

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*
Par

Solène BULTEAU

Développement et analyse de schémas numériques préservant les régimes asymptotiques de diffusion linéaire et non linéaire

Thèse présentée et soutenue à l'UNIVERSITÉ DE NANTES, le 1 octobre 2019
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Jury :

Président :	M. Mazen SAAD , Professeur, École Centrale de Nantes
Rapporteurs :	M. Laurent CHUPIN , Professeur, Université Clermont Auvergne M. Philippe HELLUY , Professeur, Université de Strasbourg
Examineurs :	M^{me} Marion DARBAS , Maître de conférences, Université de Picardie Jules Verne, Amiens M. Samuel KOKH , Chercheur - Ingénieur, CEA, Saclay
Directeurs de thèse :	M. Christophe BERTHON , Professeur, Université de Nantes M^{me} Marianne BESSEMOULIN-CHATARD , Chargée de Recherche, Université de Nantes

Remerciements

Ce manuscrit ne peut débiter autrement qu'en remerciant toutes les personnes qui ont été à mes cotés durant ces trois années.

Les deux premières personnes que je tiens à remercier sont bien évidemment mes encadrants de thèse, Christophe Berthon et Marianne Bessemoulin-Chatard. Merci à eux d'avoir toujours été présents pour répondre à mes questions et de m'avoir initié à la recherche. Merci de m'avoir aidé et soutenu dans tous ces moments où je me suis perdue dans des estimations ou bien ceux où je me suis retrouvée confrontée à des taux de convergence affolants. Merci Christophe pour ton côté rassurant avec tes fameux "*pas de stress*" et pour toutes tes corrections pertinentes mais parfois difficiles à déchiffrer. Merci Marianne de m'avoir mis des petits coups de boost aux bons moments, en particulier durant la rédaction. Merci énormément d'avoir été si impliquée durant ces trois ans et d'avoir relu tous les chapitres de ce manuscrit (plusieurs fois pour certains). Encore merci à vous deux pour votre bienveillance.

Je tiens aussi à remercier mes rapporteurs, Laurent Chupin et Philippe Helluy d'avoir accepté de relire ce manuscrit dont certaines parties peuvent s'avérer très techniques. Merci pour les corrections que vous y avez apporté ainsi que les nombreuses remarques que vous avez pu me donner dans vos rapports très complets. Je remercie également Marion Darbas d'avoir accepté mon invitation à ma soutenance. Ton exposé au séminaire d'équipe à propos de l'électroencéphalographie chez le nouveau-né m'a beaucoup plu et je suis honorée de te compter parmi les membres du jury. Merci à Samuel Kokh, avec qui j'ai la chance de continuer en post-doctorat, d'avoir également accepté d'assister à ma soutenance. Enfin, je tiens à remercier Mazen Saad, local du LMJL, d'avoir aussi accepté de faire partie du jury.

Je remercie maintenant les membres du laboratoire sans lesquels rien ne serait possible. Merci tout d'abord à Brigitte, qui est l'une des personnes les plus avenantes que je connaisse. Merci pour ces discussions qui s'entamaient à presque chacun de mes passages devant ton bureau. Je tiens également à remercier Stéphanie pour son efficacité et sa gentillesse. Merci en particulier de m'avoir empêché de financer mes vacances avec les fonds du labo. Merci également à Anaïs pour son travail et son efficacité remarquable. Je remercie aussi Annick pour m'avoir ré expliqué la procédure administrative à suivre après chacun de mes voyages à l'étranger. Merci également de t'être occupé de l'organisation de ma soutenance. Merci aussi à Ana Paula qui a malheureusement quitté le laboratoire du-

rant ma deuxième année de thèse. Je remercie Claude et Anh de prendre soin du CRDM. Merci à Saïd et Éric d'avoir répondu présent à chaque problème réseau dans notre bureau.

Je remercie maintenant quelques membres permanents du laboratoire, dont beaucoup ont été mes professeurs durant mes études et avec qui j'ai eu l'occasion de travailler, d'enseigner ou simplement de discuter. Merci tout d'abord à Anaïs et Hélène, que je connais depuis ma L2. Merci d'avoir été de superbes professeures et de m'avoir donné le goût de l'analyse numérique. Merci également de m'avoir laissé la parole sur de nombreux points concernant les différents modules que nous avons enseigné ensemble. Je tiens à remercier chaleureusement François Jauberteau qui a également été l'un de mes professeurs et un collègue pour un module d'analyse numérique. Merci à toi de m'avoir si bien encadré durant mon TER de M1 et d'avoir été si encourageant durant les deux comités de suivi de thèse. Je remercie ensuite Medhi, qui m'a bien aidé pour un algorithme de Newton qui ne voulait pas converger. Merci également Françoise pour ton cours de M1 et ta conduite impeccable vers Bordeaux pour la conférence de clôture de l'ANR ACHyLLES. Merci Anne d'être la responsable de l'équipe SPAN ainsi que pour ton super cours de statistiques en M1 et ton amour pour Mojito. Merci Frédéric Hérau pour ton cours d'analyse complexe, pour ton obstination à vouloir regonfler mon pneu de vélo ainsi que pour le spectacle de ton groupe de musique auquel j'ai pu assister. Merci Joe pour ton implication dans la parité dans le monde de la recherche, c'est très important. Merci Gilles d'être le directeur du laboratoire et de m'avoir conduit à Rennes pour le conseil scientifique du Labex. Merci Éric pour ta fameuse citation du dernier pot de rentrée *"peu ont parlé mais beaucoup ont soif"*. Je ne sais pas si elle est de toi mais j'apprécie beaucoup. Merci Erwann pour ta bonne humeur dans les couloirs. Merci Marco et Ingrid pour m'avoir initié au Bridge. Je remercie également Paolo pour les discussions enrichissantes à propos de la culture italienne. Un grand merci également à Baptiste, Samuel, Philippe, Laurent Guillopé, François Nicoleau, Sylvain, Benoît, Gueorgui ou encore Nicolas Pétrélis pour m'avoir enseigné tous ces modules de mathématiques divers et variés durant mes études.

Il est maintenant venu le moment de remercier les doctorants nantais. C'est surtout grâce à eux si l'ambiance est si bonne et je pense sincèrement que je n'aurais pas pu trouver meilleur laboratoire à ce niveau. Je vais procéder par ordre chronologique d'arrivée. Il est donc normal de commencer par Thomas Guyard qui est là depuis plus longtemps qu'une bonne partie des permanents. Merci à toi pour ta culture et toutes nos discussions culinaires. Un manuscrit de plus dans lequel tu apparais, un nouveau record ! Merci Simon pour tes si mauvais choix. Merci ensuite à Damien, que je n'ai pas côtoyé pendant ses années à Nantes mais que j'ai rencontré au début de ma thèse lors d'un de ses nombreux retours parmi nous. Merci pour les après-midi et/ou soirées taroinche ainsi que la démonstration de fléchettes (même si Thomas B m'a l'air meilleur) dans un bar un peu louche. Merci également à Victor Michel-Dansac, mon grand frère de thèse qui m'a appris le fonctionnement du monde de la recherche lors de notre voyage à Saint-Valery-sur-Somme. Merci pour ta gentillesse, ton humour et ta maladresse naturelle. Merci également d'avoir su répondre à mes nombreuses questions, en particulier sur ce fameux α utilisé au dénominateur alors qu'il peut être nul... Merci ensuite à Florian, jeune papa et joueur de taroinche émérite. Merci pour ta bonne humeur lors des différentes conférences aux-

quelles nous avons participé ensemble. Merci aussi à toi d'avoir répondu à mes questions sur l'étude de l'asymptotique sans recours à des ε (quelle idée !). Merci ensuite à Noémie pour sa bonne humeur. Je garde un très bon souvenir de toi malgré que mon vélo ait été volé durant ta soirée de post-soutenance. Merci Radek pour ta gentillesse. Merci Thomas Wallez pour ton humour parfois un peu lourd. Mais c'est pour ça qu'on t'aime. Merci à toi de nous avoir emmené voir un match du HBC Nantes. En revanche, pas merci pour le rougail dont je n'ai jamais vu la couleur. Merci Sarah d'avoir le courage de le supporter. Merci Olivier pour tes connaissances administratives. Merci Thomas Beaudouin pour toutes les soirées que nous avons passé chez Coralie et toi. Merci d'avoir dit aimer mes gâteaux au chocolat vegan avant d'ajouter "*je n'aime pas le chocolat*". J'y ai presque cru. Merci Guillaume pour ton amour des jeux. Merci Victor VDR pour ton humour incomparable. Merci à toi pour ta joie de vivre, ton amour des navets et ton talent pour le palet. Merci de m'avoir appris comment s'appelle un arbre à kaki. Merci également à Yassin, rare co-bureau. Je tiens ensuite à remercier Vytauté pour sa gentillesse, même si j'aurais aimé la connaître un peu plus. Merci également à Johan. Tu ne fais pas officiellement partie du laboratoire Jean Leray mais c'est tout comme. Merci à toi pour la découverte du Chacha et du fauxmage. Merci pour ta gentillesse même si tu ne nous as pas invité à ta soutenance (il paraît que c'est la faute à un certain Beaudouin). Merci également pour toutes les soirées qui se sont terminées chez Mathilde et toi. Un merci ensuite à El Houssaine. Merci à toi de m'en avoir appris un peu plus sur la culture marocaine, j'espère que le post-doctorat à Nice se passe pour le mieux. Je remercie ensuite Caroline Vernier que j'admire pour son intelligence. Merci pour la soirée raclette et la sortie escape game réussie avec Victor VDR et Benjamin. Félicitations à toi pour ton poste de PRAG, je suis persuadée que tu seras une professeure incroyable. Merci également à Hala, ma co-bureau de deux ans. Merci à toi pour tous les moments que nous avons partagé ainsi que de m'avoir fait découvrir la culture libanaise dont tu es si fière. Je suis impatiente d'aller te voir à Beyrouth pour assister à ton mariage. Je tiens ensuite à remercier Matilde pour son année passée avec nous. Merci pour le fou rire quand tu as invité tout le laboratoire au bar. J'espère qu'un jour je pourrai déguster ton fameux risotto aux crevettes. Bon courage en Norvège ! Merci ensuite aux doctorants arrivés la même année que moi. Merci Emmanuel, bien qu'on ne t'ait vu que très peu. Je te souhaite bon courage pour ta soutenance qui se déroulera peu après la mienne. Merci ensuite à Carobet, ma complice de toujours. Merci pour l'invitation à venir boire le café chez toi avec ma mère et ma grand-mère. Merci aussi pour tes visites quotidiennes, pas forcément très studieuses, dans notre bureau. Merci également à toi pour la journée du voyage à Nantes après laquelle je ne sentais plus mes pieds. On a la gagne et on se comprend. Je remercie également Mathieu de supporter Caro et pour son vin pas toujours bouchonné. Un merci aussi à Fatima que j'ai pu rencontrer à diverses reprises. Merci pour ta gentillesse. Merci Zeinab pour ton humour implacable dont je ne sais pas si tu te rends compte. Merci également à toi pour ta lecture dans le marc de café, j'espère que le gros poisson va bientôt arriver ! Merci ensuite à ma super co-bureau Hélène. Merci pour l'apprentissage des galettes, la découverte de tout un tas de jeux ainsi que toutes les soirées que nous avons passé ensemble. Une de mes meilleures rencontres même si je n'aimerais pas rester coincée sur une île déserte avec toi. Merci également à Laura qui est, à ma connaissance bien sûr, la meilleure prof de l'univers. Merci pour l'invitation au FLIP et de nous avoir proposé de tester tes escape game mathématiques. Merci ensuite

Côme pour ta passion des chats et ta théorie sur les shiitakés. Merci également d'être si facile à convaincre pour quoi que ce soit (fais attention quand même). Merci ensuite à Matthieu, la personne la plus engagée que je connaisse. Merci pour ton humour et ton accent belge. Merci de comprendre mon amour pour hanabi (même si je ne suis pas toujours d'accord avec tes stratégies) et de la taroinche. Merci également à Lisa pour sa gentillesse et ses anecdotes d'élèves à mourir de rire (je pense notamment aux bagues). Bon courage à toi à Mayenne. Merci à Cécile pour les différents congrès auxquels nous avons assisté ensemble. Il faudra qu'on retourne en Espagne pour manger (ou boire ?) du gaspacho ! Merci également à Germain que j'adore (embêter). Merci à toi pour ce moment hilarant durant lequel tu as essayé de mentir à Caroline R à propos de la soirée d'Andrès. C'était magique. Merci également pour ton étourderie, dont je me demande jusqu'où elle peut aller (j'espère que tu ne t'occupes pas de mes cadeaux). Merci aussi d'avoir relu la première partie de ce manuscrit, je te rendrai la pareille ! Merci Maha pour ta gentillesse et tous les gâteaux libanais que tu nous rapportes après chaque vacances. Merci Jean-Michel. Merci Arthur pour le congrès SMAI. Sans plagier Caroline R, ton pas de danse est mémorable. Je tiens à remercier Mohamad pour sa gentillesse et sa bonne humeur. En revanche la planète ne le remercie pas pour la lumière de son bureau. Merci ensuite à Fakhri pour son sourire et son amour pour Hala. Merci également à Fabien, jeune doctorant très travailleur mais qui sait dire oui aux sorties ! Merci à toi pour tes recettes et ton sens de la répartie pour le moins originaux. En effet, il n'est pas courant d'associer les champignons et les clémentines et de répondre "*à plus*" à un "*bon appétit*". Merci Ahn de m'avoir fait découvrir la nourriture vietnamienne et le plum foot. Merci à toi pour ta réplique "*c'est pas trop sucré*", assez inappropriée je trouve, lors d'une dégustation libanaise. Merci à Trung pour son cadeau typiquement mexicain et ses "*Hi !*" à chaque croisement dans le couloir. Merci pour tes chants vietnamiens que j'entends à travers le mur (si si je sais que c'est toi). Je remercie ensuite Alexandre de reprendre mon appartement. J'espère que tu vas t'y plaire et j'espère y être invitée aussi ! Merci également à Meissa, mon petit-frère de thèse qui m'a accompagné dans les calanques. Merci à toi de me poser toutes ces questions, elles me permettent de mieux comprendre certaines notions. Merci co-bureau Maël. Merci Karzan, collègue de l'équipe SPAN. Merci également aux nouveaux doctorants que je n'ai pas pu côtoyer très longtemps. Je remercie Antoine, co-bureau d'un mois, pour sa gentillesse. Merci également à Adrian et Samuel, qui sont deux véritables recrues pour la taroinche. J'espère que cette tradition sera perpétuée grâce à vous.

Je remercie maintenant les post-doctorants/ATER/stagiaires que j'ai pu croiser durant mes trois années à Nantes. Merci à Claire Christophe pour son engagement féministe et son caractère bien trempé. Merci Guillem de m'avoir appris à partager un collier. Un merci ensuite à Nicolas, cher co-bureau d'une année. Merci pour nos discussions en majorité non scientifiques (on était plus sur du commérage). Merci à toi d'avoir été là au congrès SMAI, ça nous a fait plaisir de te revoir. Je tiens également à remercier Nathalie pour sa joie de vivre et son rire communicatif. Je remercie ensuite Moussa et Benoît, ATER durant ma deuxième année. Merci à vous deux pour votre gentillesse. Merci également à Rhiannon pour son sourire et son entrain à chaque sortie dans un bar. Merci Andrès pour la soirée chez toi et ton amour des langues, tu es la personne la plus polyglotte que je connaisse. Un merci également à Claire Brecheteau pour le café avec sa mère chez Caroline R, une

situation improbable. Merci également à toi de m'avoir diverti avec toutes tes histoires incroyables. Je remercie également Amiel, ou Uriel je ne sais plus. Merci pour l'après-midi rhums arrangés ainsi que pour ton humour. Merci également d'avoir relu quelques dizaines de pages de ce manuscrit même si je n'ai pas suivi tous tes conseils. Enfin, last but not the least, je remercie Beatrice, stagiaire italienne lors de ma dernière année de thèse. Merci pour ton amitié et tes taux de convergence improbables. Félicitations à toi pour ta bourse de thèse, cela me conforte dans l'idée que nous allons nous revoir.

Pour terminer avec le LMJL, un petit mot pour Bertrand qui gère la cafétéria d'une main de maître. Merci à toi pour ta mémoire infailible, elle m'impressionnera toujours.

Je souhaite maintenant remercier quelques personnes extérieures au laboratoire Jean Leray. Merci à Gérard Gallice et Pierre-Henri Maire pour m'avoir encadré lors de mon stage de M2. Merci à Clément Cancès d'avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi de thèse. Je remercie un deuxième Lillois, Thomas Rey, de m'avoir proposé de faire un exposé lors de ABPDE3. Merci également à Rodolphe Turpault, dieu de la taroinche et ancien local, pour ses cours d'analyse numérique ainsi que son invitation à la conférence de clôture de l'ANR ACHyLLES et son spectacle de musique (avec Frédéric Héreau). Je tiens aussi à remercier quelques autres chercheurs avec qui j'ai eu l'occasion de discuter, comme Nicolas Seguin, Christophe Chalons, Raphaële Herbin, Thierry Gallouët, Gloria Faccanoni, Carlos Parés, Manuel Castro, Claire Chainais-Hillairet ou encore Benjamin Boutin. Merci également à Xavier Lebrard, que j'ai croisé à de nombreuses reprises lors de conférences. Merci à toi pour les discussions scientifiques que nous avons eu, cela aurait été un plaisir de te compter parmi nous au laboratoire mais le destin en a voulu autrement. Merci également à Katia Ait Ameer, dont je suis ravie d'avoir fait la connaissance lors de l'école d'été Jacques Louis Lions aux Canaries. Merci également aux autres jeunes chercheurs que j'ai pu croiser lors de nombreuses conférences, comme Hélène Hivert, Giulia Lissoni, Emanuela Abbate, Clémentine Courtès, Antoine Zurek, Carlos Parés Pulido, Rémi Tesson ou bien Firas Dhaouadi.

Avant de passer aux non matheux je souhaite remercier les personnes avec qui j'ai eu la chance d'étudier à l'université. Par ordre chronologique encore, je commence par remercier Guillaume Tchernier pour son intelligence et son sens de l'humour si particulier dont, au fond, il doit bien être conscient. Merci ensuite à Samuel Bobin que je continue de côtoyer de temps en temps. Je remercie les agrégés Julien Corbineau, Anthony Chaigneau, Pauline Chateigner et Valentin Garnier. Je suis sûre que vous êtes tous de super enseignants. Merci également à Pierre Humbert qui a choisi la voie des statistiques en M2. Je crois que tu ne regrettes pas ton choix puisque tu vas bientôt soutenir ta thèse toi aussi. Félicitations donc ! Merci également à Julien Michel et Jérémy Hervé qui ont, eux, choisi la même voie que moi. Un merci également à Karine Laurent, ma jumelle de thèse.

Je remercie maintenant mes amis et ma famille de m'avoir soutenu durant ces trois années sans forcément comprendre ce que je pouvais bien faire de mes journées. Merci à Louise, mon amie de toujours et de Cherbourg. Merci à toi de me faire toujours autant rire et merci aussi à Pierre pour ses ronflements impressionnants. Merci Alycia pour tes lap-

sus toujours très révélateurs. Merci également à Leslie pour son humour. Merci à Julian, Isaac et toi d'être si heureux. Merci ensuite à Victor Pineau, mon ami depuis la L1. Merci d'être toujours là malgré qu'on ne se soit pas vu énormément ces trois dernières années. Je remercie ensuite mon frère Dylan, dont je suis légèrement jalouse. Avoir sa propre imprimante 3D c'est quand même trop cool... Merci également à mes grands-parents, mamie Cécile et papi Arsène. Un grand merci à mes parents, qui m'ont soutenu dès le début. Merci également à Christophe et Cécile. Merci ensuite à Bernard, que je considère comme un deuxième père. Merci à toi d'être toujours présent dès que j'ai un problème et aussi pour avoir relu entièrement ma thèse. Pour quelqu'un qui ne fait pas de maths c'est vraiment un exploit.

Le dernier paragraphe de ce chapitre est bien évidemment dédié à Benjamin, qui a su me soutenir durant ces trois dernières années. Merci pour ton intelligence, pour ta mémoire impressionnante et surtout pour ton humour. Merci pour ton amour du brunch maison et de la "*pizzaaa*". Merci de m'apprendre tout un tas d'informations sur la science alimentaire même si certaines notions me passent au-dessus. Peut-être qu'un jour je comprendrai vraiment ce qu'est le gluten. Merci d'être accro comme moi à hanabi. Merci à toi d'assister à mes répétitions d'exposés et de lutter, sans forcément de succès, contre le sommeil. En bref, merci à toi d'être là et merci à toi d'être toi.

Une pensée enfin à tous ceux que j'ai oublié. Merci à vous aussi.

