstration du Lemme 3.8. Nous notons

$$f_{eq_i}^n(\xi, \zeta) = f_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta) \quad \text{et} \quad g_{eq_i}^n(\xi, \zeta) = g_{eq}^n(x_i, \xi - u_i^n, \zeta).$$

En posant

$$\begin{aligned} \overline{f_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f_{eq}^n(x - \Delta t \xi, \xi - u_i^n, \zeta) dx, \\ \overline{g_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g_{eq}^n(x - \Delta t \xi, \xi - u_i^n, \zeta) dx, \end{aligned}$$

nous avons

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(K \overline{f_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) + k \overline{g_{eq_i}^n}(\xi, \zeta) \right) d\xi d\zeta.$$

Sous la condition CFL (3.10) et puisque les fonctions d'équilibre sont à support compact, en notant

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

les fonctions $\overline{f_{eq_i}^n}$ et $\overline{g_{eq_i}^n}$ trouvent l'expression d'une combinaison convexe :

$$\overline{f_{eq_i}^n} = \lambda(-\xi_-)f_{eq_{i+1}}^n + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-)f_{eq_i}^n + \lambda(\xi_+)f_{eq_{i-1}}^n, \quad (3.22)$$

$$\overline{g_{eq_i}^n} = \lambda(-\xi_-)g_{eq_{i+1}}^n + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-)g_{eq_i}^n + \lambda(\xi_+)g_{eq_{i-1}}^n. \quad (3.23)$$

L'application H , définie par (3.4), étant strictement convexe, il en résulte l'inégalité suivante :

$$H(\overline{f_{eq_i}^n}, \overline{g_{eq_i}^n}) \leq \lambda(-\xi_-)H(f_{eq_{i+1}}^n, g_{eq_{i+1}}^n) + (1 - \lambda\xi_+ + \lambda\xi_-)H(f_{eq_i}^n, g_{eq_i}^n) + \lambda(\xi_+)H(f_{eq_{i-1}}^n, g_{eq_{i-1}}^n). \quad (3.24)$$

Puisque

$$\left(m_1 - \frac{m_2}{2}|\xi|^2 - \frac{1}{2}(\zeta - v(x, 0))^2\right)_+ \leq m_1, \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2,$$

la définition de $f_{eq_i}^n$ et $g_{eq_i}^n$ implique

$$H(f_{eq_i}^n, g_{eq_i}^n) \leq c(p, \gamma)\rho_i^n(s_i^n)^{2(p-1)},$$

où $c(p, \gamma)$ est une constante positive dont la forme explicite est connue. Nous en déduisons alors la relation suivante :

$$H(\overline{f_{eq_i}^n}, \overline{g_{eq_i}^n}) \leq c(p, \gamma) \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)^{2(p-1)}. \quad (3.25)$$

Considérons le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} m = \min_{f, g} & \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\xi^2}{2} f(x, \xi, \zeta) + g(x, \xi, \zeta) \right) d\xi d\zeta; \right. \\ & f \geq 0, g \geq 0, H(f, g) \leq c(p, \gamma) \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)^{2(p-1)}, \\ & \int_{\mathbb{R}^2} f d\xi d\zeta = \rho_i^{n+1}, \int_{\mathbb{R}^2} \xi f d\xi d\zeta = u_i^{n+1}, \\ & \left. \int_{\mathbb{R}^2} \zeta f d\xi d\zeta = v_i^{n+1}, \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\zeta^2}{2} f d\xi d\zeta = \Sigma_i^{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Par application du Théorème des multiplicateurs de Lagrange, ce problème de minimisation admet un unique minimum défini par

$$\begin{aligned} m = C(p, q, \gamma)\rho_i^{n+1} & \left(\rho_i^{n+1} \sqrt{\frac{\rho_i^{n+1}}{\Sigma_i^{n+1} - \rho_i^{n+1}(v_i^{n+1})^2/2}} \right)^{\frac{2(p-q)}{p+q}} \\ & \left(c(p, \gamma) \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)^{2(p-1)} \right)^{-\frac{2}{p+q}}, \end{aligned}$$

où $C(p, q, \gamma)$ est une constante positive dont la forme explicite est connue.