Table des matières

1	Introduction	11
2	Présentation des modèles	17
2.1	Formalisme	17
2.2	Le p -système	18
2.2.1	Le modèle	18
2.2.2	Le régime diffusif	19
2.3	Les équations de Saint-Venant	21
2.3.1	Le modèle	21
2.3.2	Le régime diffusif	22
2.4	Le modèle M1 pour le transfert radiatif	23
2.4.1	Le modèle	23
2.4.2	Le régime diffusif	24
	Partie I : Un résultat de convergence asymptotique	27
3	Taux de convergence asymptotique d'un schéma préservant l'asymptotique pour le p-système	29
3.1	Schémas numériques	32
3.1.1	Schéma hyperbolique	33
3.1.2	Schéma limite	35
3.2	Entropie relative	35
3.3	Résultat dans le cadre d'une pression linéaire	36
3.3.1	Preuve du Théorème 3.3.1	37
3.3.2	Preuve des lemmes techniques	41
3.4	Résultat dans le cadre général	50
3.4.1	Preuve du Théorème 3.4.1	52
3.4.2	Preuve des lemmes techniques	56
3.5	Illustration numérique	75
	Partie II : Développement de schémas préservant l'asymptotique	79
4	Méthode de perturbation HLL par correction visqueuse	87

TABLE DES MATIÈRES

4.1	Schéma HLL avec inclusion de la discrétisation du terme source	88
4.2	Description de la méthode	91
4.3	La question du p -système	93
4.4	Application au modèle M1	96
4.5	Extension aux équations de Saint-Venant	101
5	Schémas préservant le régime asymptotique et tous les états stationnaires	113
5.1	Méthode générique	114
5.2	Description de la méthode pour les équations de Saint-Venant	118
5.3	Extension au p -système et au modèle M1	124
5.3.1	Application au p -système	124
5.3.2	Application au modèle M1	128
5.4	Préservation de l'asymptotique	132
5.4.1	Les équations de Saint-Venant	132
5.4.2	Le p -système	139
5.4.3	Le modèle M1	145
6	Résultats numériques	151
6.1	Le p -système	151
6.1.1	Préservation des états stationnaires par le schéma (PS_{FWB}^ε)	153
6.1.2	Préservation de l'asymptotique	155
6.1.3	Ordre des schémas en espace	159
6.2	Le modèle M1	162
6.2.1	Préservation des états stationnaires par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$	163
6.2.2	Préservation de l'asymptotique	165
6.2.3	Ordre des schémas en espace	168
6.3	Les équations de Saint-Venant	171
6.3.1	Implication du schéma $(SV_{AP\varepsilon})$	174
6.3.2	Préservation des états stationnaires par le schéma (SV_{FWB}^ε)	179
6.3.3	Préservation de l'asymptotique	182
6.3.4	Ordre des schémas en espace	185
	Conclusion et perspectives	189
	Bibliographie	191
	Table des figures	197

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le domaine numérique des schémas préservant l'asymptotique pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques avec terme source [12, 24, 54, 55]. Selon le régime observé, par exemple en temps long ou lorsque le terme source devient raide, les solutions de tels systèmes peuvent potentiellement changer de nature et coïncider avec celles d'équations diffusives [50, 53]. De nombreux exemples provenant de physiques complexes rentrent dans ce cadre. Par exemple dans le domaine de la dynamique des gaz avec les équations d'Euler en friction forte [25, 64], l'hydrodynamique radiative avec le modèle M1 pour le transfert radiatif en temps long [33], la chimiotaxie [49, 52] ou encore l'hydrodynamique [65] et l'acoustique [67].

Du point de vue numérique, il est donc crucial d'utiliser une discrétisation qui reste précise dans les différents régimes pour assurer une bonne approximation. Durant les deux dernières décennies, de nombreux travaux ont été consacrés d'une part à l'élaboration et d'autre part à l'étude de ces schémas préservant l'asymptotique, couramment appelés schémas *asymptotic preserving*. Dans la communauté cinétique, cette notion a d'abord été introduite par Jin *et al.* [54, 56, 73]. En effet, ils ont constaté qu'une attention toute particulière devait être portée à la discrétisation des solutions du système hyperbolique afin de récupérer le régime asymptotique correct. Par exemple, Naldi et Pareschi ont proposé plusieurs discrétisations de l'équation à deux vitesses dans [72] pour obtenir une discrétisation de l'équation de la chaleur à la limite. Dans le même esprit, le lecteur peut se référer aux travaux de Gosse et Toscani [45]. Pour revenir aux exemples de systèmes donnés plus haut, des méthodes numériques préservant l'asymptotique ont été proposées pour les équations d'Euler [15, 20], l'hydrodynamique radiative [2, 13, 18], la chimiotaxie [10, 44, 47, 74] et l'hydrodynamique [34, 36, 46].

Dans ces travaux, un schéma préserve l'asymptotique s'il discrétise le problème considéré dans tous les régimes, en particulier les régimes extrêmes. Cette propriété est illustrée

sur la Figure 1.1 où Δ désigne les paramètres de discrétisation et ε gouverne le régime considéré : plus ε est petit et plus on s'approche du régime limite. Un schéma numérique préserve l'asymptotique si sa discrétisation limite est consistante avec l'équation de diffusion.

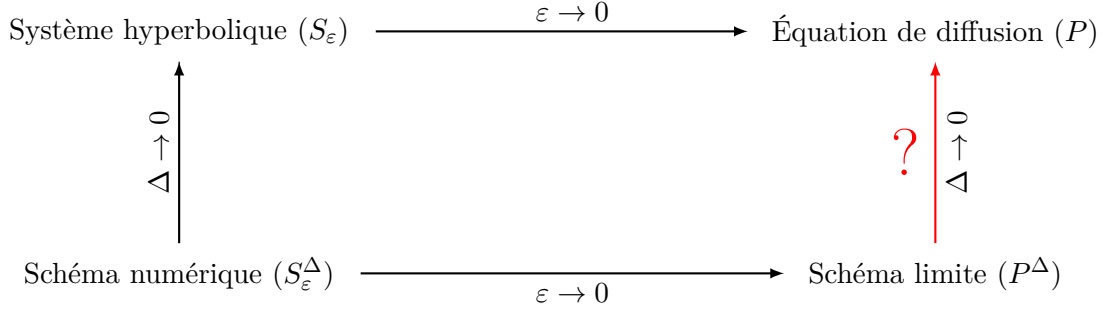


FIGURE 1.1: Illustration de la préservation de l'asymptotique.

Les objectifs de cette thèse sont le développement d'une part et l'analyse d'une autre part de ce type de schémas préservant l'asymptotique. Les trois modèles étudiés sont le p -système avec terme source d'amortissement, les équations de Saint-Venant avec friction de Manning et le modèle M1 avec terme source d'opacité de scattering.

Plan du manuscrit

Chapitre 2 : Présentation des modèles

Ce chapitre est consacré à l'introduction des problèmes étudiés tout au long des travaux menés. Ce sont des systèmes de lois de conservation munis de termes sources qui deviendront dominants dans les régimes diffusifs considérés. Avant tout, un formalisme dans lequel tous ces modèles peuvent s'écrire est proposé.

Le premier modèle considéré est le p -système avec terme source d'amortissement. Il décrit la dynamique des gaz en coordonnées lagrangiennes et, lorsque le temps ainsi que la friction deviennent grands, ses solutions coïncident avec l'équation diffusive des milieux poreux. Le second modèle considéré est celui des équations de Saint-Venant avec terme source de friction de Manning. Il décrit l'évolution de la surface de l'eau et il est dérivé des équations de Navier-Stokes en considérant un comportement de la matière uniforme sur une colonne d'eau. Son régime diffusif est obtenu en temps long et friction dominante et celui-ci est donné par une équation de diffusion comportant un opérateur de dérivation très non linéaire. Celle-ci peut être vue comme une équation de type p -laplacien modifiée. Enfin, le dernier système étudié est appelé modèle M1 et il est muni d'un terme source d'opacité de scattering. Il décrit les interactions entre le rayonnement et la matière, et sa limite de diffusion, atteinte en temps long et forte opacité, est une équation de la chaleur.

Pour chacun de ces modèles, l'équation de diffusion est systématiquement introduite grâce à des changements d'échelle à l'aide d'un petit paramètre ε ainsi que des développements formels de Chapman-Enskog.

Partie I - Un résultat de convergence asymptotique

Dans cette première partie, un résultat de convergence numérique asymptotique pour le p -système est exposé.

Chapitre 3 : Taux de convergence asymptotique pour le p -système

Ce troisième chapitre est dédié à la démonstration rigoureuse d'un résultat de convergence asymptotique pour un schéma numérique. Il s'agit de l'extension au cadre entièrement discrétisé d'une estimation de convergence de solutions faibles du p -système avec terme source d'amortissement vers les solutions de sa limite diffusive prouvé par Lattanzio et Tzavaras dans [60]. Dans cet article, les auteurs ont utilisé la méthode dite d'entropie relative afin de démontrer cette convergence, et ils ont également pu exhiber un taux explicite. Cette méthode consiste à estimer l'erreur entre deux quantités comme l'intégrale d'une fonction, appelée entropie relative, qui correspond au terme d'erreur du premier ordre dans le développement de Taylor d'une fonction d'entropie en la solution diffusive pour le problème étudié. Par la suite, Berthon *et al.* [6] ont élargi ce résultat au cadre semi-discret en espace. Un taux de convergence similaire à celui du cadre continu a pu être exhibé.

Le travail présenté dans ce chapitre est la démonstration du résultat pour des solutions complètement discrétisées à l'aide d'un schéma préservant l'asymptotique donné par Jin *et al.* [56]. Les méthodes utilisées sont similaires à celles employées dans [6, 60] et l'ordre de convergence ainsi obtenu est le même. Cependant, la discrétisation temporelle induit des difficultés supplémentaires, notamment avec de nouveaux termes de reste qui n'étaient pas observés auparavant. Dans la première section de ce chapitre, le schéma hyperbolique donné dans [56] est présenté ainsi que le schéma pour l'équation de diffusion, qui n'est rien d'autre que la limite du schéma hyperbolique puisque celui-ci est *asymptotic preserving*. La section suivante est consacrée à l'introduction d'un couple entropie-flux d'entropie pour le p -système ainsi que du concept d'entropie relative. Des versions discrètes de ces quantités, essentielles par la suite, sont également introduites. Le résultat de convergence est d'abord proposé et démontré dans le cas simplifié d'une pression linéaire. En effet, sous cette condition, de nombreux termes difficiles à traiter disparaissent, en particulier certains venant de la discrétisation temporelle. Le résultat est ensuite présenté dans le cadre d'une fonction de pression plus générale, avec tout de même des restrictions sur celle-ci. Néanmoins, ces hypothèses sont cohérentes avec celles requises dans les cas discret et semi-discret et sont vérifiées par la fonction de pression classiquement utilisée pour le p -système. Enfin, quelques illustrations numériques de ce résultat sont proposées.

Partie II - Développement de schémas préservant l'asymptotique

Dans cette seconde partie, deux méthodes de construction de schémas préservant l'asymptotique diffusive sont présentées. Elles sont chacune appliquées aux trois modèles introduits dans le Chapitre 2, et des résultats numériques sont proposés.

Chapitre 4 : Méthode de perturbation HLL par correction visqueuse

Ce chapitre est consacré à la présentation et l'extension d'une technique de construction de schémas préservant l'asymptotique. Il s'agit de la méthode de perturbation HLL avec correction visqueuse introduite par Berthon et Turpault dans [13]. Elle repose sur un schéma HLL modifié pour inclure la discrétisation du terme source, par ajout d'une onde stationnaire dans le solveur de Riemann approché. L'idée dans [13] consiste à ajouter un degré de liberté supplémentaire, permettant de contrôler la viscosité numérique, dans ce schéma et de le fixer afin d'obtenir un schéma convergeant vers une discrétisation correcte de l'équation de diffusion. Il s'agit alors de choisir une discrétisation de la limite diffusive et de fixer le degré de liberté additionnel pour que la limite du schéma coïncide avec le schéma limite adopté. Avec cette méthode, le schéma hyperbolique construit dépend ainsi complètement du schéma choisi pour la limite diffusive.

Dans ce chapitre, la construction du schéma pour inclure la discrétisation du terme source est d'abord rappelée, puis des précisions sont apportées à l'approche générique de la méthode issue de [13]. Le premier modèle discrétisé est le p -système. Il se trouve que, pour celui-ci, il n'est pas nécessaire de perturber la viscosité numérique pour que le schéma avec inclusion du terme source préserve l'asymptotique. Ensuite l'application de la méthode au modèle M1, que l'on peut également retrouver dans [13], est exposée, en commençant par choisir une discrétisation limite puis en fixant le paramètre additionnel de manière adéquate. Enfin, l'extension aux équations de Saint-Venant est donnée. Celle-ci n'est pas évidente à cause de la forme quadratique du terme source en le débit, qui induit un opérateur de dérivation très non linéaire dans l'équation de diffusion. Comme pour le modèle M1, une discrétisation limite est déterminée puis le paramètre additionnel est fixé correctement. Cependant, le schéma limite choisi est soumis à une condition de stabilité particulièrement restrictive. C'est pourquoi une implication de ce schéma est proposée. Il est alors nécessaire de déterminer le paramètre additionnel faisant en sorte que cette discrétisation implicite soit la limite du schéma hyperbolique. Pour chacun des résultats de convergence asymptotique proposés dans ce chapitre, les démonstrations sont effectuées à l'aide de développements de Chapman-Enskog.

Chapitre 5 : Schémas préservant le régime asymptotique et tous les états stationnaires

Ce chapitre concerne à une seconde méthode de développement de schémas volumes finis. Celle-ci permet de construire une discrétisation des solutions des équations de Saint-Venant de sorte que tous les états stationnaires soient préservés. Cette technique a d'abord été introduite dans [7] puis dans [69] pour un terme source de topographie et a ensuite été étendue à un terme source de friction de Manning dans [70]. Dans ce chapitre, il est établi que les discrétisations ainsi développées, après une simple modification dans l'approximation du terme source, préservent le régime asymptotique en plus de tous les états stationnaires. C'est un résultat d'un intérêt considérable puisqu'il fait le lien entre la préservation des états stationnaires et de l'asymptotique, qui sont, dans le cadre discret, deux concepts différents. Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, l'obtention du schéma préservant les états stationnaires pour les équations de Saint-Venant est décrite. Ensuite, la méthode est adaptée aux deux autres modèles considérés,

le p -système et le modèle M1 pour lesquels la construction est simplifiée en raison de la forme du terme source. Dans la dernière section, les preuves de la préservation de l'asymptotique pour chacun des trois modèles sont présentées. Comme dans le Chapitre 4, les démonstrations sont effectuées à l'aide de développements de Chapman-Enskog des discrétisations. En revanche, contrairement à la méthode développée dans le Chapitre 4, les schémas limites ne sont pas connus ici. En effet, les discrétisations ne reposent pas sur l'ajout d'un paramètre supplémentaire fixé pour capturer la limite diffusive correcte et seule la consistance du schéma limite avec l'équation de diffusion est établie.

Chapitre 6 : Résultats numériques

Dans ce dernier chapitre, des résultats numériques obtenus par les schémas développés dans les Chapitres 4 et 5 sont proposés. Pour chacun des modèles, tous les schémas considérés sont d'abord rappelés. En particulier, des détails concernant l'implication du schéma du Chapitre 4 pour les équations de Saint-Venant sont exposés. Ensuite, la validation de la préservation des états stationnaires par le schéma du Chapitre 5 est effectuée. Pour se faire, le schéma est utilisé avec une condition initiale stationnaire. De plus, selon [70], le schéma peut également être testé avec une condition initiale stationnaire perturbée. Le résultat attendu est une discrétisation stationnaire pour le premier test et un retour à l'équilibre à la précision machine pour le deuxième. Ces expériences sont également proposées pour le schéma préservant l'asymptotique développé dans le Chapitre 4. Ensuite, la validation de la préservation de l'asymptotique est proposée. Pour se faire, l'erreur entre les discrétisations issues des schémas des Chapitres 4 et 5 et celle issue du schéma limite est étudiée, en fonction du paramètre asymptotique ε . Enfin, quelques discussions sur les ordres de convergence en espace des différents schémas proposés sont données.

Publications

Trois articles sont issus de ces travaux de thèse, l'un à paraître et les deux autres en cours de rédaction :

- S. Bulteau, C. Berthon et M. Bessemoulin-Chatard, Convergence rate of an asymptotic preserving scheme for the diffusive limit of the p -system with damping, à paraître dans Communications in Mathematical Sciences,
- S. Bulteau, C. Berthon et M. Bessemoulin-Chatard, An asymptotic preserving scheme for the shallow-water equations with Manning friction using viscous correction of the HLL scheme, travail en cours,
- S. Bulteau, C. Berthon et M. Bessemoulin-Chatard, A fully well-balanced and asymptotic preserving scheme for the shallow-water equations with Manning friction, travail en cours.

Communications

Les travaux de cette thèse ont été présentés lors des conférences suivantes.

- Exposés :
 - Mai 2017 : NUMHYP17 (Numerical methods for hyperbolic problems), Monte verità, Suisse,
 - Mars 2018 : Conférence de clôture du projet ANR ACHyLLES, Bordeaux, France
 - Août 2018 : ABPDE 3 (Asymptotic Behavior of systems of PDE arising in physics and biology), Lille, France,
 - Mai 2019 : Congrès SMAI 2019, Guidel, France,
 - Juin 2019 : Numerical Methods for Multiscale Models arising in Physics and Biology, Nantes, France,
 - Juillet 2019 : Congrès ICIAM 2019, Valence, Espagne.
- Posters :
 - Mai 2018 : Journée de l'école doctorale MathSTIC, Nantes, France,
 - Mai 2018 : Congrès CANUM 2018, Cap d'Agde, France,
 - Juin 2018 : École Franco-Espagnole Jacques-Louis Lions sur la simulation numérique en physique et ingénierie, Las Palmas de Gran Canaria, Espagne.

Financements

Cette thèse a été financée par le Centre Henri Lebesgue et les participations aux différents colloques mentionnés plus haut n'auraient pas pu se faire sans le soutien des projets ANR ACHyLLES (Asymptotic Capturing for HYperbolic conservation Laws with Large Source terms) et MoHyCon (MOdèles multi-échelles et simulation numérique HYbride de semi-CONducteurs) dont les références sont ANR-14-CE25-0001-03 et ANR-17-CE40-0027-01.

Présentation des modèles

Ce chapitre est dédié à la présentation des trois systèmes de lois de conservation munis de termes sources sur lesquels porte ce travail. Un formalisme générique dans lequel tous les modèles peuvent s'écrire ainsi que des précisions sur la méthode de Chapman-Enskog sont d'abord introduits. Ensuite, une section est dédiée à chacun des trois systèmes. Le premier est le p -système, qui décrit la dynamique d'un fluide. Ce modèle, équipé d'un terme source d'amortissement, constitue le sujet d'étude du Chapitre 3 de ce manuscrit, où un résultat de convergence asymptotique numérique rigoureux est présenté. Le second modèle est celui des équations de Saint-Venant, décrivant la hauteur d'eau et la vitesse d'un écoulement fluide. Il est muni d'un terme source de friction de Manning. Enfin, le dernier système étudié est le modèle M1, qui décrit le transfert radiatif entre le rayonnement et la matière. Celui-ci est équipé d'un terme source d'opacité de scattering. La limite diffusive de chaque système est exhibée à l'aide de développements de Chapman-Enskog.

2.1 Formalisme

Les modèles étudiés dans ce travail peuvent tous être écrits sous la forme générique suivante :

$$\partial_t W(x, t) + \partial_x F(W(x, t)) = S(x, W(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Le vecteur W , contenant les inconnues du système, appartient à l'ensemble convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ appelé espace des états admissibles. Le vecteur $F(W) \in \mathbb{R}^N$ désigne le flux et $S(x, W) \in \mathbb{R}^N$ désigne le terme source, qui peut également être écrit sous la forme $\sigma (R(W(x, t)) - W)$ où R ne dépend plus de σ . Ce paramètre σ décrit la raideur du terme source et peut dépendre de l'espace.

Concernant le comportement asymptotique de l'équation (2.1), il est systématiquement

obtenu en introduisant un petit paramètre ε qui contrôle les régimes considérés. Dans ces travaux, les changements d'échelle effectués sont toujours de la forme $t \leftarrow t/\varepsilon$ et $\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon^m$, $m \geq 1$.

Remarque 1. Le changement d'échelle dans le terme source fait intervenir le paramètre $m \geq 1$. Sa valeur dépend de la forme que possède le terme source. Si celui-ci est linéaire, comme c'est le cas pour le p -système et le modèle M1 présentés plus loin, alors m est égal à 1. En revanche, si il est quadratique, comme pour la friction de Manning dans les équations de Saint-Venant, alors il est pris égal à 2.

En utilisant l'écriture du terme source avec R , l'équation (2.1) se réécrit alors :

$$\varepsilon \partial_t W^\varepsilon(x, t) + \partial_x F(W^\varepsilon(x, t)) = \frac{\sigma}{\varepsilon^m} (R(x, W^\varepsilon(x, t)) - W^\varepsilon(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.2)$$

Le comportement asymptotique des solutions W^ε de (2.2) est ensuite étudié à l'aide le développements de Chapman-Enskog. Le développement de Chapman-Enskog est une notion essentielle dans les études de préservation d'asymptotique. Cette méthode formelle consiste à écrire les variables comme une série d'inconnues W^i indépendantes de ε de la façon suivante :

$$W^\varepsilon = W^0 + \varepsilon W^1 + \varepsilon^2 W^2 + \dots$$

Cette technique a d'abord été utilisée pour l'équation de Boltzman [22] où le petit paramètre ε correspond au nombre de Knudsen. Il faut toutefois souligner que cette méthode reste formelle et que des démonstrations plus rigoureuses peuvent être effectuées [14, 64]. C'est en particulier le travail accompli par Lattanzio et Tzavaras dans [60], où les auteurs proposent une preuve de la convergence de solutions de systèmes hyperboliques vers celles du régime de diffusion associé, cela en utilisant la méthode appelée entropie relative. L'objet du Chapitre 3 est d'ailleurs l'extension discrète de ces travaux dans le cas du p -système.

Les trois modèles sur lesquels portent ces travaux sont maintenant présentés.

2.2 Le p -système

2.2.1 Le modèle

Le premier modèle présenté est le p -système. Il décrit l'évolution d'un fluide en utilisant les coordonnées lagrangiennes, mais il peut également être utilisé pour modéliser l'élasticité avec friction [60]. Le terme source de friction intervenant ici décrit l'amortissement du fluide. Le problème s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.3)$$

où $\tau > 0$ est le volume spécifique du gaz et $u \in \mathbb{R}$ est sa vitesse. Les inconnues appartiennent à l'espace des phases suivant :

$$\Omega = \left\{ {}^t(\tau, u); \tau > 0, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le paramètre σ désigne l'intensité de la friction. Concernant la loi de pression $p(\tau) > 0$, elle est supposée assez régulière ; en général $C^2(\mathbb{R}_+^*)$. De plus, pour assurer que le système (2.3) est de nature hyperbolique (pour $\sigma = 0$), il est nécessaire d'imposer également $p'(\tau) < 0$ pour tout $\tau > 0$. Ce modèle peut s'écrire sous la forme générique (2.1) en posant $W = {}^t(\tau, u)$, $F(W) = {}^t(-u, p(\tau))$ et $S(W) = {}^t(0, -\sigma u)$.

Il est important de remarquer que le célèbre modèle de Goldstein-Taylor peut être retrouvé à partir du p -système (2.3). Ce problème, également appelé modèle à deux vitesses ou encore équations du Télégraphe [56, 72], est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t f^+ + \partial_x f^+ = \sigma (f^- - f^+) , \\ \partial_t f^- - \partial_x f^- = \sigma (f^+ - f^-) , \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.4)$$

où les inconnues sont les fonctions de distribution $f^\pm$ associées aux vitesses particulières ± 1 . Les variables macroscopiques de ce modèle sont la densité $\tau = f^+ + f^-$ et le courant $u = f^- - f^+$. Les équations (2.4) donnent alors :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \partial_x \tau = -2\sigma u, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.5)$$

Il s'agit du p -système (2.3) dans le cas d'une friction égale à 2σ et d'une pression linéaire de la forme $p(\tau) = -\tau + p_0$ avec $p_0 > 0$.

La démonstration du résultat donné dans le Chapitre 3 est d'abord proposée pour ce p -système linéarisé.

2.2.2 Le régime diffusif

Le régime asymptotique étudié est celui du temps long et de la friction forte. Les solutions du problème dans ce régime sont obtenues en effectuant le changement d'échelle suivant sur le temps t et la friction σ , à l'aide d'un petit paramètre ε :

$$t \leftarrow t/\varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon.$$

Le lecteur peut se référer au récent article de Mei [68] où l'auteur donne une large littérature consacrée au comportement asymptotique en temps long du p -système avec amortissement (2.3). Après changement d'échelle, le problème (2.3) se réécrit :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \varepsilon \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} u. \end{cases} \quad (2.6)$$

En injectant dans (2.6) les développements de Chapman-Enskog des inconnues suivants :

$$\tau = \tau^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u = u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \tau^0 - \partial_x u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon \partial_t u^0 + \partial_x p(\tau^0) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} (u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{cases}$$

La limite quand ε tend vers zéro de ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_x u^0 = 0, \\ u^0 = 0. \end{cases}$$

La vitesse est donc nulle à l'ordre zéro. Les développements asymptotiques de τ et u s'écrivent donc maintenant :

$$\tau = \tau^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u = \varepsilon (u^1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

En injectant ces développements de Chapman-Enskog dans (2.6), le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \tau^0 - \partial_x u^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t u^1 + \partial_x p(\tau^0) = -\sigma u^1 + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce système admet la limite suivante, quand ε tend vers zéro :

$$\begin{cases} \partial_t \tau^0 - \partial_x u^1 = 0, \\ \partial_x p(\tau^0) = -\sigma u^1. \end{cases} \quad (2.8)$$

La deuxième équation de (2.8) se réécrit :

$$u^1 = -\frac{1}{\sigma} \partial_x p(\tau^0), \quad (2.9)$$

et se nomme, en accord avec [54], l'équilibre local des solutions. L'injecter dans la première équation de (2.8) donne l'équation de diffusion suivante :

$$\partial_t \tau^0 + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\tau^0) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.10)$$

qui coïncide avec l'équation des milieux poreux.

Dans les travaux pionniers de Hsiao et Liu [53], les auteurs établissent rigoureusement la convergence des solutions de (2.3) vers les solutions de (2.10) sous des conditions de régularité sur la donnée initiale. Pour ce faire, ils emploient des estimations d'énergie sur la différence $w - \bar{w}$ où w est solution de (2.3) et $\bar{w}$ solution de (2.10). Cela leur permet d'exhiber une majoration du taux de convergence en norme L^2 et L^∞ de l'ordre de $t^{-1/2}$ lorsque t tend vers l'infini. Par la suite, en adoptant également des techniques d'estimation d'éner-

gie, Nishihara améliore ce taux de convergence dans [75] en estimant l'erreur en $t^{-3/4}$ pour la norme L^2 et $t^{-5/4}$ pour la norme L^∞ . Ensuite, avec ses collaborateurs dans [76], ils affinent encore ce résultat en exhibant des taux pour les normes L^p , $p \in [2, +\infty)$.

Une autre méthode pour analyser la convergence de w solution de (2.3) vers $\bar{w}$ solution de (2.10) repose sur l'étude de l'erreur entre les solutions du système après changement d'échelle (2.7) et celles du système limite (2.10) (voir [60, 68]). Le taux de convergence ainsi obtenu s'exprime en fonction de ε et, pour ce modèle, c'est le résultat obtenu dans [60] qui est étendu au cadre discret dans le Chapitre 3.

2.3 Les équations de Saint-Venant

2.3.1 Le modèle

Le deuxième système présenté dans ce chapitre est le modèle de Saint-Venant. Ce système, introduit par de Saint-Venant dans [30], décrit le mouvement d'un fluide et est obtenu à partir des équations de Navier-Stokes, en intégrant selon la profondeur, c'est-à-dire en partant du postulat que la vitesse reste la même tout le long d'une colonne d'eau. Le terme source choisi ici s'appelle terme source de friction de Manning [63] et modélise la friction du fond du canal. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -ku|u|h^{2-\eta}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.11)$$

où $h(x, t) \geq 0$ est la hauteur d'eau, $u(x, t)$ est sa vitesse et $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ est la constante de gravité. Le modèle de friction de Manning donne $-k|u|uh^{2-\eta}$ comme terme source dans l'équation de quantité de mouvement. Il peut se réécrire $-k|q|qh^{-\eta}$ où $q = hu$ désigne le débit. Le paramètre k , appelé coefficient de Manning, désigne l'intensité de la friction : plus k est grand et plus le fond exerce de friction sur l'eau. Le paramètre η est positif, différent de 1 et en général pris égal à $7/3$.

Le système (2.11) se réécrit avec les variables conservatives h et q de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x\left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = -kq|q|h^{-\eta}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.12)$$

et rentre dans le formalisme (2.1) avec $W = {}^t(h, q)$ le vecteur des inconnues, $F(W) = {}^t(q, \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2})$ le flux et $S(W) = {}^t(0, -kq|q|h^{-\eta})$ le terme source. L'ensemble des états admissibles de W est

$$\Omega = \left\{ {}^t(h, q); h > 0, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 2. Dans ces travaux, seules des hauteurs d'eau strictement positives sont considérées. Le développement de solutions approchées capables de rester précises en transition entre zone sèche et zone mouillée constitue cependant un large sujet d'étude [31, 69, 70].

2.3.2 Le régime diffusif

Ici encore, le régime limite considéré est celui du temps long et d'une forte friction. En revanche, à la différence du terme source du p -système vu précédemment, le terme source de friction de Manning est quadratique en le débit q . En effet, en procédant au changement d'échelle $k \leftarrow k/\varepsilon$, comme pour le p -système, la limite déterminée par la méthode de Chapman-Enskog n'est pas une équation de diffusion. Le changement d'échelle à utiliser ici est $k \leftarrow k/\varepsilon^2$. En injectant ce changement d'échelle de friction ainsi que celui du temps $t \leftarrow t/\varepsilon$ dans (2.12), le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \varepsilon \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = -\frac{k}{\varepsilon^2} |q| q h^{-\eta}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Les développements de Chapman-Enskog suivants sont considérés :

$$h = h^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q = q^0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où la hauteur d'eau à l'ordre zéro h^0 est supposée strictement positive. Cela semble raisonnable puisque c'est également l'hypothèse faite sur h . En injectant ces développements, (2.13) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h^0 + \partial_x q^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon \partial_t q^0 + \partial_x \left(\frac{(q^0)^2}{h^0} + \frac{g(h^0)^2}{2} \right) = -\frac{k}{\varepsilon^2} (q^0 |q^0| (h^0)^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{cases}$$

Ainsi, la limite de ce système quand ε tend vers zéro s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_x q^0 = 0, \\ q^0 |q^0| (h^0)^{-\eta} = 0, \end{cases}$$

et le débit à l'ordre zéro q^0 est donc nul. Les développements de Chapman-Enskog s'écrivent maintenant :

$$h = h^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q = \varepsilon (q^1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

En injectant ces développements, (2.13) devient alors :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h^0 + \varepsilon \partial_x q^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t q^1 + \partial_x \left(\frac{\varepsilon^2 (q^1)^2}{h^0} + \frac{g(h^0)^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -k q^1 |q^1| (h^0)^{-\eta}, \end{cases}$$

et la limite quand ε tend vers zéro de ce système est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h^0 + \partial_x q^1 = 0, \\ \partial_x \left(\frac{g(h^0)^2}{2} \right) = -k q^1 |q^1| (h^0)^{-\eta}. \end{cases} \quad (2.14)$$

La deuxième équation de (2.14), appelée ici encore équilibre local, se réécrit :

$$q^1 = -\text{sign}(\partial_x h^0) \sqrt{\frac{(h^0)^\eta}{k} \left| \partial_x \left(\frac{g(h^0)^2}{2} \right) \right|}. \quad (2.15)$$

L'équation de diffusion s'obtient en injectant l'équilibre local (2.15) dans la première équation de (2.14) :

$$\partial_t h^0 + \partial_x \left(-\text{sign}(\partial_x h^0) \sqrt{\frac{(h^0)^\eta}{k} \left| \partial_x \left(\frac{g(h^0)^2}{2} \right) \right|} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Remarque 3. Si la solution de (2.16) est supposée très régulière alors elle vérifie

$$\partial_t h + \sqrt{\frac{g}{k}} \partial_x \left(-|\partial_x h|^{-\frac{1}{2}} \partial_x h h^{\frac{\eta+1}{2}} \right) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.17)$$

L'expression ci-dessus correspond à l'équation du p -laplacien pour $p = 3/2$ avec le facteur non linéaire additionnel $h^{\frac{\eta+1}{2}}$ dans le flux. En effet, le p -laplacien instationnaire (voir par exemple [1, 4, 79]), s'écrit de la manière suivante, avec $p > 1$:

$$\partial_t h + \partial_x \left(-|\partial_x h|^{p-2} \partial_x h \right) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.18)$$

L'opérateur de dérivation qui apparaît dans (2.16) est très non linéaire. Cela est dû au terme source quadratique en q du système hyperbolique (2.12). Cette non linéarité donne des schémas plus difficiles à construire avec des ordres de convergence moins bons que dans le cas plus simple du p -système, ce qui est observé dans les Chapitres 4, 5 et 6.

2.4 Le modèle M1 pour le transfert radiatif

2.4.1 Le modèle

Le transfert radiatif décrit les interactions entre le rayonnement et la matière. Un modèle souvent utilisé pour décrire ces échanges d'énergie est le modèle M1 [23, 33], obtenu en intégrant les deux premiers moments de l'équation du transfert radiatif [21, 71, 81]. Ici, un seul phénomène d'interaction, appelé scattering, est considéré et le rôle joué par la température est omis. Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -c\sigma F, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.19)$$

avec pour inconnues E l'énergie radiative et F le flux radiatif. L'espace des états admissibles est le suivant :

$$\Omega = \left\{ t(E, F); E > 0, \frac{|F|}{cE} \leq 1 \right\}. \quad (2.20)$$

Le paramètre $c > 0$ est la vitesse de la lumière et $\sigma \geq 0$ désigne le coefficient d'absorption du flux. La fonction χ , appelée facteur d'Eddington, a pour définition :

$$\chi(f) = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}} \quad \text{pour tout } f \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[. \quad (2.21)$$

2.4.2 Le régime diffusif

Le régime étudié est celui du temps long et d'une forte opacité [8, 9, 17]. Pour l'étudier, le même changement d'échelle que celui pratiqué sur le p -système est utilisé dans l'équation (2.19). En effet le terme source dans le modèle M1 est linéaire en F . À l'aide d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$, le problème après changement d'échelle s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \varepsilon \partial_t F + \partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -c \frac{\sigma}{\varepsilon} F. \end{cases} \quad (2.22)$$

Les développements de Chapman-Enskog suivants sont considérés :

$$E = E^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F = F^0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où l'énergie radiative à l'ordre zéro E^0 est supposée strictement positive. Cela semble raisonnable puisque c'est également l'hypothèse faite sur E . En injectant ces développements, (2.22) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E^0 + \partial_x F^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon \partial_t F^0 + \partial_x \left(c^2 E^0 \chi \left(\frac{F^0}{cE^0} \right) \right) = -c \frac{\sigma}{\varepsilon} (F^0 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \end{cases}$$

Ainsi, la limite quand ε tend vers zéro de ce système donne :

$$\begin{cases} \partial_x F^0 = 0, \\ F^0 = 0, \end{cases}$$

et le flux radiatif à l'ordre zéro F^0 est donc nul. Les développements asymptotiques de E et F s'écrivent donc maintenant :

$$E = E^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F = \varepsilon (F^1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

En injectant ces développements de Chapman-Enskog, (2.22) fournit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E^0 + \varepsilon \partial_x F^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t F^1 + \partial_x \left(c^2 E^0 \chi \left(\frac{\varepsilon F^1}{cE^0} \right) \right) = -c \sigma F^1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{cases}$$

et la limite quand ε tend vers zéro du système ci-dessus est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t E^0 + \partial_x F^1 = 0, \\ \partial_x (c^2 E^0 \chi(0)) = -c\sigma F^1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Puisque la définition de χ donnée par (2.21) permet d'écrire $\chi(0) = 1/3$, alors la deuxième équation de (2.23), ici encore appelée équilibre local, se réécrit :

$$F^1 = -\frac{c}{3\sigma} \partial_x E^0. \quad (2.24)$$

L'équation de diffusion s'obtient en injectant l'équilibre local (2.24) dans la première équation de (2.23) :

$$\partial_t E^0 - \partial_x \left(\frac{c}{3\sigma} \partial_x E^0 \right) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.25)$$

Remarque 4. Le paramètre σ peut dépendre de la variable d'espace x . Cependant, si ce n'est pas le cas, l'équation diffusive (2.25) correspond à l'équation de la chaleur avec coefficient de diffusion $\frac{c}{3\sigma}$.

Partie I

Un résultat de convergence asymptotique

La première partie de ce manuscrit est dédiée à la présentation d'un résultat de convergence asymptotique numérique pour le p -système (2.3). Ce résultat est une adaptation au cadre discret des travaux de Lattanzio et Tzavaras [60]. Dans cet article, ils ont rigoureusement démontré, à l'aide de méthodes d'entropie relative, que les solutions faibles du p -système (2.3) convergent vers les solutions de sa limite diffusive (2.8), à savoir l'équation des milieux poreux. Les travaux présentés dans cette partie s'appuient sur ce résultat, obtenu dans le cadre continu, mais également sur l'extension semi-discrete réalisée par Berthon, Bessemoulin-Chatard et Mathis dans [6], où seul l'espace est discrétisé.

La méthode numérique utilisée par la suite est donnée par Jin, Pareschi et Toscani dans [56]. Le schéma ainsi obtenu est *asymptotic preserving* dans le sens où il préserve la limite diffusive. La démonstration de ce résultat peut se faire dans un cadre formel par des développements de Chapman-Enskog mais l'objet de cette partie est la preuve rigoureuse, sans développement asymptotique, de la préservation de l'asymptotique. De plus, le schéma est stable sous une condition indépendante du paramètre de changement d'échelle ε . Le taux de convergence en ε est également exhibé et est en accord avec les taux déjà obtenus dans [6, 60]. Cependant la discrétisation temporelle induit de nombreux termes additionnels de viscosité numérique qui ne sont pas présents dans les cadres continu et semi-discret, ce qui complique fortement la démonstration.

Taux de convergence asymptotique d'un schéma préservant l'asymptotique pour le p -système

Dans ce chapitre, un résultat de convergence numérique avec taux explicite est présenté. Le problème considéré est le p -système, qui décrit la dynamique des gaz isentropiques en coordonnées lagrangiennes. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x p(\tau) = -\sigma v, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3.1)$$

où $\tau > 0$ est le volume spécifique du gaz et $v \in \mathbb{R}$ est sa vitesse. Le paramètre $\sigma > 0$ désigne la friction et la fonction $p > 0$ est la loi de pression. En général elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est telle que $p'(\tau) < 0$ pour tout $\tau > 0$. Cela permet aux valeurs propres de la jacobienne de la fonction de flux de (3.1) d'être réelles et assure alors au système (3.1) d'être de nature hyperbolique. Le vecteur des inconnues, noté $w = {}^t(\tau, v)$, est supposé appartenir à l'espace des phases suivant :

$$\Omega = \left\{ {}^t(\tau, v); \tau > 0, v \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.2)$$

Le système (3.1) est doté de l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x \psi(w) \leq -\sigma v^2, \quad (3.3)$$

où le couple entropie-flux d'entropie (η, ψ) est défini par :

$$\eta(w) = \frac{v^2}{2} - P(\tau) \quad \text{et} \quad \psi(w) = vp(\tau), \quad (3.4)$$

et la fonction P désigne une énergie interne donnée par :

$$P(\tau) = \int_{\tau^*}^{\tau} p(s) ds, \quad (3.5)$$

avec $\tau^* > 0$ un volume spécifique de référence fixé.