En remarquant que les fonctions $\overline{f_{eq_i}^n}$ et $\overline{g_{eq_i}^n}$ satisfont les contraintes du problème (3.26) et puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\xi^2}{2} \overline{f_{eq_i}^n} + \overline{g_{eq_i}^n} \right) d\xi d\zeta = \frac{\tilde{p}_i^{n+1}}{\gamma - 1},$$

nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\frac{\tilde{p}_i^{n+1}}{\gamma - 1} \geq m,$$

expression qui trouve la forme développée suivante :

$$\frac{(\gamma - 1)C(p, q, \gamma)}{c(p, \gamma)^{\frac{2}{p+q}}} \frac{\rho_i^{n+1}}{\tilde{p}_i^{n+1}} \left(\rho_i^{n+1} \sqrt{\frac{\rho_i^{n+1}}{\Sigma_i^{n+1} - \rho_i^{n+1}(v_i^{n+1})^2/2}} \right)^{\frac{2(p-q)}{p+q}} \leq \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)^{\frac{4(p-1)}{p+q}}.$$

Sous la condition (3.8) liant p et q , nous avons

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{4(p-1)}{p+q} = \gamma + 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2(p-q)}{p+q} = \gamma - 1.$$

De plus, un calcul long et fastidieux assure que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1)C(p, q, \gamma)}{c(p, \gamma)^{\frac{2}{p+q}}} = 1.$$

En conséquence, nous obtenons

$$(s_i^{n+1})^{\gamma+1} \leq \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)^{\gamma+1}.$$

Puisque $\gamma > 1$, nous en déduisons l'inégalité (3.21) recherchée. ■

Ce résultat nous conduit à considérer des fonctions d'équilibre f_{eq}^n et g_{eq}^n définies pour des paramètres p et q satisfaisant la relation (3.8) mais avec p tendant vers l'infini.

En posant

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho}{2\pi} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}} \frac{\tilde{p}}{\rho},$$

et en notant

$$\begin{aligned} A_n^\pm &= \int_{\pm(\xi - \frac{u}{\beta}) > 0, \zeta \in \mathbb{R}} \xi^n (1 - \xi^2 - \zeta^2)_+^{\frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}} d\xi d\zeta, \\ B_n^\pm &= \int_{\pm(\xi - \frac{u}{\beta}) > 0, \zeta \in \mathbb{R}} \xi^n (1 - \xi^2 - \zeta^2)_+^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} d\xi d\zeta, \\ C_n^\pm &= \int_{\pm(\xi - \frac{u}{\beta}) > 0, \zeta \in \mathbb{R}} \xi^n \zeta^2 (1 - \xi^2 - \zeta^2)_+^{\frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}} d\xi d\zeta, \end{aligned}$$

les flux numériques du schéma cinétique ainsi défini trouvent les expressions suivantes :

$$\mathbf{f}_\rho^\pm(\mathbf{v}) = \alpha(\beta A_1^\pm + u A_0^\pm), \quad (3.27.i)$$

$$\mathbf{f}_{\rho u}^\pm(\mathbf{v}) = \alpha(\beta^2 A_2^\pm + 2\beta u A_1^\pm + u^2 A_0^\pm), \quad (3.27.ii)$$

$$\mathbf{f}_\mathcal{E}^\pm(\mathbf{v}) = \alpha\left(\frac{\beta^3}{2}A_3^\pm + \frac{3\beta^2 u}{2}A_2^\pm + \frac{3\beta u^2}{2}A_1^\pm + \frac{u^3}{2}A_0^\pm + \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\beta^2(\beta B_1^\pm + u B_0^\pm)\right), \quad (3.27.iii)$$

$$\mathbf{f}_{\rho v}^\pm(\mathbf{v}) = \alpha \frac{v}{\rho}(\beta A_1^\pm + u A_0^\pm), \quad (3.27.iv)$$

$$\mathbf{f}_\Sigma^\pm(\mathbf{v}) = \alpha\left(2\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}\frac{\Sigma - \rho v^2/2}{\rho}(\beta C_1^\pm + u C_0^\pm) + \frac{v^2}{2}(\beta A_1^\pm + u A_0^\pm)\right), \quad (3.27.v)$$