Comme évoqué dans le Chapitre 2, le comportement en temps long et friction dominante des solutions du système (3.1) peut être décrit par le système suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \tau^\varepsilon - \partial_x v^\varepsilon = 0, \\ \varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \partial_x p(\tau^\varepsilon) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} v^\varepsilon, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3.6)$$

où le paramètre ε contrôle le régime adopté. Par des développements de Chapman-Enskog des inconnues, la vitesse v^ε est de l'ordre de ε . Ainsi, en posant :

$$v^\varepsilon = \varepsilon u^\varepsilon,$$

le système (3.6) se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau^\varepsilon - \partial_x u^\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t u^\varepsilon + \partial_x p(\tau^\varepsilon) = -\sigma u^\varepsilon, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (3.7)$$

L'inégalité d'entropie associée est la suivante :

$$\partial_t \eta^\varepsilon(\tau^\varepsilon, u^\varepsilon) + \partial_x \psi(\tau^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq -\sigma (u^\varepsilon)^2, \quad (3.8)$$

où l'entropie après changement d'échelle s'écrit :

$$\eta^\varepsilon(\tau, u) = \varepsilon^2 \frac{u^2}{2} - P(\tau). \quad (3.9)$$

La limite du système (3.7) lorsque ε tend vers zéro coïncide donc avec l'équation des milieux poreux donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\tau} = \partial_x \bar{u}, \\ \bar{u} = -\frac{1}{\sigma} \partial_x p(\bar{\tau}), \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3.10)$$

ou de manière équivalente

$$\partial_t \bar{\tau} + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Comme mentionné dans le Chapitre 2, une vaste littérature consacrée au comportement asymptotique en temps long du p -système avec amortissement existe [68]. De plus la convergence des solutions de (3.1) vers les solutions de (3.10) a été largement étudiée, notamment à l'aide de techniques d'estimation d'énergie [53, 75, 76]. Une deuxième méthode pour analyser la convergence de w , solution de (3.1), vers $\bar{w} = {}^t(\bar{\tau}, \bar{u})$, solution de (3.10), repose sur l'étude de l'erreur entre les solutions du système après changement

d'échelle (3.7) et celles du système limite (3.10) (voir [60, 68]). Le taux de convergence ainsi obtenu s'exprime en fonction de ε et c'est ce type de résultat qui est étendu au cadre discret dans ce chapitre. Dans [60], Lattanzio et Tzavaras ont rigoureusement prouvé la convergence des solutions de (3.7) vers les solutions de (3.10) et ont exhibé le taux explicite en adoptant une approche par entropie relative. L'entropie relative est un outil très utile pour comparer la différence (dans un sens à préciser) entre deux solutions. Cette notion a été introduite dans les travaux novateurs de DiPerna [32] et de Dafermos [27] pour les systèmes hyperboliques de loi de conservation. Elle était initialement utilisée pour étudier rigoureusement la convergence de modèles cinétiques vers leur limite hydrodynamique [42, 80]. Plus tard, dans [29], Dafermos adopte cette méthode pour établir un résultat de stabilité sur les solutions classiques dans la classe des solutions faibles entropiques. Ensuite, dans [83], Tzavaras utilise une méthode d'entropie relative similaire pour étudier la convergence de systèmes hyperboliques avec terme source raide vers la limite hyperbolique correspondante. En se fondant sur les mêmes idées, Lattanzio et Tzavaras considèrent dans [60] le cas des limites diffusives. Ils traitent plusieurs systèmes hyperboliques avec terme source du type (3.7) qui convergent vers un problème diffusif quand ε tend vers zéro.

Pour être plus précis, dès qu'un système hyperbolique (H_ε) de limite diffusive (P) est muni d'une fonction d'entropie η^ε , l'entropie relative associée est définie comme le terme quadratique du développement de Taylor de η_ε en $\bar{w}$, solution de (P) :

$$\eta^\varepsilon(w|\bar{w}) = \eta^\varepsilon(w) - \eta^\varepsilon(\bar{w}) - \nabla \eta^\varepsilon(\bar{w}) \cdot (w - \bar{w}). \quad (3.11)$$

L'intégrale spatiale de cette entropie relative s'écrit :

$$\phi^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \eta^\varepsilon(w|\bar{w}) dx, \quad (3.12)$$

et se comporte de manière similaire à $\|w - \bar{w}\|_{L^2}^2$ dès que η^ε est une fonction convexe. Cette fonction permet alors d'estimer l'erreur entre les solutions de (H_ε) et celles de (P) . Le résultat de convergence obtenu par Lattanzio et Tzavaras sur cet estimateur, pour le p -système (3.7), est le suivant :

$$\phi^\varepsilon(t) \leq C \left(\phi^\varepsilon(0) + \varepsilon^4 \right), \quad t \in [0, T], \quad (3.13)$$

où C est une constante positive dépendant uniquement de T , des propriétés de la fonction de pression p et d'estimations sur la limite diffusive $\bar{w}$ supposée régulière.

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir de manière rigoureuse un taux de convergence asymptotique similaire à (3.13) dans le contexte d'un schéma numérique préservant l'asymptotique proposé par Jin *et al.* dans [56]. En général, cette propriété est obtenue formellement grâce à un développement de Chapman-Enskog. Cependant, Mathis et Therme ont récemment adopté dans [66] une technique d'entropie relative pour analyser la limite diffusive d'un schéma volumes finis pour le système de Goldstein Taylor linéaire sur domaine borné. L'entropie relative peut également être appliquée à d'autres contextes numériques. Par exemple, dans [36, 39], les auteurs ont utilisé des estimations d'entropie relative pour

contrôler l'erreur de convergence d'une approximation des équations de Navier-Stokes barotropes (voir aussi [19, 57]). Dans [6], une extension semi-discrète du résultat de Lattanzio et Tzavaras est proposée. Pour ce faire, les auteurs considèrent une approche similaire pour étudier le comportement asymptotique en temps long d'un schéma semi-discrète pour le système non linéaire (3.7). En supplément, les auteurs exhibent un taux de convergence en accord avec (3.13). À la différence des travaux de [6], la discrétisation temporelle, qui est en partie l'objet du travail présenté ici, induit de nouveaux termes d'erreur qui nécessitent une attention toute particulière pour pouvoir être contrôlés.

Dans la section 3.1, le schéma considéré pour (3.7) est détaillé ainsi que sa limite diffusive lorsque ε tend vers zéro, qui discrétise l'équation de diffusion (3.10).

Ensuite, dans la section 3.2, des extensions au cadre complètement discret de la notion d'entropie relative ainsi que d'estimateurs d'erreur sont présentés.

Puis la section 3.3 est dédiée au cas simplifié d'une pression linéaire $p(\tau) = -\tau + p_0$. Cette situation reste en effet très intéressante puisque pour une friction 2σ , le système (3.7) coïncide avec le célèbre modèle de Goldstein Taylor (2.5) présenté dans le Chapitre 2. Son expression se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \partial_x \tau = -2\sigma u, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (3.14)$$

Le résultat de convergence numérique est d'abord proposé pour ce problème dans le Théorème 3.3.1. Puis il est démontré à l'aide de lemmes très techniques. Pour en donner quelques idées, la première étape est de déterminer une loi d'évolution discrète satisfaite par l'entropie relative discrète. Ensuite il s'agit d'exhiber l'équation de dissipation gouvernant l'estimateur d'erreur donné par la moyenne spatiale discrète de l'entropie relative. Les derniers lemmes techniques proposent des estimations astucieuses des termes de dissipation. Cette section se conclue par la preuve des lemmes. Ce cas particulier de pression linéaire permet en fait de comprendre les clés de la preuve du cas non linéaire en supprimant une grosse partie des termes additionnels difficiles à traiter.

Enfin, la section 3.4 est dédiée au résultat de convergence asymptotique discret dans le cadre général. Il est donné dans le Théorème 3.4.1 qui est démontré, lui aussi, à l'aide d'une série de lemmes techniques. Les démonstrations du résultat principal et des lemmes se feront en se référant systématiquement, quand cela est possible, au cas d'une pression linéaire.

Pour finir, plusieurs résultats numériques permettant d'illustrer le résultat du Théorème 3.4.1 dans la section 3.5.

3.1 Schémas numériques

Dans cette partie, les deux schémas considérés sont présentés : le schéma hyperbolique pour (3.7) qui a été donné dans [6, 56] ainsi que son schéma limite discrétisant le modèle asymptotique (3.10).

Le maillage spatial considéré est uniforme et composé des cellules $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$ de taille constante Δx . Concernant la discrétisation temporelle, l'incrément de temps est noté Δt , et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par souci de clarté dans les notations, la discrétisation des solutions de (3.7) est notée $w_i^n = {}^t(\tau_i^n, u_i^n)$ et celle des solutions de (3.10) est notée $\bar{w}_i^n = {}^t(\bar{\tau}_i^n, \bar{u}_i^n)$. Selon [6, 60], les approximations numériques satisfont les limites suivantes pour tout temps :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \tau_i^n &= \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \bar{\tau}_i^n = \tau_{\pm}, \\ \lim_{i \rightarrow \pm\infty} u_i^n &= \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \bar{u}_i^n = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De plus, pour alléger les expressions dans la suite, la notation suivante est proposée :

$$\Delta\tau_i^n = \tau_i^n - \bar{\tau}_i^n \quad \text{et} \quad \Delta u_i^n = u_i^n - \bar{u}_i^n, \quad (3.16)$$

les erreurs entre les discrétisations des solutions de (3.7) et celles des solutions de (3.10). Les opérateurs de dérivation discrets suivants sont également introduits :

$$\begin{aligned} \delta_t X_i^{n+1/2} &= \frac{X_i^{n+1} - X_i^n}{\Delta t}, & \delta_x X_i^n &= \frac{X_{i+1}^n - X_{i-1}^n}{2\Delta x}, \\ \delta_{xx} X_i^n &= \frac{X_{i+1}^n - 2X_i^n + X_{i-1}^n}{\Delta x^2}, & \tilde{\delta}_x X_{i+1/2}^n &= \frac{X_{i+1}^n - X_i^n}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

et les deux normes discrètes suivantes :

$$\begin{aligned} \|X^n\|_{L_x^2} &= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (X_i^n)^2 \Delta x \right)^{1/2}, \\ \|X^n\|_{L_x^\infty} &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} |X_i^n|, \end{aligned} \quad (3.18)$$

pour une quantité discrète $(X_i^n)_i^n$ donnée.

3.1.1 Schéma hyperbolique

L'approche numérique utilisée pour obtenir une discrétisation de (3.7) a été proposée dans [56]. Elle est basée sur une reformulation astucieuse du système comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} u - \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \partial_x p(\tau). \end{cases}$$

Une méthode de splitting à deux étapes est utilisée sur cette reformulation. La première étape consiste en l'approximation des solutions du système hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

tandis que, dans un second temps, les solutions du problème

$$\begin{cases} \partial_t \tau = 0, \\ \partial_t u = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} u - \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \partial_x p(\tau), \end{cases} \quad (3.20)$$

sont approchées. Les discrétisations de chaque étape sont maintenant détaillées. Concernant la première, la discrétisation HLL [51], détaillée plus loin dans l'introduction de la partie II de ce manuscrit, est employée. Pour ce problème elle est donnée par :

$$\begin{cases} \tau_i^{n+1/2} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n), \\ u_i^{n+1/2} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_{i-1}^n)) + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \end{cases} \quad (3.21)$$

où

$$\lambda \leq \max_{0 \leq n \leq N} \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sqrt{-p'(\tau_i^n)} \right).$$

De par le choix de ce schéma, le pas de temps est nécessairement restreint selon la condition CFL hyperbolique suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Concernant la deuxième étape, le système (3.20) est approché par une méthode implicite :

$$\begin{cases} \tau_i^{n+1} = \tau_i^{n+1/2}, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} u_i^{n+1} - \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \frac{p(\tau_{i+1}^{n+1}) - p(\tau_{i-1}^{n+1})}{2\Delta x}. \end{cases} \quad (3.22)$$

En combinant (3.21) et (3.22), le schéma complet s'écrit :

$$\begin{cases} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon^2} u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_{i-1}^n)) + \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} (p(\tau_{i+1}^{n+1}) - p(\tau_{i-1}^{n+1})) \right) \\ \quad + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \end{cases} \quad (3.23)$$

En utilisant les notations (3.17), il se réécrit :

$$\begin{cases} \delta_t \tau_i^{n+1/2} = \delta_x u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \tau_i^n, \\ \varepsilon^2 \delta_t u_i^{n+1/2} = -\sigma u_i^{n+1} - \delta_x p(\tau^{n+1})_i + \varepsilon^2 \Delta t \delta_{tx} p(\tau)_i^{n+1/2} + \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \Delta x \delta_{xx} u_i^n, \end{cases} \quad (3.24)$$

où $\delta_{tx} = \delta_t \delta_x$.

3.1.2 Schéma limite

La discrétisation du système diffusif limite (3.10) s'obtient comme la limite du schéma hyperbolique (3.23) quand ε tend vers zéro. Des calculs directs donnent l'approximation suivante de $\bar{w}$ solution de (3.10) :

$$\begin{cases} \bar{\tau}_i^{n+1} = \bar{\tau}_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (\bar{\tau}_{i+1}^n - 2\bar{\tau}_i^n + \bar{\tau}_{i-1}^n), \\ \bar{u}_i^{n+1} = -\frac{1}{2\sigma \Delta x} (p(\bar{\tau}_{i+1}^{n+1}) - p(\bar{\tau}_{i-1}^{n+1})). \end{cases} \quad (3.25)$$

Comme $\bar{\tau}_{i+1}^n - 2\bar{\tau}_i^n + \bar{\tau}_{i-1}^n = O(\Delta x^2)$ coïncide avec de la viscosité numérique, ce schéma est naturellement consistant avec le régime limite (3.10) d'où la propriété *asymptotic preserving* vérifiée par le schéma (3.23).

En utilisant les notations (3.17), ce schéma se réécrit :

$$\begin{cases} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} = \delta_x \bar{u}_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \bar{\tau}_i^n, \\ \bar{u}_i^{n+1} = -\frac{1}{\sigma} \delta_x p(\bar{\tau}^{n+1})_i. \end{cases} \quad (3.26)$$

3.2 Entropie relative

Afin de présenter le taux de convergence de (3.24) vers (3.26), il est important de définir une mesure de distance entre w_i^n et $\bar{w}_i^n$. De manière complètement analogue au cadre semi-discret [6], cette dernière s'écrit :

$$\phi_\varepsilon^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i^{\varepsilon, n} \Delta x, \quad (3.27)$$

où $\eta_i^{\varepsilon, n}$ est l'entropie relative discrète. Celle-ci est définie comme la fonction d'entropie relative appliquée aux discrétisations hyperbolique et parabolique. L'entropie relative $\eta^\varepsilon(w|\bar{w})$ est définie comme le terme quadratique dans le développement de Taylor de l'entropie η^ε en $\bar{w}$:

$$\eta^\varepsilon(w|\bar{w}) = \frac{\varepsilon^2}{2} (u - \bar{u})^2 - P(\tau|\bar{\tau}),$$

où $P(\tau|\bar{\tau})$ s'écrit :

$$P(\tau|\bar{\tau}) = P(\tau) - P(\bar{\tau}) - p(\bar{\tau})(\tau - \bar{\tau}). \quad (3.28)$$

L'entropie relative discrète s'écrit donc de la manière suivante :

$$\eta_i^{\varepsilon, n} = \eta^\varepsilon(w_i^n|\bar{w}_i^n) = \frac{\varepsilon^2}{2} (u_i^n - \bar{u}_i^n)^2 - P(\tau_i^n|\bar{\tau}_i^n). \quad (3.29)$$

3.3 Résultat dans le cadre d'une pression linéaire

Dans cette partie, le cadre du modèle bivitesse, donné par (3.14), est considéré. La pression s'écrit alors :

$$p(\tau) = -\tau + p_0, \quad (3.30)$$

avec $p_0 > 0$. La restriction sur les volumes spécifiques

$$\tau < p_0, \quad (3.31)$$

est bien entendu nécessaire pour garder une pression positive. En considérant la fonction de pression (3.30) et la friction de (3.14) donnée par 2σ , les schémas (3.24) et (3.32) se réécrivent respectivement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \delta_t \tau_i^{n+1/2} = \delta_x u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \tau_i^n, \\ \varepsilon^2 \delta_t u_i^{n+1/2} = -2\sigma u_i^{n+1} + \delta_x \tau_i^{n+1} - \varepsilon^2 \Delta t \delta_{tx} \tau_i^{n+1/2} + \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \Delta x \delta_{xx} u_i^n, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\text{et } \begin{cases} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} = \delta_x \bar{u}_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \bar{\tau}_i^n, \\ \bar{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2\sigma} \delta_x \bar{\tau}_i^{n+1}. \end{cases} \quad (3.33)$$

De plus l'expression de l'entropie relative est donnée par :

$$\eta_i^{\varepsilon,n} = \eta^\varepsilon(w_i^n | \bar{w}_i^n) = \frac{\varepsilon^2}{2} (u_i^n - \bar{u}_i^n)^2 + \frac{1}{2} (\tau_i^n - \bar{\tau}_i^n)^2. \quad (3.34)$$

L'entropie relative discrète $\eta_i^{\varepsilon,n}$ représente donc bien une mesure de distance entre w_i^n et $\bar{w}_i^n$.

Théorème 3.3.1. *Soit $T = (N + 1)\Delta t$ le temps final, (w_i^n) donné par le schéma (3.32) et $(\bar{w}_i^n)$ donné par le schéma asymptotique (3.33). Les trois hypothèses suivantes sont nécessaires.*

— Il existe une constante $K > 0$ telle que les discrétisations asymptotiques vérifient :

$$\|\delta_t \bar{u}^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \leq K \quad \text{et} \quad \|\delta_{xx} \bar{u}^n\|_{L_x^2}^2 \leq K. \quad (3.35)$$

— Le pas de temps Δt est restreint selon une condition CFL parabolique :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq C_p, \quad (3.36)$$

où

$$C_p = \frac{\sigma}{10}. \quad (3.37)$$

— Le paramètre ε vérifie la condition de petitesse suivante :

$$\varepsilon^2 \leq \frac{\sigma \Delta x}{4(C_p \Delta x + \lambda)}. \quad (3.38)$$

Alors le résultat de convergence suivant est satisfait :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq C \left(\phi_\varepsilon^0 + \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L_x^2}^2 + \varepsilon^4 \right), \quad (3.39)$$

où C est une constante positive dépendant seulement de T et des paramètres σ , λ , K et a .

L'estimation (3.39) contient le taux de convergence escompté ε^4 ainsi que le terme $\phi_\varepsilon^0 + \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L_x^2}^2$ qui correspond à l'erreur au temps initial $t = 0$ pour des conditions initiales générales. Dans la section 3.5, les données initiales utilisées sont bien préparées, c'est-à-dire qu'elles vérifient :

$$\phi_\varepsilon^0 + \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L_x^2}^2 = 0. \quad (3.40)$$

Le résultat (3.39) donne alors un taux de l'ordre de ε^4 en accord avec celui établi par Lattanzio et Tzavaras (3.13) dans [60].

Pour obtenir (3.39), les hypothèses (3.35), (3.36) et (3.38) sont nécessaires. Essentiellement, elles permettent toutes un contrôle des termes de viscosité numérique. Celles sur la discrétisation $(\bar{w}_i^n)$ (3.35) sont analogues à celles requises dans [60] (ou encore [6]). Elles semblent naturelles puisque les solutions du système asymptotique (3.10) sont supposées assez régulières. La condition CFL parabolique (3.36) est pertinente au regard des expérimentations numériques réalisées avec le schéma (3.23) et est naturelle puisque le schéma limite considéré est une discrétisation explicite de la limite de diffusion. Cette condition CFL est traitée dans la section 3.5, consacrée aux résultats numériques. Enfin, l'hypothèse concernant (3.38) n'est pas du tout restrictive puisque le paramètre ε est petit par définition.

3.3.1 Preuve du Théorème 3.3.1

Afin d'établir le taux de convergence (3.39), plusieurs lemmes techniques sont nécessaires. Ils sont prouvés dans la sous-section 3.3.2.

En premier lieu et conformément aux travaux issus de [6, 60], une loi d'évolution discrète satisfaite par la mesure de distance ϕ_ε^n définie par (3.27) est exhibée. Pour ce faire, il faut d'abord établir une loi d'évolution discrète vérifiée par l'entropie relative discrète. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Soit $(w_i^n)_i^n$ donné par (3.32) et $(\bar{w}_i^n)_i^n$ donné par (3.33). L'entropie relative discrète $\eta_i^{\varepsilon,n}$, définie par (3.34), satisfait la relation suivante :*

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon,n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= -2\sigma \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \\ &\quad + R_i^{n,1} + R_i^{n,2} + R_i^{n,3} + R_i^{n,4}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

où les termes de reste sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 R_i^{n,1} &= -\varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} - \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \bar{\tau}_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n, \\
 R_i^{n,2} &= -\varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n, \\
 R_i^{n,3} &= -\Delta t \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n, \\
 R_i^{n,4} &= -\frac{1}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

et où le flux d'entropie discret s'écrit :

$$\psi_{i+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left(\Delta u_{i+1}^{n+1} \Delta \tau_i^{n+1} + \Delta u_i^{n+1} \Delta \tau_{i+1}^{n+1} \right). \tag{3.43}$$

La relation (3.41) doit maintenant être intégrée en temps et en espace. En sommant (3.41) en espace, la loi d'évolution discrète suivante sur ϕ_ε est obtenue :

$$\begin{aligned}
 \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= -2\sigma \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 \Delta x \\
 &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \\
 &\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

En utilisant (3.15), la dérivée discrète du flux d'entropie discret s'annule à l'infini :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) = 0,$$

et en injectant la définition de la norme L^2 discrète (3.18) dans (3.44) puis en intégrant numériquement temps, l'expression suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} \Delta t &= -2\sigma \sum_{n=0}^N \left\| \Delta u^{n+1} \right\|_{L_x^2}^2 \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \left\| \delta_t \Delta u^{n+1/2} \right\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\
 &\quad + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^N \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} \Delta t = \phi_\varepsilon^{N+1} - \phi_\varepsilon^0,$$

alors la relation suivante sur ϕ_ε^{N+1} est déterminée :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^{N+1} = & \phi_\varepsilon^0 - 2\sigma \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t \\ & + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Maintenant l'objectif est d'acquérir une estimation de ϕ_ε^{N+1} de la forme suivante :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq \alpha \left(\phi_\varepsilon^0 + \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 + \varepsilon^4 \right) + \beta \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t, \quad (3.46)$$

où $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 0$ sont deux constantes dépendant uniquement du temps final $T = (N+1)\Delta t$ et des paramètres σ , λ , K et a . En effet, dès qu'une telle inégalité est vérifiée, le lemme de Gronwall discret suivant peut être appliqué.

Lemme 3.3.3 (Lemme de Gronwall discret). *Soit $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive. Si il existe des constantes $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ et $\gamma \geq 0$ telles que*

$$\phi^{N+1} \leq \alpha \left(\phi^0 + \gamma \right) + \beta \sum_{n=0}^N \phi^n \Delta t \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (3.47)$$

alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\phi^{N+1} \leq \alpha \left(\phi^0 + \gamma \right) e^{\beta(N+1)\Delta t} \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (3.48)$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie suivante, consacrée à la démonstration des lemmes techniques. L'utilisation du résultat (3.48) sur l'estimation (3.46) permet d'écrire :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq \alpha e^{\beta T} \left(\phi_\varepsilon^0 + \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 + \varepsilon^4 \right),$$

et la preuve du théorème 3.3.1 est achevée.

Afin d'avoir une estimation de la forme (3.46), il est nécessaire de contrôler chaque terme de reste, essentiellement par ε^4 , des termes de condition initiale, des termes pouvant être compensés par les termes négatifs de (3.45) ou des termes en ϕ_ε^n . Dans la suite, une série d'estimations requises est proposée aux travers de trois lemmes.

Lemme 3.3.4. *En supposant l'hypothèse (3.35) sur les normes discrètes de $(\bar{w}_i^n)$, alors pour tout $\theta > 0$ l'estimation suivante sur le premier résidu est vérifiée :*

$$\sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t \leq \theta \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{KT}{4\theta} \left(1 + 2\sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2 \varepsilon^4. \quad (3.49)$$

Lemme 3.3.5. *En supposant la condition CFL (3.36), l'estimation suivante sur le deuxième*

résidu est vérifiée :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t &\leq \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} C_p \Delta x + \lambda \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} C_p \Delta x + \lambda \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2\lambda^2 C_p \varepsilon^2 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Lemme 3.3.6. *En supposant la condition CFL (3.36), l'estimation suivante sur le troisième résidu est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t &\leq C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 4C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &+ 12\lambda^2 C_p \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Après de fastidieux calculs, les estimations issues des trois lemmes (3.49)–(3.51) permettent de réécrire (3.45) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^{N+1} &\leq 3\phi_\varepsilon^0 + 2a_1 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_3 \varepsilon^4 + 2a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t \\ &+ \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t, \end{aligned} \quad (3.52)$$

où a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont définis par :

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\sigma + \theta + C_p + \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} C_p \Delta x + \lambda \right), \\ a_2 &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} C_p \Delta x + \lambda \right) + 4C_p, \\ a_3 &= \frac{KT}{4\theta} \left(1 + 2\sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2, \\ a_4 &= 2\lambda^2 C_p (\varepsilon^2 + 6). \end{aligned}$$

De plus, les deux derniers termes de l'estimation (3.52) sont négatifs :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t &= -\frac{1}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \Delta x \Delta t \leq 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t &\leq 0, \end{aligned}$$

et l'expression (3.52) se réécrit donc :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq 3\phi_\varepsilon^0 + 2a_1 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_3 \varepsilon^4 + 2a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \quad (3.53)$$

Le coefficient précédant le terme en $\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2$ dans (3.53) n'est, a priori, pas signé. En revanche, celui précédant $\|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2$ est clairement positif. Une attention particulière doit alors être portée sur ce terme pour qu'il puisse être compensé. En appliquant une intégration par parties discrète temporelle, ce terme se réécrit :

$$\begin{aligned} 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t &= 2a_2 \sum_{n=0}^N \left(\|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 - \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \right) \Delta t + 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &= -2a_2 \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_2 \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\leq 2a_2 C_p \Delta x^2 \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 + 2a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t, \end{aligned}$$

et (3.53) se réécrit comme suit :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq 3\phi_\varepsilon^0 + 2(a_1 + a_2) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_3 \varepsilon^4 + 2a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t + 2a_2 \Delta t \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2. \quad (3.54)$$

En choisissant $\theta = \sigma$ et sous les hypothèses (3.36) et (3.38) :

$$a_1 + a_2 \leq 0,$$

et l'inégalité (3.46) est obtenue en choisissant $\alpha \geq \max(3, 2a_3, 2a_2 \Delta t)$ et $\beta \geq 2a_4$. La preuve du Théorème 3.3.1 est ainsi achevée.

3.3.2 Preuve des lemmes techniques

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du lemme de Gronwall discret 3.3.3 ainsi que des lemmes techniques 3.3.2 à 3.3.6. Celle du Lemme 3.3.3 est d'abord proposée.

Preuve du Lemme de Gronwall 3.3.3. Le résultat (3.48) est obtenu par récurrence.

— Comme $\alpha \geq 1$ et $\gamma \geq 0$ alors $\phi^0 \leq \alpha(\phi^0 + \gamma)$ et la relation

$$x \leq e^x - 1 \quad \forall x \geq 0, \quad (3.55)$$

donne directement :

$$\beta \Delta t \phi^0 \leq \alpha (\phi^0 + \gamma) (e^{\beta \Delta t} - 1),$$

qui se réécrit sous la forme suivante :

$$\alpha(\phi^0 + \gamma) + \beta\Delta t\phi^0 \leq \alpha(\phi^0 + \gamma)e^{\beta\Delta t}.$$

En considérant l'hypothèse (3.47) l'expression ci-dessus implique le résultat requis (3.48) au rang $N = 0$.

— Soit $N \geq 1$. L'hypothèse de récurrence suivante est vérifiée pour $n \in 0, \dots, N - 1$:

$$\phi^{n+1} \leq \alpha(\phi^0 + \gamma)e^{\beta(n+1)\Delta t}. \quad (3.56)$$

— En utilisant l'hypothèse (3.48) ainsi que l'hypothèse de récurrence (3.56), l'inégalité suivante s'écrit :

$$\phi^{N+1} \leq \alpha(\phi^0 + \gamma) + \beta\Delta t\phi^0 + \beta \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(\phi^0 + \gamma)e^{\beta(n+1)\Delta t}\Delta t,$$

ou encore, après sommation de la série géométrique :

$$\phi^{N+1} \leq \beta\Delta t\phi^0 + \alpha(\phi^0 + \gamma) \left(1 + \beta\Delta te^{\beta\Delta t} \frac{e^{\beta N\Delta t} - 1}{e^{\beta\Delta t} - 1} \right).$$

De simples calculs utilisant la relation (3.55) donnent :

$$1 + \beta\Delta te^{\beta\Delta t} \frac{e^{\beta N\Delta t} - 1}{e^{\beta\Delta t} - 1} \leq e^{\beta(N+1)\Delta t} + 1 - e^{\beta\Delta t}.$$

La combinaison des deux estimations ci-dessus donne :

$$\phi^{N+1} \leq \beta\Delta t\phi^0 + \alpha(\phi^0 + \gamma) \left(e^{\beta(N+1)\Delta t} + 1 - e^{\beta\Delta t} \right),$$

ce qui se réécrit de la façon suivante en utilisant encore une fois (3.55) :

$$\phi^{N+1} \leq (e^{\beta\Delta t} - 1) (\phi^0 - \alpha(\phi^0 + \gamma)) + \alpha(\phi^0 + \gamma)e^{\beta(N+1)\Delta t}.$$

La preuve se termine en remarquant que, puisque $\alpha \geq 1$ et $\gamma \geq 0$ alors $\phi^0 - \alpha(\phi^0 + \gamma) \leq 0$.

□

Pour des raisons de simplicité dans la présentation, deux résultats systématiquement utilisés dans la suite sont établis dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.7. (i) Pour toute quantité discrète (X_i^n) donnée par une combinaison linéaire des (w_i^n) et $(\bar{w}_i^n)$, les estimations suivantes sur les normes discrètes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \|\delta_x X^n\|_{L_x^2} &\leq \frac{1}{\Delta x} \|X^n\|_{L_x^2}, & \|\tilde{\delta}_x X^n\|_{L_x^2} &\leq \frac{2}{\Delta x} \|X^n\|_{L_x^2}, \\ \|\delta_{xx} X^n\|_{L_x^2} &\leq \frac{4}{\Delta x^2} \|X^n\|_{L_x^2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

(ii) L'estimation suivante sur l'erreur entre les discrétisations (τ_i^n) et $(\bar{\tau}_i^n)$ est satisfaite :

$$\|\Delta\tau^n\|_{L_x^2}^2 \leq 2\phi_\varepsilon^n. \quad (3.58)$$

Démonstration. Les majorations données dans (3.57) s'obtiennent en utilisant les définitions des opérateurs de dérivation discrets (3.17) et par intégration par partie discrète en espace combinée avec l'hypothèse (3.15). Le point (i) est ainsi démontré.

Concernant le point (ii), l'estimation (3.58) s'obtient facilement en utilisant l'expression de l'entropie relative (3.34) pour écrire la minoration suivante de l'estimateur d'erreur :

$$\phi_\varepsilon^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} (\Delta u_i^n)^2 + \frac{1}{2} (\Delta \tau_i^n)^2 \right) \Delta x \geq \frac{1}{2} \|\Delta\tau^n\|_{L_x^2}^2,$$

et l'estimation (3.58) attendue est retrouvée. $\square$

La preuve du premier lemme technique, donnant la loi d'évolution discrète sur l'estimateur d'erreur ϕ_ε^n , est maintenant établie.

Preuve du Lemme 3.3.2. Par définition de l'entropie relative discrète (3.34) et de l'opérateur discret δ_t donné par (3.17), l'expression suivante sur η^ε est obtenue :

$$\delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} = \frac{\varepsilon^2}{2\Delta t} \left((\Delta u_i^{n+1})^2 - (\Delta u_i^n)^2 \right) + \frac{1}{2\Delta t} \left((\Delta \tau_i^{n+1})^2 - (\Delta \tau_i^n)^2 \right).$$

Puisque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - b^2 = 2a(a - b) - (a - b)^2$, alors :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} &= \frac{\varepsilon^2}{2\Delta t} \left(2\Delta u_i^{n+1} (\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n) - (\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta t} \left((\Delta \tau_i^{n+1})^2 - (\Delta \tau_i^n)^2 \right). \end{aligned}$$

La relation ci-dessus peut être reformulée de la manière suivante :

$$\delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} = \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \Delta u_i^{n+1/2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 + \frac{1}{2\Delta t} \left((\Delta \tau_i^{n+1})^2 - (\Delta \tau_i^n)^2 \right), \quad (3.59)$$

et, par les deux schémas (3.32) et (3.33), la loi d'évolution sur Δu_i^n s'écrit :

$$\varepsilon^2 \delta_t \Delta u_i^{n+1/2} = -2\sigma \Delta u_i^{n+1} + \delta_x \Delta \tau_i^{n+1} - \varepsilon^2 \Delta t \delta_{tx} \tau_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2}.$$

En injectant l'égalité ci-dessus dans (3.59), la loi d'évolution se reformule comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} &= -2\sigma \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 + \Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta \tau_i^{n+1} - \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \tau_i^{n+1/2} \\ &+ \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2\Delta t} \left(\left(\Delta \tau_i^{n+1} \right)^2 - \left(\Delta \tau_i^n \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

De plus, l'utilisation de la définition du flux d'entropie relatif discret (3.43) donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= -\frac{1}{2\Delta x} \left(\Delta u_{i+1}^{n+1} \Delta \tau_i^{n+1} + \Delta u_i^{n+1} \Delta \tau_{i+1}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. - \Delta u_i^{n+1} \Delta \tau_{i-1}^{n+1} - \Delta u_{i-1}^{n+1} \Delta \tau_i^{n+1} \right) \\ &= -\Delta \tau_i^{n+1} \delta_x \Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta \tau_i^{n+1}. \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant $\Delta \tau_i^{n+1} \delta_x \Delta u_i^n$ dans l'expression ci-dessus, l'égalité suivante est obtenue :

$$\Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta \tau_i^{n+1} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) - \Delta t \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} - \Delta \tau_i^{n+1} \delta_x \Delta u_i^n. \quad (3.61)$$

L'utilisation des schémas (3.32) et (3.33) conduit à :

$$\delta_x \Delta u_i^n = \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n,$$

et (3.61) devient :

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta \tau_i^{n+1} &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) - \Delta t \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} \\ &\quad - \Delta \tau_i^{n+1} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n. \end{aligned} \quad (3.62)$$

L'utilisation de l'expression (3.62) dans (3.60), donne alors :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= -2\sigma \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 - \Delta t \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} \\ &+ \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n - \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \tau_i^{n+1/2} \\ &+ \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \\ &- \Delta \tau_i^{n+1} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{1}{2\Delta t} \left(\left(\Delta \tau_i^{n+1} \right)^2 - \left(\Delta \tau_i^n \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de modifier les termes contenant uniquement de la discrétisation hyperbolique (seulement w_i^n sans $\bar{w}_i^n$) en ajoutant et en ôtant la quantité analogue en la

discrétisation parabolique :

$$\begin{aligned}
 \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} (\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1}) &= -2\sigma (\Delta u_i^{n+1})^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t (\delta_t \Delta u_i^{n+1/2})^2 \\
 &\quad - \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} - \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \bar{\tau}_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \\
 &\quad - \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n \\
 &\quad - \Delta t \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \\
 &\quad - \Delta \tau_i^{n+1} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{1}{2\Delta t} \left((\Delta \tau_i^{n+1})^2 - (\Delta \tau_i^n)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Le résultat attendu (3.41) est ainsi obtenu en reconnaissant les résidus $R_i^{n,1}$, $R_i^{n,2}$, $R_i^{n,3}$ et $R_i^{n,4}$ donnés par (3.42) dans l'expression ci-dessus. $\square$

Les preuves des Lemmes 3.3.4 à 3.3.6, donnant les estimations sur les résidus $R_i^{n,1}$, $R_i^{n,2}$ et $R_i^{n,3}$ sont maintenant présentées.

Preuve du Lemme 3.3.4. En utilisant la définition des résidus (3.42), on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &= -\varepsilon^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x - \varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \bar{\tau}_i^{n+1/2} \Delta x \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \Delta x.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

L'objectif ici est de majorer ce terme par des termes en $\|u^{n+1}\|_{L_x^2}^2$ et des termes en ε^4 . L'utilisation du schéma limite sur la vitesse (3.33) permet d'écrire :

$$\delta_{tx} \bar{\tau}_i^{n+1/2} = 2\sigma \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2},$$

et l'injection de l'expression ci-dessus dans (3.63) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &= -\varepsilon^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x - 2\sigma \varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \Delta x.
 \end{aligned}$$

Ensuite, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux trois termes de l'expression ci-dessus donne :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &\leq \varepsilon^2 \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_t \bar{u}^{n+1/2}\|_{L_x^2} + 2\sigma \varepsilon^2 \Delta t \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_t \bar{u}^{n+1/2}\|_{L_x^2} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \bar{u}^n\|_{L_x^2}.
 \end{aligned}$$

Les hypothèses (3.35) conduisent alors à :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \leq \sqrt{K} \varepsilon^2 \left(1 + 2\sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right) \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}.$$

Ainsi pour tout $\theta > 0$, l'application de l'inégalité de Young à l'expression ci-dessus donne :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \leq \theta \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{K}{4\theta} \left(1 + 2\sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2 \varepsilon^4.$$

Il suffit de sommer en temps l'expression ci-dessus et de remarquer que $\sum_{n=0}^N \Delta t = T$ pour obtenir le résultat attendu (3.49). $\square$

Concernant la démonstration des lemmes 3.3.5 et 3.3.6 pour les majorations de $R_i^{n,2}$ et $R_i^{n,3}$, il est nécessaire de procéder différemment. En effet, contrairement au résidu $R_i^{n,1}$, ceux-ci ne contiennent pas de termes contenant uniquement de la discrétisation limite ($\bar{w}_i^n$) et les hypothèses (3.35) ne peuvent pas être utilisées. Il s'agit, essentiellement à l'aide des schémas numériques (3.32) et (3.33) et d'inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, de majorer ces résidus par des termes en $\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2$, en $\|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2$ et en $\sum_{n=0}^N \phi^n \Delta t$.

Preuve du Lemme 3.3.5. En utilisant la définition des résidus (3.42), on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x = -\varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta \tau_i^{n+1/2} \Delta x + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n \Delta x. \quad (3.64)$$

Tous les termes contenus par $R_i^{n,2}$ sont donc précédés de ε^2 et puisqu'on s'autorise une condition de petitesse sur ε (3.38), il n'est pas nécessaire de faire des estimations très fines. L'utilisation des schémas sur les volumes spécifiques (3.32) et (3.33), permettent d'écrire :

$$\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} = \delta_x \Delta u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n,$$

et en injectant la relation ci-dessus dans (3.64), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x &= -\varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_x \delta_{xx} \Delta u_i^n \Delta x - \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n \Delta x. \end{aligned}$$

Ici encore, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux trois termes de l'expression ci-dessus conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x &\leq \varepsilon^2 \Delta t \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_x \delta_{xx} \Delta u^n\|_{L_x^2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta t \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_x \delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \Delta u^n\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

De plus, en appliquant les majorations (3.57) à $\|\delta_x \delta_x \Delta u^n\|_{L_x^2}$, $\|\delta_x \delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2}$ et $\|\delta_{xx} \Delta u^n\|_{L_x^2}$, l'estimation devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x &\leq \frac{\varepsilon^2 \Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} + \frac{2\lambda \varepsilon^2 \Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} \\ &\quad + \frac{2\lambda \varepsilon^2}{\Delta x} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2}, \end{aligned}$$

et en utilisant l'estimation (3.58) sur $\|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}$:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \leq \frac{2\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \lambda \right) \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} + \frac{2\lambda \varepsilon^2 \Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \sqrt{2\phi_\varepsilon^n}.$$

Enfin, l'application de l'inégalité de Young aux deux termes de l'expression ci-dessus donne :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \leq \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{3\Delta t}{2\Delta x} + \lambda \right) \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \lambda \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 + \frac{2\lambda^2 \varepsilon^2 \Delta t}{\Delta x^2} \phi_\varepsilon^n.$$

Une intégration discrète en temps ainsi que l'utilisation de la condition CFL (3.36) donnent l'estimation requise (3.50). $\square$

Preuve du Lemme 3.3.6. En utilisant la définition des résidus (3.42), on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x = A^n + B^n,$$

où

$$\begin{aligned} A^n &= -\Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} \Delta x, \\ B^n &= \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x. \end{aligned}$$

Contrairement à $R_i^{n,2}$, il n'y a pas de terme précédé par ε^2 dans ce résidu. L'hypothèse sur la petitesse de ε (3.38) ne peut donc en aucun cas être utilisée. Il est alors nécessaire d'être plus délicat dans les estimations. Tout d'abord, une estimation pour A^n est proposée. Une intégration par parties discrète en temps fournit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &= \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \delta_x \Delta u_i^n \Delta x \Delta t \\ &\quad - \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^{N+1} \delta_x \Delta u_i^{N+1} \Delta x + \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^0 \delta_x \Delta u_i^0 \Delta x. \end{aligned} \tag{3.65}$$

En utilisant les schémas sur les volumes spécifiques (3.32) et (3.33), l'égalité suivante est obtenue :

$$\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} = \delta_x \Delta u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n,$$

et injecter la relation ci-dessus dans (3.65) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &= \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\delta_x \Delta u_i^n)^2 \Delta x \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \delta_x \Delta u_i^n \Delta x \Delta t \\ &\quad - \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^{N+1} \delta_x \Delta u_i^{N+1} \Delta x + \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^0 \delta_x \Delta u_i^0 \Delta x. \end{aligned}$$

Ici encore, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux quatre termes de l'expression ci-dessus ainsi que les estimations sur les dérivées discrètes (3.57) donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \Delta t \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\Delta \tau^{N+1}\|_{L_x^2} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\Delta \tau^0\|_{L_x^2} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}, \end{aligned}$$

puis l'estimation (3.58) sur $\|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \sqrt{2\phi_\varepsilon^n} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \Delta t \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2\phi_\varepsilon^{N+1}} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2\phi_\varepsilon^0} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à appliquer l'inégalité de Young aux trois derniers termes pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{2\lambda^2 \Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2. \end{aligned} \tag{3.66}$$

L'utilisation de cette inégalité sur le terme de bord en $N + 1$ est effectuée de façon à obtenir un facteur $1/2$ devant ϕ_ε^{N+1} . En effet, quand l'estimation sera injectée dans (3.45), ce terme sera compensé par le terme à gauche de l'inégalité, lui aussi en ϕ_ε^{N+1} .