Il est important de noter que si l est un entier strictement positif alors pour tout γ tel que

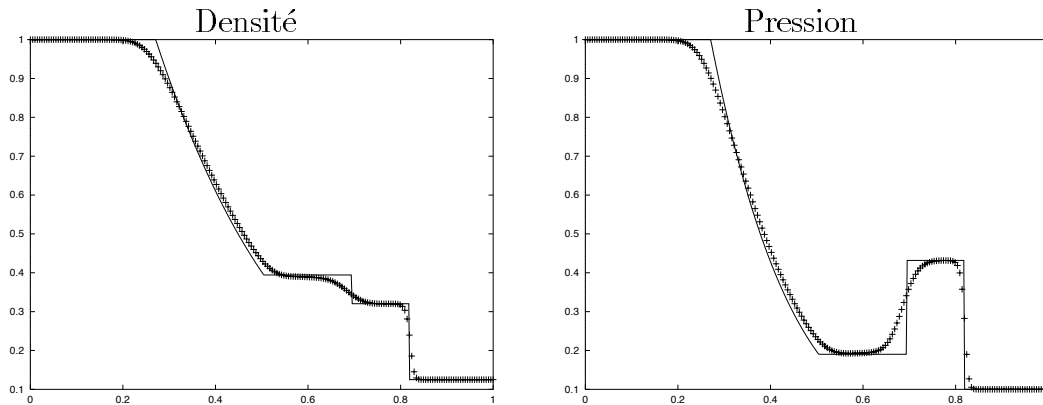
$$\gamma = \frac{2l+1}{2l-1},$$

les intégrales $A_n^\pm$, $B_n^\pm$ et $C_n^\pm$ peuvent être calculées exactement. Nous aurons par exemple $\gamma = 1.4$ pour $l = 3$.

La figure 5.1 présente les résultats obtenus pour la résolution d'un problème de tube à choc de Sod, avec un coefficient adiabatique γ de 1.4, pour la donnée initiale suivante :

$$\begin{array}{llllll} \rho_L & = & 1 & u_L & = & 0 & p_L & = & 1 & k_L & = & 1 & \epsilon_L & = & 1 \\ \rho_R & = & 0.125 & u_R & = & 0 & p_R & = & 0.1 & k_R & = & 0.1 & \epsilon_R & = & 0.1 \end{array}$$

Nous constatons le bon accord entre la solution approchée et la solution exacte du problème de Riemann considéré.