De plus des majorations directes donnent les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2}^2 &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ \text{et } \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t, \end{aligned}$$

qui sont injectées dans (3.66) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{3\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \frac{2\lambda^2 \Delta t}{\Delta x^2} \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0. \end{aligned}$$

La condition CFL (3.36) permet d'écrire l'estimation finale suivante pour A^n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 3C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + 2\lambda^2 C_p \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Maintenant, l'estimation de B^n est établie. En ajoutant et soustrayant $\Delta \tau_i^n$ puis en procédant à une intégration par parties discrète en espace, cette quantité s'écrit :

$$B^n = \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x + \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^n \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x.$$

En utilisant une intégration par parties discrète en espace, le deuxième terme de cette égalité se réécrit de la façon suivante, l'opérateur $\tilde{\delta}_x$ étant défini en (3.17) :

$$\frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^n \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x = -\frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\tilde{\delta}_x \Delta \tau_i^n)^2 \Delta x \leq 0.$$

Ce terme étant négatif, l'estimation suivante de B^n suivante est alors vérifiée :

$$B^n \leq \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x. \quad (3.68)$$

En utilisant les schémas (3.32) et (3.33), l'égalité suivante s'écrit :

$$\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} = \delta_x \Delta u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \tau_i^n,$$

et injecter l'expression ci-dessus dans (3.68) donne l'inégalité suivante :

$$B^n \leq \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_x \Delta u_i^n \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x + \frac{\lambda^2}{4} \Delta x^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\delta_{xx} \Delta \tau_i^n)^2 \Delta x.$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier terme de l'estimation ci-dessus donne alors :

$$B^n \leq \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \|\delta_x \Delta u^n\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2} + \frac{\lambda^2}{4} \Delta x^2 \Delta t \|\delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2,$$

puis l'utilisation des majorations (3.57) sur les opérateurs de dérivation discrets permet d'obtenir :

$$B^n \leq \frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} + \frac{4\lambda^2\Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2.$$

Enfin, l'estimation (3.58) sur $\Delta \tau^n$ et la condition CFL (3.36) permettent d'écrire :

$$B^n \leq 2\lambda C_p \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \sqrt{2\phi_\varepsilon^n} + 4\lambda^2 C_p \phi_\varepsilon^n,$$

puis l'inégalité de Young appliquée au premier terme de l'estimation ci-dessus donne :

$$B^n \leq C_p \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 + 10\lambda^2 C_p \phi_\varepsilon^n. \quad (3.69)$$

Le résultat attendu (3.51) est retrouvé en sommant l'estimation (3.67) de A^n avec l'intégration discrète en temps de l'estimation (3.69) de B^n . $\square$

3.4 Résultat dans le cadre général

Dans cette partie, le théorème dans le cadre d'une pression plus générale est présenté. Des conditions sur cette fonction de pression restent cependant nécessaires afin d'établir un taux de convergence similaire au cadre linéaire (3.39). Néanmoins, celles-ci autorisent l'utilisation de la loi de pression usuelle donnée par $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ avec $\gamma > 1$. Malgré l'ajout de ces hypothèses additionnelles sur p , de nombreux termes de résidus sont plus difficiles à traiter que ceux donnés par (3.42) dans le cas linéaire.

Théorème 3.4.1. *Soit $T = (N + 1)\Delta t$ le temps final, $(w_i^n)_i^n$ donné par le schéma (3.24) et $(\bar{w}_i^n)_i^n$ donné par le schéma asymptotique (3.26).*

Les cinq hypothèses suivantes sont nécessaires.

— *Il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} \|\delta_t \bar{w}^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &\leq K, & \|\delta_{xx} \bar{w}^n\|_{L_x^2}^2 &\leq K, \\ \|\delta_t \bar{\tau}^{n+1/2}\|_{L_x^\infty} &\leq K, & \text{et} \quad \|\tilde{\delta}_x \bar{\tau}^n\|_{L_x^\infty} &\leq K. \end{aligned} \quad (3.70)$$

— *Il existe une constante $L_\tau > 0$ telle que les volumes spécifiques sont bornés comme suit :*

$$\frac{1}{L_\tau} \leq \tau_i^n, \bar{\tau}_i^n \leq L_\tau \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3.71)$$

— *Il existe une constante $L_p > 0$ telle que la pression p et ses trois premières dérivées sont bornées de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_p} &\leq p(\tau) \leq L_p, & -L_p &\leq p'(\tau) \leq -\frac{1}{L_p}, \\ \frac{1}{L_p} &\leq p''(\tau) \leq L_p, & -L_p &\leq p^{(3)}(\tau) \leq -\frac{1}{L_p}, \end{aligned} \quad \forall \tau \in [1/L_\tau, L_\tau]. \quad (3.72)$$

— Le pas de temps Δt est borné par une constante $\Delta t_m > 0$:

$$\Delta t \leq \Delta t_m. \quad (3.73)$$

— Le pas de temps Δt est restreint selon une condition de CFL parabolique :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq C_p, \quad (3.74)$$

où

$$C_p = \frac{\sigma}{4\alpha}, \quad (3.75)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha = & 2L_p^3 + 9L_p^2 \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t_m^2 \right) + \frac{1}{2} \\ & + L_p \left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{3}K^2 \Delta t_m + KL_\tau + \frac{10}{3}L_\tau + K \Delta t_m \right. \\ & \left. + \frac{1}{6}K^2 \Delta t_m^2 + \frac{11}{4}KL_\tau \Delta t_m + \frac{16}{3}L_\tau^2 \right). \end{aligned}$$

— Le paramètre ε vérifie la condition de petitesse suivante :

$$\varepsilon^2 \leq \frac{\sigma \Delta x}{C_p \Delta x \left(4 + 3L_p^2 (4 + K^2 \Delta t_m^2) \right) + 8\lambda}. \quad (3.76)$$

Alors le résultat de convergence suivant est satisfait :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq C \left(\phi_\varepsilon^0 + \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L_x^2}^2 + \varepsilon^4 \right), \quad (3.77)$$

où C est une constante positive dépendant seulement de T et des paramètres σ , λ , K , L_τ et L_p .

L'estimation (3.77) contient le taux de convergence attendu ε^4 , en accord avec les résultats de [6, 60], ainsi que le terme $\phi_\varepsilon^0 + \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L_x^2}^2$ désignant l'erreur au temps initial. Cette partie de l'estimation peut disparaître à condition d'adopter une condition initiale bien préparée au sens de (3.40).

Des remarques sur les hypothèses nécessaires à l'établissement de (3.77) sont maintenant données.

Les conditions (3.70) traduisent la régularité que doit satisfaire la solution du problème limite (3.10). Celles concernant la norme L^2 discrète sont analogues à celles du cadre linéaire (3.35), cependant des hypothèses sur les normes L^∞ discrètes, absentes du cas linéaire, sont maintenant essentielles afin de contrôler les termes issus de la non linéarité de la pression. Elles sont en accord avec les hypothèses des théorèmes de [6, 60] dans le cadre continu et semi-discret.

La condition (3.71) impose des bornes sur les volumes spécifiques des discrétisations de (3.7) et (3.10). Celles-ci peuvent sembler restrictives mais sont indispensables à l'établissement de (3.77). Il faut préciser que cette hypothèse est déjà nécessaire dans le cadre

linéaire par (3.31) mais également dans la démonstration du résultat en semi-discret [6]. Concernant les hypothèses de régularité (3.72) sur la fonction de pression p , des conditions sur les trois premières dérivées sont indispensables. Dans [6, 60], seules des conditions sur les deux premières dérivées sont demandées, mais, ici, les termes de viscosité numérique issus de la discrétisation temporelle nécessitent ces conditions additionnelles afin d'être contrôlés. Il faut préciser que la fonction de pression utilisée usuellement $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ avec $\gamma > 1$ satisfait cette condition.

L'hypothèse (3.73) impose une borne supérieure sur le pas de temps. Il n'est pas nécessaire à la preuve du Théorème 3.4.1 que celle-ci soit fixée, tant qu'elle ne dépend pas de ε . Il est même possible de choisir $\Delta t_m = T$ puisqu'on a directement $\Delta t \leq T$.

Enfin, l'hypothèse concernant la petitesse de ε (3.76) n'est pas restrictive puisque ce paramètre est petit par définition.

3.4.1 Preuve du Théorème 3.4.1

Cette partie est dédiée à la démonstration du Théorème 3.4.1. Celle-ci est globalement construite de la même manière que la preuve du Théorème 3.3.1 décrite dans la sous-section 3.3.1 dans le cadre d'une pression linéaire. En effet, le résultat (3.77) est lui aussi prouvé à l'aide d'une séquence de lemmes techniques qui seront démontrés dans la sous-section 3.4.2. La réelle difficulté du cas non linéaire apparaît dans les démonstrations de ces lemmes.

De la même manière que pour le cadre linéaire, la première étape est d'exhiber une loi d'évolution discrète satisfaite par la mesure de distance ϕ_ε^n définie par (3.27). Pour ce faire, le lemme suivant permet tout d'abord d'établir une loi d'évolution vérifiée par l'entropie relative.

Lemme 3.4.2. *Soit $(w_i^n)_i^n$ donné par (3.24) et $(\bar{w}_i^n)_i^n$ donné par (3.26). L'entropie relative discrète $\eta_i^{\varepsilon,n}$, définie par (3.29), satisfait l'expression suivante :*

$$\delta_t \eta_i^{\varepsilon,n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) = -\sigma \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 + R_i^{n,1} + R_i^{n,2} + R_i^{n,3} + R_i^{n,4}, \quad (3.78)$$

où les termes de reste sont donnés par :

$$\begin{aligned} R_i^{n,1} &= -\varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} + \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} p(\bar{\tau})_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n, \\ R_i^{n,2} &= \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta p(\tau)_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n, \\ R_i^{n,3} &= \Delta t \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{xx} \Delta \tau_i^n, \\ R_i^{n,4} &= \left(-Q_i^{n+1/2} + \bar{Q}_i^{n+1/2} + \bar{q}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \right) \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + \left(p(\tau_i^{n+1}) - Q_i^{n+1/2} \right) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

avec

$$Q_i^{n+1/2} = \frac{P(\tau_i^{n+1}) - P(\tau_i^n)}{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}, \quad \bar{Q}_i^{n+1/2} = \frac{P(\bar{\tau}_i^{n+1}) - P(\bar{\tau}_i^n)}{\bar{\tau}_i^{n+1} - \bar{\tau}_i^n}, \quad \bar{q}_i^{n+1/2} = \frac{p(\bar{\tau}_i^{n+1}) - p(\bar{\tau}_i^n)}{\bar{\tau}_i^{n+1} - \bar{\tau}_i^n}, \quad (3.80)$$

et où le flux d'entropie discret s'écrit :

$$\psi_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\Delta u_{i+1}^{n+1} \Delta p(\tau_i^{n+1}) + \Delta u_i^{n+1} \Delta p(\tau_{i+1}^{n+1}) \right). \quad (3.81)$$

La relation (3.78) doit maintenant être sommée en temps et en espace pour obtenir la loi d'évolution discrète suivante sur ϕ_ε :

$$\begin{aligned} \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= -\sigma \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 \Delta x - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \Delta x \\ &\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x + \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x. \end{aligned} \quad (3.82)$$

En utilisant (3.15), la dérivée discrète du flux d'entropie discret s'annule à l'infini :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) = 0,$$

et en injectant la définition de la norme L^2 discrète (3.18) dans (3.82) puis en sommant en temps, l'expression suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} \Delta t &= -\sigma \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^N \delta_t \phi_\varepsilon^{n+1/2} \Delta t = \phi_\varepsilon^{N+1} - \phi_\varepsilon^0,$$

alors la relation suivante sur ϕ_ε^{N+1} est déterminée :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^{N+1} &= \phi_\varepsilon^0 - \sigma \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t. \end{aligned} \quad (3.83)$$

L'objectif est, encore une fois, d'acquérir une estimation de ϕ_ε^n de la forme suivante :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq \alpha \left(\phi_\varepsilon^0 + \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 + \varepsilon^4 \right) + \beta \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t, \quad (3.84)$$

où $\alpha > 1$ et $\beta > 0$ sont deux constantes dépendant uniquement du temps final $T = (N+1)\Delta t$ et des paramètres σ , λ , K , L_τ et L_p . Dès qu'une telle inégalité est vérifiée, le lemme de Gronwall discret 3.3.3 permet, ici encore, d'obtenir le résultat attendu (3.77).

Afin d'avoir une estimation de la forme (3.84), il est nécessaire de contrôler chaque terme de reste. Comme dans la preuve avec pression linéaire, ces résidus sont essentiellement estimés par des termes en ε^4 , des termes de condition initiale, des termes pouvant être compensés par les termes négatifs de (3.83) ou des termes en ϕ_ε^n . Dans la suite, une série d'estimations requises est proposée au travers de quatre lemmes.

Lemme 3.4.3. *En supposant l'hypothèse (3.70) sur les normes discrètes de $(\bar{w}_i^n)$, alors pour tout $\theta > 0$, l'estimation suivante sur le premier résidu est vérifiée :*

$$\sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \Delta t \leq \theta \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{KT}{4\theta} \left(1 + \sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2 \varepsilon^4. \quad (3.85)$$

Lemme 3.4.4. *En supposant l'hypothèse (3.70) sur les normes discrètes de $(\bar{w}_i^n)$ ainsi que les hypothèses (3.72) sur la pression et la condition CFL (3.74), l'estimation suivante sur le second résidu est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \Delta t &\leq \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{C_p}{2} \Delta x + \lambda \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(3L_p^2 C_p \Delta x \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \lambda \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + 3\varepsilon^2 L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Lemme 3.4.5. *En supposant les hypothèses (3.70) sur les normes discrètes de $(\bar{w}_i^n)$ ainsi que les conditions (3.72) sur la pression et la condition CFL (3.74), l'estimation suivante sur le troisième résidu est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x \Delta t &\leq \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0 + L_p^3 C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + C_p \left(9L_p^2 \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \frac{1}{2} + L_p^3 \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \left(9L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) + 2L_p \left(\lambda^2 C_p + 2\lambda K L_p \right) \right) \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Lemme 3.4.6. *En supposant l'hypothèse (3.70) sur les normes discrètes de $(\bar{w}_i^n)$ ainsi que les conditions (3.71) sur les volumes spécifiques, celles sur la pression (3.72) et la condition CFL (3.74), l'estimation suivante sur le dernier résidu est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \Delta t &\leq C_p L_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\
 &\quad + L_p^2 \left(8\lambda^2 C_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + K \left(\frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{3} K \Delta t^2 + L_\tau \Delta t + K \Delta t + 1 \right) \right) \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Après de fastidieux calculs, les estimations issues des quatre lemmes (3.85)–(3.88) permettent de réécrire (3.83) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \phi_\varepsilon^{N+1} &\leq \frac{3}{2} \phi_\varepsilon^0 + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + a_1 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + a_3 \varepsilon^4 \\
 &\quad + a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t,
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

où a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont définis par :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\sigma + \theta + \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{C_p}{2} \Delta x + \lambda \right) + L_p^3 C_p, \\
 a_2 &= \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(3L_p^2 C_p \Delta x \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \lambda \right) + C_p \left(9L_p^2 \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \frac{1}{2} + L_p^3 \right) \\
 &\quad + C_p L_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right), \\
 a_3 &= \frac{KT}{4\theta} \left(1 + \sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2, \\
 a_4 &= 3\varepsilon^2 L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \\
 &\quad + 9L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) + 2L_p \left(\lambda^2 C_p + 2\lambda K L_p \right) \\
 &\quad + L_p^2 \left(8\lambda^2 C_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + K \left(\frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{3} K \Delta t^2 + L_\tau \Delta t + K \Delta t + 1 \right) \right).
 \end{aligned}$$

De plus, le dernier terme de l'estimation (3.89) est négatif :

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta u^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \leq 0,$$

et l'expression (3.89) se réécrit donc :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^{N+1} \leq & \frac{3}{2} \phi_\varepsilon^0 + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + a_1 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + a_3 \varepsilon^4 \\ & + a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Comme dans le cadre linéaire, le coefficient a_1 du terme en $\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}$ n'est, a priori, pas signé. En revanche, le coefficient a_2 précédant le terme en $\|\Delta u^n\|_{L_x^2}$ est positif. Une intégration par partie discrète en temps permet, ici encore, d'écrire :

$$a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \leq a_2 \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 \Delta t + a_2 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t,$$

et, en utilisant l'estimation ci-dessus, (3.90) se réécrit de la manière suivante :

$$\phi_\varepsilon^{N+1} \leq 3\phi_\varepsilon^0 + 2(a_1 + a_2) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + 2a_3 \varepsilon^4 + 2a_4 \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t + 2a_2 C_p \Delta x^2 \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2. \quad (3.91)$$

En choisissant $\theta = \sigma/2$ et sous les hypothèses (3.74) et (3.76) :

$$a_1 + a_2 \leq 0,$$

et l'inégalité (3.84) est obtenue en choisissant $\alpha \geq \max(3, 2a_3, 2a_2 C_p \Delta x^2)$ et $\beta \geq 2a_4$. La preuve du Théorème 3.4.1 est achevée.

3.4.2 Preuve des lemmes techniques

Ce paragraphe est consacré à la démonstration des lemmes techniques 3.4.2 à 3.4.6. Pour des raisons de simplicité dans la présentation, quatre résultats, systématiquement utilisés dans la suite, sont tout d'abord établis dans le lemme suivant.

Lemme 3.4.7. (i) Les discrétisations issues des schémas numériques (3.24) et (3.26) satisfont la relation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2} &= \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds \\ &+ \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \Delta \tau_i^n \int_0^1 I_{i+1/2,s}^n ds + \Delta x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 s I_{i+1/2,s}^n ds, \end{aligned} \quad (3.92)$$

où

$$I_{i+1/2,s}^n = \int_0^1 p'' \left(\bar{\tau}_i^n + s \Delta x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n + t \left(\Delta \tau_i^n + s \Delta x \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right) \right) dt. \quad (3.93)$$

(ii) En supposant les hypothèses (3.72) sur la régularité de la pression, les discrétisations issues des schémas numériques (3.24) et (3.26) vérifient l'estimation suivante :

$$\|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2 \leq 2L_p \phi_\varepsilon^n. \quad (3.94)$$

(iii) En supposant les hypothèses (3.72) sur la régularité de la pression et la condition CFL (3.74), les discrétisations issues des schémas numériques (3.24) et (3.26) vérifient les estimations suivantes :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \leq 2C_p \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 + 16\lambda^2 C_p L_p \phi_\varepsilon^n, \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &\leq 6L_p^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + 6L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \phi_\varepsilon^n. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Démonstration. La démonstration de (i) s'obtient en utilisant des développements de Taylor. Par définition de l'opérateur discret $\tilde{\delta}_x$, l'expression suivante s'écrit :

$$\tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \left((p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)) - (p(\bar{\tau}_{i+1}^n) - p(\bar{\tau}_i^n)) \right).$$

De plus, grâce à un développement de Taylor, les deux égalités suivantes sont établies :

$$\begin{aligned} p(\tau_{i+1}^n) &= p(\tau_i^n) + \Delta x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds, \\ p(\bar{\tau}_{i+1}^n) &= p(\bar{\tau}_i^n) + \Delta x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\bar{\tau}_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n) ds, \end{aligned}$$

pour écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2} &= \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds \\ &\quad - \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\bar{\tau}_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n) ds. \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n = \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n + \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n$, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2} &= \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds \\ &\quad + \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \int_0^1 \left(p'(\tau_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) - p'(\bar{\tau}_i^n + s \partial_x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.97)$$

De manière analogue, un développement de Taylor donne :

$$p'(\tau_i^n + s\partial_x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) = p'(\bar{\tau}_i^n + s\partial_x \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n) + \left(\Delta \tau_i^n + s\Delta x \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right) I_{i+1/2,s}^n,$$

avec $I_{i+1/2,s}^n$ définie par (3.93). Il suffit d'injecter la quantité ci-dessus dans le deuxième terme de (3.97) pour obtenir le résultat attendu (3.92).

Concernant (ii), par la définition de ϕ_ε^n et $\eta_i^{\varepsilon,n}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\phi_\varepsilon^n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} (\Delta u_i^n)^2 - P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n) \right) \Delta x \geq - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n) \Delta x. \quad (3.98)$$

De plus, la définition (3.28) de $P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n)$ ainsi qu'un développement de Taylor permettent d'écrire :

$$P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n) = (\Delta \tau_i^n)^2 \int_0^1 (1-s) p'(\bar{\tau}_i^n + s\Delta \tau_i^n) ds.$$

L'utilisation des hypothèses (3.72) sur la régularité de la pression p dans l'expression ci-dessus donne :

$$P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n) \leq -\frac{1}{2L_p} (\Delta \tau_i^n)^2.$$

Enfin, l'injection de l'estimation ci-dessus dans (3.98) permet d'obtenir :

$$\phi_\varepsilon^n \geq \frac{1}{2L_p} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\Delta \tau_i^n)^2 \Delta x,$$

et l'inégalité (3.94) est établie.

Concernant le point (iii), les schémas (3.24) et (3.26) permettent d'écrire la loi d'évolution discrète suivante sur $\Delta \tau_i^n$:

$$\delta_t \Delta \tau_i^n = \delta_x \Delta u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n,$$

et la définition des normes discrètes (3.18) donne :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 = \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_x \Delta u_i^n + \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \right)^2 \Delta x.$$

Puisque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ alors l'estimation suivante est établie :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \leq 2\Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left((\delta_x \Delta u_i^n)^2 + \frac{\lambda^2}{4} \Delta x^2 (\delta_{xx} \Delta \tau_i^n)^2 \right) \Delta x.$$

Grâce à la définition des normes discrètes (3.18), cette inégalité se réécrit :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \leq 2\Delta t \|\delta_x \Delta u^n\|_{L_x^2}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \Delta t \Delta x^2 \|\delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2.$$

En appliquant les estimations sur $\|\delta_x X^n\|_{L_x^2}$ et $\|\delta_{xx} X^n\|_{L_x^2}$ données par (3.57), l'expression ci-dessus donne :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \leq 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 + 8\lambda^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2,$$

et le résultat attendu (3.95) s'obtient facilement grâce à l'inégalité (3.94) ainsi que la condition CFL (3.74).

La démonstration du Lemme 3.4.7 se termine en établissant la deuxième estimation (3.96) du point (iii). Par définition des normes discrètes (3.18), l'égalité suivante est obtenue :

$$\Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 = \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2} \right)^2 \Delta x. \quad (3.99)$$

En utilisant le même type d'arguments basés sur des développements de Taylor que pour le point (i), l'expression suivante s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2} &= \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta t \delta_t \tau_i^{n+1/2}) ds \\ &\quad + \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \int_0^1 I_{i,s}^{n+1/2} ds + \Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s I_{i,s}^{n+1/2} ds, \end{aligned}$$

où

$$I_{i,s}^{n+1/2} = \int_0^1 p'' \left(\bar{\tau}_i^n + s \Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + t \left(\Delta \tau_i^n + s \Delta t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right) \right) dt.$$

En injectant l'expression ci-dessus dans (3.99), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &= \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta t \delta_t \tau_i^{n+1/2}) ds \right. \\ &\quad \left. + \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \int_0^1 I_{i,s}^{n+1/2} ds + \Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s I_{i,s}^{n+1/2} ds \right)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

De plus, puisque pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, l'égalité ci-dessus permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &\leq 3\Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta t \delta_t \tau_i^{n+1/2}) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \int_0^1 I_{i,s}^{n+1/2} ds \right)^2 + \left(\Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s I_{i,s}^{n+1/2} ds \right)^2 \right) \Delta x. \end{aligned}$$

De plus, les conditions (3.72) sur la loi de pression donnent :

$$\int_0^1 p'(\tau_i^n + s\Delta t \delta_t \tau_i^{n+1/2}) ds \leq L_p, \quad \int_0^1 I_{i,s}^{n+1/2} ds \leq L_p, \quad \text{et} \quad \int_0^1 s I_{i,s}^{n+1/2} ds \leq L_p/2,$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &\leq 3L_p^2 \Delta t \left(1 + \frac{\Delta t^2}{4} \|\delta_t \bar{\tau}^{n+1/2}\|_{L_x^\infty}^2 \right) \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + 3L_p^2 \Delta t \|\delta_t \bar{\tau}^{n+1/2}\|_{L_x^\infty}^2 \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $\|\delta_t \bar{\tau}^{n+1/2}\|_{L_x^\infty} \leq K$ par (3.70) et en utilisant l'estimation (3.95) sur $\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}$ ainsi que celle sur $\Delta \tau^n$ (3.94), l'estimation suivante s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 &\leq 6L_p^2 C_p \left(1 + \frac{\Delta t^2}{4} K^2 \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + 6L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{\Delta t^2}{4} K^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \phi_\varepsilon^n, \end{aligned}$$

et l'inégalité (3.96) est obtenue en utilisant, encore une fois, la condition CFL (3.74). La preuve du Lemme 3.4.7 est ainsi achevée. $\square$

La preuve du premier lemme technique, donnant la loi d'évolution discrète sur l'estimateur d'erreur ϕ_ε^n est maintenant établie.

Preuve du Lemme 3.4.2. Par définition de l'entropie relative discrète (3.29) et de l'opérateur discret δ_t donné par (3.17), l'expression suivante sur η^ε s'écrit :

$$\delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} = \frac{\varepsilon^2}{2\Delta t} \left((\Delta u_i^{n+1})^2 - (\Delta u_i^n)^2 \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(P(\tau_i^{n+1} | \bar{\tau}_i^{n+1}) - P(\tau_i^n | \bar{\tau}_i^n) \right).$$

En appliquant la définition de pression relative $P(\tau | \bar{\tau})$ donnée par (3.28), et puisque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - b^2 = 2a(a - b) - (a - b)^2$, alors :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} &= \frac{\varepsilon^2}{2\Delta t} \left(2\Delta u_i^{n+1} (\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n) - (\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \left(P(\tau_i^{n+1}) - P(\bar{\tau}_i^{n+1}) - p(\bar{\tau}_i^{n+1}) \Delta \tau_i^{n+1} - P(\tau_i^n) + P(\bar{\tau}_i^n) + p(\bar{\tau}_i^n) \Delta \tau_i^n \right). \end{aligned}$$

La relation ci-dessus peut être reformulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} &= \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \Delta u_i^{n+1/2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 - \frac{P(\tau_i^{n+1}) - P(\tau_i^n)}{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n} \delta_t \tau_i^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{P(\bar{\tau}_i^{n+1}) - P(\bar{\tau}_i^n)}{\bar{\tau}_i^{n+1} - \bar{\tau}_i^n} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + p(\bar{\tau}_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \frac{p(\bar{\tau}_i^{n+1}) - p(\bar{\tau}_i^n)}{\bar{\tau}_i^{n+1} - \bar{\tau}_i^n} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n. \end{aligned} \tag{3.100}$$

De plus, par les deux schémas (3.24) et (3.26), la loi d'évolution sur Δu_i s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \delta_t \Delta u_i^{n+1/2} &= -\sigma \Delta u_i^{n+1} - \delta_x \Delta p \left(\tau^{n+1} \right)_i + \varepsilon^2 \Delta t \delta_{tx} p(\tau)_i^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2}. \end{aligned}$$

En injectant l'égalité ci-dessus dans (3.100) et en utilisant les notations $Q_i^{n+1/2}$, $\bar{Q}_i^{n+1/2}$, $\bar{q}_i^{n+1/2}$ définies par (3.80), la loi d'évolution se réécrit :

$$\begin{aligned} \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} &= -\sigma \left(\Delta u_i^{n+1} \right)^2 - \Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta p \left(\tau^{n+1} \right)_i + \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} p(\tau)_i^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \left(\delta_t \Delta u_i^{n+1/2} \right)^2 \\ &\quad - Q_i^{n+1/2} \delta_t \tau_i^{n+1/2} + \bar{Q}_i^{n+1/2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + p(\bar{\tau}_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \bar{q}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

De plus, en utilisant la définition du flux d'entropie relatif discret (3.81), l'expression suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\Delta u_{i+1}^{n+1} \Delta p(\tau_i^{n+1}) + \Delta u_i^{n+1} \Delta p(\tau_{i+1}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. - \Delta u_i^{n+1} \Delta p(\tau_{i-1}^{n+1}) - \Delta u_{i-1}^{n+1} \Delta p(\tau_i^{n+1}) \right) \\ &= \Delta p(\tau_i^{n+1}) \frac{\Delta u_{i+1}^{n+1} - \Delta u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \Delta u_i^{n+1} \frac{\Delta p(\tau_{i+1}^{n+1}) - \Delta p(\tau_{i-1}^{n+1})}{2\Delta x} \\ &= \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_x \Delta u_i^{n+1} + \Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta p \left(\tau^{n+1} \right)_i. \end{aligned}$$

L'injection de $\Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_x \Delta u_i^n$ dans l'expression ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} -\Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta p \left(\tau^{n+1} \right)_i &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) \\ &\quad + \Delta t \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} + \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_x \Delta u_i^n. \end{aligned} \quad (3.102)$$

De plus, les discrétisations (3.24) et (3.26) permettent d'écrire :

$$\delta_x \Delta u_i^n = \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \delta_{xx} \Delta \tau_i^n,$$

et (3.102) devient :

$$\begin{aligned} -\Delta u_i^{n+1} \delta_x \Delta p \left(\tau^{n+1} \right)_i &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1} \right) + \Delta t \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} \\ &\quad + \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{xx} \Delta \tau_i^n. \end{aligned}$$

L'injection de l'expression ci-dessus dans (3.101) donne :

$$\begin{aligned}
 \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} (\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1}) &= -\sigma (\Delta u_i^{n+1})^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t (\delta_t \Delta u_i^{n+1/2})^2 \\
 &+ \Delta t \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} + \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \\
 &+ \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} p(\tau)_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} u_i^n - \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \\
 &- Q_i^{n+1/2} \delta_t \tau_i^{n+1/2} + \bar{Q}_i^{n+1/2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + p(\bar{\tau}_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \bar{q}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

La définition des résidus (3.79) permet de reconnaître $R_i^{n,3}$ et $R_i^{n,4}$ dans l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \Delta t \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} - \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{xx} \Delta \tau_i^n &= R_i^{n,3}, \\
 \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} - Q_i^{n+1/2} \delta_t \tau_i^{n+1/2} \\
 + \bar{Q}_i^{n+1/2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} + p(\bar{\tau}_i^{n+1}) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} + \bar{q}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} &= R_i^{n,4}.
 \end{aligned}$$

Pour les termes contenant uniquement de la discrétisation hyperbolique (en w_i^n), la quantité analogue en la discrétisation parabolique est ajoutée et retranchée, conduisant à réécrire (3.103) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta_t \eta_i^{\varepsilon, n+1/2} + \frac{1}{\Delta x} (\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2}^{n+1}) &= -\sigma (\Delta u_i^{n+1})^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t (\delta_t \Delta u_i^{n+1/2})^2 \\
 &- \varepsilon^2 \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} + \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} p(\bar{\tau})_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \\
 &+ \varepsilon^2 \Delta t \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta p(\tau)_i^{n+1/2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n \\
 &+ R_i^{n,3} + R_i^{n,4}.
 \end{aligned}$$

Le résultat attendu (3.78) est obtenu en reconnaissant les résidus $R_i^{n,1}$ et $R_i^{n,2}$ donnés par (3.79) dans l'expression ci-dessus. $\square$

Les preuves des Lemmes 3.4.3 à 3.4.6, donnant les estimations sur les résidus $R_i^{n,1}$, $R_i^{n,2}$, $R_i^{n,3}$ et $R_i^{n,4}$ sont maintenant présentées.

Preuve du Lemme 3.4.3. En utilisant la définition des résidus (3.79), on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &= -\varepsilon^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x + \varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} p(\bar{\tau})_i^{n+1/2} \Delta x \\
 &+ \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \Delta x.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

L'objectif ici est de majorer ce terme par des termes en $\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2$ et des termes en ε^4 . L'utilisation du schéma limite sur la vitesse (3.26) permet d'écrire :

$$\delta_{tx} p(\bar{\tau})_i^{n+\frac{1}{2}} = -\sigma \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2},$$

ce qui permet de modifier (3.104) en :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &= -\varepsilon^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x - \sigma \varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_t \bar{u}_i^{n+1/2} \Delta x \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \bar{u}_i^n \Delta x. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux trois termes de l'estimation ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x &\leq \varepsilon^2 \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_t \bar{u}^{n+1/2}\|_{L_x^2} + \sigma \varepsilon^2 \Delta t \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_t \bar{u}^{n+1/2}\|_{L_x^2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \bar{u}^n\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

En considérant les hypothèses (3.70), l'inégalité suivante est obtenue :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \leq \sqrt{K} \varepsilon^2 \left(1 + \sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right) \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}.$$

Ainsi, pour tout $\theta > 0$, l'application de l'inégalité de Young à l'estimation ci-dessus donne :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,1} \Delta x \leq \theta \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{K}{4\theta} \left(1 + \sigma \Delta t + \frac{\lambda}{2} \Delta x \right)^2 \varepsilon^4.$$

Pour finir, il suffit d'intégrer en temps l'estimation ci-dessus et de remarquer que $\sum_{n=0}^N \Delta t = T$ pour obtenir le résultat attendu (3.85). $\square$

Concernant la démonstration des lemmes 3.4.4, 3.4.5 et 3.4.6 pour les estimations des résidus $R_i^{n,2}$, $R_i^{n,3}$ et $R_i^{n,4}$, il est nécessaire de procéder différemment. En effet, contrairement au premier résidu $R_i^{n,1}$, ceux-ci ne comportent pas de termes contenant uniquement de la discrétisation limite ($\bar{w}_i^n$) et les hypothèses (3.70) sur les normes L^2 ne peuvent pas être utilisées. Il s'agit alors d'estimer ces restes, essentiellement à l'aide des schémas numériques (3.24) et (3.26), des estimations sur les normes L^∞ (3.70), de celles sur les volumes spécifiques (3.71) et d'inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, par des termes en $\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2$, en $\|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2$ et en $\sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t$.

Preuve du Lemme 3.4.4. En utilisant la définition des résidus (3.79), on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x = \varepsilon^2 \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{tx} \Delta p(\tau)_i^{n+1/2} \Delta x + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta u_i^{n+1} \delta_{xx} \Delta u_i^n \Delta x. \quad (3.105)$$

Tous les termes de $R_i^{n,2}$ sont précédés de ε^2 et, puisqu'on s'autorise une condition (3.76) de petitesse sur ε , il n'est ici encore pas nécessaire d'effectuer des estimations très fines. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux deux termes de l'expression (3.105) donne :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \leq \varepsilon^2 \Delta t \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_{tx} \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 \Delta x \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \Delta u^n\|_{L_x^2}.$$

De plus, en appliquant les majorations (3.57) du Lemme 3.3.7 à $\|\delta_x (\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2})\|_{L_x^2}$ et $\|\delta_{xx} \Delta u^n\|_{L_x^2}$, l'estimation ci-dessus peut écrire :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x \leq \frac{\varepsilon^2 \Delta t}{\Delta x} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} + \frac{2\lambda \varepsilon^2}{\Delta x} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2}.$$

L'application de l'inégalité de Young aux deux termes ci-dessus permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda \varepsilon^2}{\Delta x} \left(\|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \right), \end{aligned}$$

et, en utilisant (3.96) donnée par le Lemme 3.4.7, l'estimation suivante s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,2} \Delta x &\leq \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \lambda \right) \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta x} \left(3L_p^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \lambda \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + 3L_p^3 \varepsilon^2 \left(8\lambda^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \phi_\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Une intégration discrète en temps ainsi que l'utilisation de la condition CFL (3.74) donnent l'estimation requise (3.86). $\square$

Preuve du Lemme 3.4.5. En utilisant la définition des résidus (3.79), on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,3} \Delta x = A^n + B^n,$$

où

$$\begin{aligned} A^n &= \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{tx} \Delta u_i^{n+1/2} \Delta x, \\ B^n &= -\frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta p(\tau_i^{n+1}) \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x. \end{aligned}$$

Contrairement à $R_i^{n,2}$, il n'y a pas de terme précédé par ε^2 dans ce résidu. L'hypothèse sur la petitesse de ε (3.76) ne peut donc pas être utilisée. Il est alors nécessaire d'être

plus délicat dans les estimations. Tout d'abord, une estimation pour A^n est proposée. Une intégration par parties discrète en temps fournit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &= -\Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2} \delta_x \Delta u_i^n \Delta x \Delta t \\ &\quad + \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta p(\tau_i^{N+1}) \delta_x \Delta u_i^{N+1} \Delta x - \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta p(\tau_i^0) \delta_x \Delta u_i^0 \Delta x. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux trois termes de l'expression ci-dessus permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \Delta t \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} \|\delta_x \Delta u^n\|_{L_x^2} \Delta t \\ &\quad + \Delta t \|\Delta p(\tau^{N+1})\|_{L_x^2} \|\delta_x \Delta u^{N+1}\|_{L_x^2} + \Delta t \|\Delta p(\tau^0)\|_{L_x^2} \|\delta_x \Delta u^0\|_{L_x^2}, \end{aligned}$$

puis les estimations (3.57) sur les normes des opérateurs de dérivation discrets en espace donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \Delta t \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\Delta p(\tau^{N+1})\|_{L_x^2} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\Delta p(\tau^0)\|_{L_x^2} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Un développement de Taylor avec reste intégral de p permet d'écrire, pour tout $0 \leq n \leq N$:

$$\|\Delta p(\tau^n)\|_{L_x^2}^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\Delta \tau_i^n \int_0^1 p''(\bar{\tau}_i^n + s \Delta \tau_i^n) ds \right)^2 \Delta x.$$

Les conditions (3.72) sur p permettent d'obtenir :

$$\|\Delta p(\tau^n)\|_{L_x^2}^2 \leq L_p^2 \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2,$$

et par (3.94), l'estimation suivante sur la norme de $\Delta p(\tau_i^n)$ est déterminée :

$$\|\Delta p(\tau^n)\|_{L_x^2}^2 \leq 2L_p^3 \phi_\varepsilon^n.$$

En utilisant cette dernière inégalité et l'estimation (3.94) sur la norme de $\Delta \tau_i^n$, l'inégalité (3.106) sur A^n devient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} \|\Delta u^n\|_{L_x^2} \Delta t \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2L_p^3 \phi_\varepsilon^{N+1}} \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2L_p^3 \phi_\varepsilon^0} \|\Delta u^0\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

L'utilisation d'une inégalité de Young sur les trois termes de l'expression ci-dessus permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{1}{2} C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} L_p^3 \|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} L_p^3 \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

L'utilisation de cette inégalité sur le terme de bord en $N+1$ est effectuée de façon à obtenir un facteur $1/2$ devant ϕ_ε^{N+1} . En effet, quand cette estimation sera injectée dans (3.83), ce terme de bord sera compensé par le terme de gauche de l'inégalité, lui aussi en ϕ_ε^{N+1} . De plus des majorations directes permettent d'écrire :

$$\|\Delta u^{N+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \leq \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \quad \text{et} \quad \|\Delta u^0\|_{L_x^2}^2 \Delta t \leq \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t,$$

qui sont injectées dans (3.107) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^N \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} C_p + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} L_p^3 \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} L_p^3 \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'estimation (3.96) sur $\delta_t \Delta p(\tau)_i^{n+1/2}$ ainsi que la condition CFL (3.74) dans l'inégalité ci-dessus, la majoration suivante de A^n est obtenue :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A^n \Delta t &\leq \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{2} \phi_\varepsilon^0 + L_p^3 C_p \sum_{n=0}^N \|\Delta u^{n+1}\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + C_p \left(3L_p^2 \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + \frac{1}{2} + L_p^3 \right) \sum_{n=0}^N \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \Delta t \\ &\quad + 3L_p^3 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) \sum_{n=0}^N \phi_\varepsilon^n \Delta t. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Maintenant, une estimation pour B^n est fournie. En ajoutant et soustrayant $\Delta p(\tau_i^n)$ puis en procédant à une intégration par parties discrète en espace, B^n se réécrit de la manière suivante :

$$B^n = -\frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x + \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2} \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \Delta x.$$

En appliquant la formule (3.92) pour $\tilde{\delta}_x \Delta p(\tau^n)_{i+1/2}$ donnée par le point (iii) du Lemme 3.4.7, la relation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}
 B^n = & -\frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2} \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \Delta x \\
 & + \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right)^2 \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds \Delta x \\
 & + \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta \tau_i^n \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \int_0^1 I_{i+1/2,s}^n ds \Delta x \\
 & + \frac{\lambda}{2} \Delta x^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \left(\tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right)^2 \int_0^1 s I_{i+1/2,s}^n ds \Delta x,
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

où $I_{i+1/2,s}^n$ est défini par (3.93). Chaque terme de l'expression ci-dessus peut maintenant être majoré afin d'obtenir une estimation de B^n . En utilisant les conditions sur la pression (3.72), les trois estimations suivantes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda}{2} \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right)^2 \int_0^1 p'(\tau_i^n + s \Delta x \tilde{\delta}_x \tau_{i+1/2}^n) ds \Delta x \leq 0, \\
 & \int_0^1 I_{i+1/2,s}^n ds \leq L_p \quad \text{et} \quad \int_0^1 s I_{i+1/2,s}^n ds \leq L_p/2,
 \end{aligned}$$

qui sont injectées dans (3.109) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 B^n = & \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2} \right| \left| \delta_{xx} \Delta \tau_i^n \right| \Delta x \\
 & + \frac{\lambda}{2} L_p \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \Delta \tau_i^n \right| \left| \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \right| \left| \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right| \Delta x \\
 & + \frac{\lambda}{4} L_p \Delta x^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \right| \left| \tilde{\delta}_x \Delta \tau_{i+1/2}^n \right|^2 \Delta x.
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