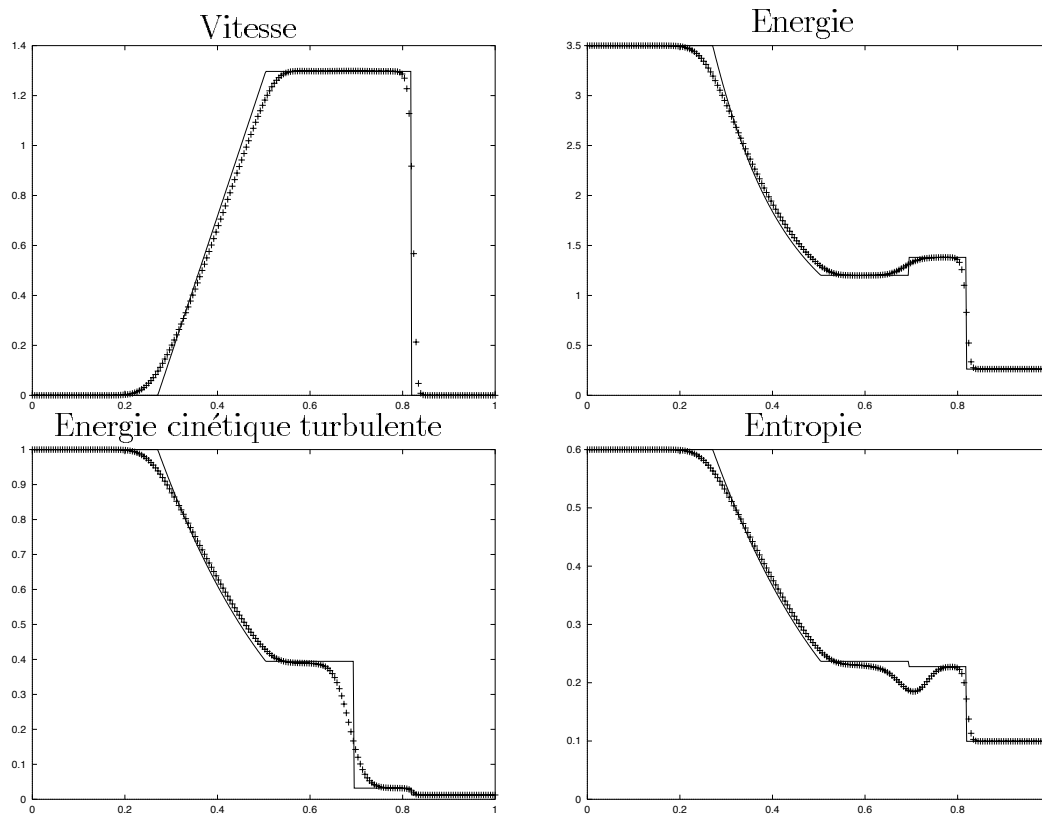


FIG. 5.1 - Tube à choc de Sod sous CFL de 1 pour 200 noeuds

Bibliographie

- [1] B. PERTHAME: *Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 27, No 6 (1990), pp. 1405-1421.
- [2] B. PERTHAME: *Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 29, No 1 (1992), pp. 1-19.
- [3] B. PERTHAME et B. KHOBALATTE: *Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes*, Math. of Comp., Vol 62, No 205 (1994), pp.119-131.
- [4] B. KHOBALATTE: Thèse de doctorant de l'Université d'Orléans (1994).
- [5] P. VILLEDIEU: Thèse de doctorant de l'Université de Toulouse (1994).
- [6] J.P. CROISILLE: Thèse de doctorant de l'Université Paris VI (1990).
- [7] F. COQUEL et M.S. LIOU: *Hybrid upwind splitting (HUS) by a field-by-field decomposition*, NASA Tech. Memo., ICOMP 95-2 (1995).
- [8] A. HARTEN, P.D. LAX et B. VAN LEER: *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, Vol 25, No 1 (1983), pp. 35-61.

- [9] E. TADMOR: *A minimum entropy principle in the gas dynamics equations*, Appl. Numer. Math., No 2 (1986), pp. 211-219.
- [10] B. LARROUTUROU, C. OLIVIER: *On the numerical approximation of the K-eps turbulence model for two dimensional compressible flows*, INRIA report 1526 (1991).
- [11] C. COQUEL et C. MARMIGNON: *Simulation numérique d'écoulements faiblement ionisés en déséquilibre thermochimique*, ONERA (1993).
- [12] B. MOHAMMADI and O. PIRONNEAU, **Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model**, Research in Applied Mathematics, Masson (1994).
- [13] D. SERRE, **Systèmes de lois de conservation**, Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).
- [14] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 1, SMAI (Eds), Ellipse (1991).
- [15] E. GODLEWSKY et P.A. RAVIART, **Hyperbolic systems of conservations laws**, Tome 2, Applied Mathematical Sciences, Vol 118, Springer (1995).
- [16] C. CERCIGNANI, **The Boltzmann equation and its applications**, Scottish Academic Press, Reed AMS No 64, Springer (1975).
- [17] G. Q. CHEN et P. LEFLOCH, *Entropy flux splittings for hyperbolic conservation laws. Part I: General framework*, Comm. Pure Appl. Math., Vol 48, No 7, pp. 691-729 (1995).
- [18] S. K. GODUNOV, *An interesting class of quasilinear systems*, Sov. Math. Dokl., Vol 2, pp. 947-949 (1961).
- [19] M. S. MOCK, *Systems of conservation laws of mixed type*, J. Diff. Eq., Vol 37, pp. 70-88 (1980).