De plus, en majorant $\left| \tilde{\delta}_x \bar{\tau}_{i+1/2}^n \right|$ par $\|\tilde{\delta}_x \bar{\tau}^n\|_{L_x^\infty} \leq K$ par (3.70) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les trois termes de l'estimation ci-dessus, celle-ci se réécrit :

$$\begin{aligned}
 B^n \leq & \frac{\lambda}{2} \Delta x \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} \|\delta_{xx} \Delta \tau^n\|_{L_x^2} \\
 & + \frac{\lambda}{2} K L_p \Delta x \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} \|\tilde{\delta}_x \Delta \tau^n\|_{L_x^2} + \frac{\lambda}{4} K L_p \Delta x^2 \|\tilde{\delta}_x \Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2.
 \end{aligned}$$

Les estimations sur les normes des opérateurs de dérivation spatiaux, données par (3.57), permettent d'estimer l'expression ci-dessus de la façon suivante :

$$B^n \leq 2\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2} \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} + 2\lambda K L_p \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2.$$

L'inégalité de Young appliquée aux deux termes ci-dessus permet ensuite d'écrire :

$$B^n \leq \Delta t \|\delta_t \Delta p(\tau)^{n+1/2}\|_{L_x^2}^2 + \left(\lambda^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\lambda K L_p \right) \|\Delta \tau^n\|_{L_x^2}^2.$$

Enfin, les estimations (3.96) et (3.94) sur $\delta_t \Delta p(\tau_i)^{n+1/2}$ et $\Delta \tau_i^n$ ainsi que la condition CFL (3.74) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} B^n &\leq 6L_p^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + 2L_p \left(3L_p^2 \left(8\lambda^2 C_p \left(1 + \frac{K^2}{4} \Delta t^2 \right) + K^2 \Delta t \right) + \lambda^2 C_p + 2\lambda K L_p \right) \phi_\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Le résultat attendu (3.87) est établi en sommant en temps cette estimation de B^n et en la combinant avec l'estimation (3.108) de A^n . $\square$

Preuve du Lemme 3.4.6. En utilisant la définition des résidus (3.79), on a :

$$R_i^{n,4} = \left(-Q_i^{n+1/2} + \overline{Q}_i^{n+1/2} + \overline{q}_i^{n+1/2} \Delta \tau_i^n \right) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} + \left(p(\tau_i^{n+1}) - Q_i^{n+1/2} \right) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}. \quad (3.111)$$

Une série de développements de Taylor permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{Q}_i^{n+1/2} &= \int_0^1 \left[p(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}'_s \right] ds, \\ \overline{q}_i^{n+1/2} &= \int_0^1 \left[p'(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}''_s \right] ds, \\ p(\tau_i^{n+1}) &= \int_0^1 \left[p(\overline{\tau}_i^n) + \Delta \tau_i^n p'(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}'_s + \Delta t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p}'_s \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^2 s \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p}''_s + \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}''_s + T_{is1}^n + T_{is2}^n \right] ds, \\ Q_i^{n+1/2} &= \int_0^1 \left[p(\overline{\tau}_i^n) + \Delta \tau_i^n p'(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}'_s + \Delta t (1-s) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p}'_s \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^2 s (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p}''_s + \Delta t (1-s) \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p}''_s + T_{is1}^n \right. \\ &\quad \left. + (1-s) T_{is2}^n \right] ds, \end{aligned}$$

avec pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\overline{p'_s} &= p'(\overline{\tau}_i^n + s\Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2}), \\ \overline{p''_s} &= p''(\overline{\tau}_i^n + s\Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2}), \\ T_{is1}^n &= (\Delta \tau_i^n)^2 (1-s) p''(\overline{\tau}_i^n + s\Delta \tau_i^n), \\ T_{is2}^n &= \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p''_s} + \Delta t^2 s \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \overline{p''_s} \\ &\quad + \Delta t \left(\delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} + \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right) \left(s \Delta \tau_i^{n+1} + (1-s) \Delta \tau_i^n \right)^2 \int_0^1 (1-t) p^{(3)}(m_{st}) dt,\end{aligned}$$

où $m_{st} = \overline{\tau}_i^n + t \Delta \tau_i^n + s \Delta t \left(\delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} + t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)$ pour tous $s, t \in [0, 1]$.

Grâce à ces formules, l'expression (3.111) se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}R_i^{n,4} &= \int_0^1 \left[\left(-p(\overline{\tau}_i^n) - \Delta \tau_i^n p'(\overline{\tau}_i^n) - \Delta t (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p'_s} - \Delta t (1-s) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p'_s} \right. \right. \\ &\quad - \Delta t^2 s (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p''_s} - \Delta t (1-s) \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p''_s} - T_{is1}^n - (1-s) T_{is2}^n \\ &\quad + p(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t (1-s) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p'_s} + \Delta \tau_i^n p'(\overline{\tau}_i^n) + \Delta t (1-s) \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p''_s} \left. \right) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \\ &\quad + s \left(\Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p'_s} + \Delta t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p'_s} + \Delta t^2 s \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \overline{p''_s} \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \overline{p''_s} + T_{is2}^n \right) \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right] ds.\end{aligned}\tag{3.112}$$

De plus, en posant :

$$T_i^n = \int_0^1 \left[- (T_{is1}^n + (1-s) T_{is2}^n) \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} + s T_{is2}^n \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right] ds,\tag{3.113}$$

l'expression (3.112) se réécrit :

$$\begin{aligned}R_i^{n,4} &= \Delta t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \left[\delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 (2s-1) \overline{p'_s} ds + \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s \overline{p'_s} ds \right. \\ &\quad - \Delta t \left(\delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(1-s) \overline{p''_s} ds + \Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s^2 \overline{p''_s} ds \\ &\quad \left. + \Delta \tau_i^n \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 s \overline{p''_s} ds \right] + T_i^n.\end{aligned}\tag{3.114}$$

Un développement de Taylor sur $\overline{p'_s}$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2s-1) \overline{p'_s} ds &= \int_0^1 (2s-1) \left(p'(\overline{\tau}_i^n) + s \Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 p''(\overline{\tau}_i^n + st \Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2}) dt \right) ds \\ &= \Delta t \delta_t \overline{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 s(1-s) \overline{p''_s} ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 s \overline{p'_s} ds &= \int_0^1 s \left(p'(\bar{\tau}_i^n) + s \Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 p''(\bar{\tau}_i^n + st \Delta t \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2}) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2} p'(\bar{\tau}_i^n) + \frac{\Delta t}{2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 (1-s^2) \overline{p''_s} ds. \end{aligned}$$

L'utilisation de ces développements dans (3.114) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} R_i^{n,4} &= \Delta t \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \left[\Delta t \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(1-s) \overline{p''_s} ds + \frac{1}{2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} p'(\bar{\tau}_i^n) \right. \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 (1-s^2) \overline{p''_s} ds - \Delta t \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(1-s) \overline{p''_s} ds \\ &\quad \left. + \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 \Delta t s^2 \overline{p''_s} ds + \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 s \overline{p''_s} ds \right] + T_i^n, \end{aligned}$$

et l'expression ci-dessus se réécrit de la manière suivante après simplifications :

$$\begin{aligned} R_i^{n,4} &= \frac{\Delta t}{2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 p'(\bar{\tau}_i^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 (1+s^2) \overline{p''_s} ds \\ &\quad + \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s \overline{p''_s} ds + T_i^n. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Maintenant, l'expression de T_i^n donnée par (3.113) est détaillée. En posant $I_s = \int_0^1 (1 - t)p^{(3)}(m_{st})dt$ et en développant T_i^n , l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 T_i^n &= \Delta t \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s \overline{p_s''} ds - \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 (1-s) \overline{p_s''} ds \\
 &+ \Delta t^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2 \overline{p_s''} ds - \Delta t^2 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(1-s) \overline{p_s''} ds \\
 &- \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 (1-s) I_s ds \\
 &- 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s(1-s) I_s ds \\
 &- \Delta t^3 \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s^2(1-s) I_s ds \\
 &+ \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 (2s-1) I_s ds \\
 &+ 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(2s-1) I_s ds \\
 &+ \Delta t^3 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2(2s-1) I_s ds \\
 &+ \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s I_s ds + 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2 I_s ds \\
 &+ \Delta t^3 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^4 \int_0^1 s^3 I_s ds - (\Delta \tau_i^n)^2 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 (1-s) p''(\bar{\tau}_i^n + s \Delta \tau_i^n) ds.
 \end{aligned}$$

En injectant l'expression ci-dessus dans celle de $R_i^{n,4}$ donnée par (3.115), cette dernière se réécrit :

$$\begin{aligned}
R_i^{n,4} = & \frac{\Delta t}{2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 p'(\bar{\tau}_i^n) \\
& + \Delta t \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s \bar{p}_s'' ds + \Delta t \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 (2s-1) \bar{p}_s'' ds \\
& + \Delta t^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2 \bar{p}_s'' ds + \frac{\Delta t^2}{2} \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 (3s^2 - 2s + 1) \bar{p}_s'' ds \\
& - \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 (1-s) I_s ds \\
& - 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 s(1-s) I_s ds \\
& - \Delta t^3 \left(\delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \right)^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s^2(1-s) I_s ds \\
& + \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \int_0^1 (2s-1) I_s ds \\
& + 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s(2s-1) I_s ds \\
& + \Delta t^3 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2(2s-1) I_s ds \\
& + \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s I_s ds + 2\Delta t^2 \Delta \tau_i^n \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^3 \int_0^1 s^2 I_s ds \\
& + \Delta t^3 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^4 \int_0^1 s^3 I_s ds - (\Delta \tau_i^n)^2 \delta_t \bar{\tau}_i^{n+1/2} \int_0^1 (1-s) p''(\bar{\tau}_i^n + s \Delta \tau_i^n) ds.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Les hypothèses (3.72) sur p , qui donnent en particulier que I_s est négatif, permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t}{2} \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 p'(\bar{\tau}_i^n) \leq 0, \quad \Delta t (\Delta \tau_i^n)^2 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^2 \int_0^1 s I_s ds \leq 0, \\
& \Delta t^3 \left(\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right)^4 \int_0^1 s^3 I_s ds \leq 0, \\
\text{et } & \left| \int_0^1 s \bar{p}_s'' ds \right| \leq \frac{L_p}{2}, \quad \left| \int_0^1 (2s-1) \bar{p}_s'' ds \right| \leq \frac{L_p}{2}, \quad \left| \int_0^1 s^2 \bar{p}_s'' ds \right| \leq \frac{L_p}{3}, \\
& \left| \int_0^1 (3s^2 - 2s + 1) \bar{p}_s'' ds \right| \leq L_p, \quad \left| \int_0^1 (1-s) I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{2}, \quad \left| \int_0^1 s(1-s) I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{6}, \\
& \left| \int_0^1 s^2(1-s) I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{12}, \quad \left| \int_0^1 (2s-1) I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{2}, \quad \left| \int_0^1 s(2s-1) I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{4}, \\
& \left| \int_0^1 s^2(2s-1) I_s ds \right| \leq \frac{3}{16} L_p, \quad \left| \int_0^1 s^2 I_s ds \right| \leq \frac{L_p}{3}, \quad \left| \int_0^1 (1-s) p''(\bar{\tau}_i^n + s \Delta \tau_i^n) ds \right| \leq \frac{L_p}{2}.
\end{aligned}$$

En injectant ces majorations ainsi que l'estimation (3.70) sur la norme infinie discrète de $\delta_t \tau^n$ dans (3.116), l'inégalité suivante sur $R_i^{n,4}$ est établie :

$$\begin{aligned}
 R_i^{n,4} &\leq \frac{1}{2} L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{3} L_p \Delta t^2 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^3 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t^2 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K^2 L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n|^2 + \frac{1}{3} K^2 L_p \Delta t^2 |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{12} K^2 L_p \Delta t^3 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n|^2 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{2} K L_p \Delta t^2 |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{3}{16} K L_p \Delta t^3 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^3 \\
 &+ \frac{2}{3} L_p \Delta t^2 |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^3 + \frac{1}{2} K L_p |\Delta \tau_i^n|^2.
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Il s'agit maintenant de choisir judicieusement certains termes de (3.117) qui seront majorés par une norme infinie de $\Delta \tau_i^n$ ou de $\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned}
 R_i^{n,4} &\leq \frac{1}{2} L_p \Delta t \|\Delta \tau^n\|_{L_x^\infty} |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{3} L_p \Delta t^2 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^\infty} + \frac{1}{2} K L_p \Delta t^2 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K^2 L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n|^2 + \frac{1}{3} K^2 L_p \Delta t^2 |\Delta \tau_i^n| |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{12} K^2 L_p \Delta t^3 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t |\Delta \tau_i^n| \|\Delta \tau^n\|_{L_x^\infty} |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}| \\
 &+ \frac{1}{2} K L_p \Delta t^2 \|\Delta \tau^n\|_{L_x^\infty} |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 + \frac{3}{16} K L_p \Delta t^3 |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^\infty} \\
 &+ \frac{2}{3} L_p \Delta t^2 \|\Delta \tau^n\|_{L_x^\infty} |\delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2}|^2 \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^\infty} + \frac{1}{2} K L_p |\Delta \tau_i^n|^2.
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

Les hypothèses (3.71) sur les volumes spécifiques donnent les majorations suivantes :

$$\|\Delta \tau^n\|_{L_x^2} \leq 2L_\tau \quad \text{et} \quad \Delta t \|\delta_t \Delta \tau^{n+1/2}\|_{L_x^2} \leq 2L_\tau.$$

L'utilisation de ces estimations dans (3.118) fournit alors :

$$\begin{aligned}
 R_i^{n,4} &\leq L_\tau L_p \Delta t \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t \left| \Delta \tau_i^n \right| \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right| \\
 &+ \frac{2}{3} L_\tau L_p \Delta t \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 + \frac{1}{2} K L_p \Delta t^2 \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K^2 L_p \Delta t \left| \Delta \tau_i^n \right|^2 + \frac{1}{3} K^2 L_p \Delta t^2 \left| \Delta \tau_i^n \right| \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right| \\
 &+ \frac{1}{12} K^2 L_p \Delta t^3 \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 + K L_\tau L_p \Delta t \left| \Delta \tau_i^n \right| \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right| \\
 &+ K L_\tau L_p \Delta t^2 \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 + \frac{3}{8} K L_\tau L_p \Delta t^2 \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 \\
 &+ \frac{8}{3} L_\tau^2 L_p \Delta t \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 + \frac{1}{2} K L_p \left| \Delta \tau_i^n \right|^2,
 \end{aligned}$$

ce qui donne en rassemblant les termes :

$$\begin{aligned}
 R_i^{n,4} &\leq K L_p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} K \Delta t + L_\tau \right) \Delta t \left| \Delta \tau_i^n \right| \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right| \\
 &+ L_p \left(\frac{5}{3} L_\tau + \frac{1}{2} K \Delta t + \frac{1}{12} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{8} K L_\tau \Delta t + \frac{8}{3} L_\tau^2 \right) \Delta t \left| \delta_t \Delta \tau_i^{n+1/2} \right|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K L_p (K \Delta t + 1) \left| \Delta \tau_i^n \right|^2.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

En effectuant une intégration discrète en espace puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le premier terme, (3.119) se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x &\leq K L_p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} K \Delta t + L_\tau \right) \Delta t \left\| \Delta \tau^n \right\|_{L_x^2} \left\| \delta_t \Delta \tau^{n+1/2} \right\|_{L_x^2} \\
 &+ L_p \left(\frac{5}{3} L_\tau + \frac{1}{2} K \Delta t + \frac{1}{12} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{8} K L_\tau \Delta t + \frac{8}{3} L_\tau^2 \right) \Delta t \left\| \delta_t \Delta \tau^{n+1/2} \right\|_{L_x^2}^2 \\
 &+ \frac{1}{2} K L_p (K \Delta t + 1) \left\| \Delta \tau^n \right\|_{L_x^2}^2,
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

et grâce à une inégalité du Young sur le premier terme, (3.120) devient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x &\leq L_p \left(\frac{1}{4} K + \frac{1}{6} K^2 \Delta t + \frac{1}{2} K L_\tau + \frac{5}{3} L_\tau + \frac{1}{2} K \Delta t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{8} K L_\tau \Delta t + \frac{8}{3} L_\tau^2 \right) \Delta t \left\| \delta_t \Delta \tau^{n+1/2} \right\|_{L_x^2}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} K L_p \left(\frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{3} K \Delta t^2 + L_\tau \Delta t + K \Delta t + 1 \right) \left\| \Delta \tau^n \right\|_{L_x^2}^2.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Il suffit alors d'utiliser l'estimation (3.95) sur $\Delta t \left\| \delta_t \Delta \tau^{n+1/2} \right\|_{L_x^2}^2$ sur le premier terme de (3.121) ainsi que l'estimation (3.94) sur $\left\| \Delta \tau^n \right\|_{L_x^2}^2$ sur le deuxième terme de (3.121) pour

obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i^{n,4} \Delta x \leq & C_p L_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right) \|\Delta u^n\|_{L_x^2}^2 \\ & + L_p^2 \left(8 \lambda^2 C_p \left(\frac{1}{2} K + \frac{1}{3} K^2 \Delta t + K L_\tau + \frac{10}{3} L_\tau + K \Delta t \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} K^2 \Delta t^2 + \frac{11}{4} K L_\tau \Delta t + \frac{16}{3} L_\tau^2 \right) \right. \\ & \left. + K \left(\frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{3} K \Delta t^2 + L_\tau \Delta t + K \Delta t + 1 \right) \right) \phi_\varepsilon^n. \end{aligned}$$

L'estimation (3.88) est obtenue et le Lemme 3.4.6 est ainsi démontré. $\square$

3.5 Illustration numérique

Dans cette partie, des expérimentations numériques sont effectuées afin d'illustrer le Théorème 3.4.1. Pour ce faire, trois simulations, avec différentes conditions initiales et différentes lois de pression, sont présentées sur le domaine spatial $(-10, 10)$. Tous les résultats numériques sont considérés au temps final $T = 0.5$. Le coefficient de friction est fixé à $\sigma = 1$ et des conditions au bord de Neumann homogène sont utilisées. La loi de pression choisie est de la forme

$$p(\tau) = \tau^{-\gamma}, \quad (3.122)$$

avec $\gamma > 1$. Les solutions approchées du système (3.7) sont calculées avec différentes valeurs de ε :

$$\varepsilon \in \left\{ 1, 5 \cdot 10^{-1}, 3 \cdot 10^{-1}, 1 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-4} \right\},$$

et différents nombres de cellules

$$M \in \{50, 100, 200, 500, 1500\}.$$

Concernant le pas de temps Δt , il doit être restreint selon une condition CFL parabolique. Celle donnée par (3.75) peut être utilisée, cependant les constantes apparaissant dans (3.70), (3.71) et (3.72) ne sont clairement pas optimales. En effet, pour améliorer la lisibilité du Théorème 3.4.1, le nombre de constantes a été limité, mais une meilleure condition CFL aurait pu être obtenue en l'augmentant. La constante de CFL C_p définie par (3.75), en utilisant les valeurs numériques décrites plus haut, est d'ordre 10^{-6} . Ici la constante utilisée est moins restrictive, et est donnée par :

$$\Delta t = C_{CFL} \frac{\Delta x^2}{\max_{i=0, \dots, M} (|p'(\tau_i^n)|, |p'(\bar{\tau}_i^n)|)}.$$

Dans la suite, des simulations issues de différentes valeurs de C_{CFL} sont proposées. Afin d'observer l'impact de la donnée initiale sur le taux de convergence, les résultats sont également calculés avec les deux données initiales différentes suivantes :

- Condition initiale discontinue :

$$\tau_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.123)$$

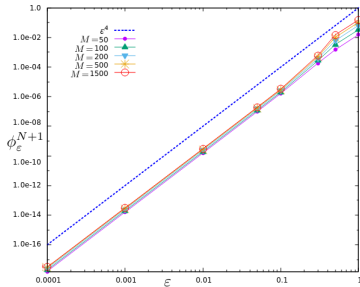
- Condition initiale régulière :

$$\tau_0(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right). \quad (3.124)$$

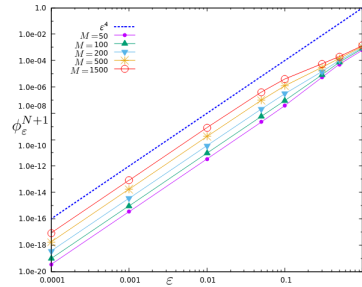
De plus, pour que la donnée initiale soit bien préparée au sens de (3.40), la vitesse initiale est fixée comme suit :

$$u_i^0 = -\frac{1}{\sigma} \frac{p(\tau_{i+1}^0) - p(\tau_{i-1}^0)}{2\Delta x}. \quad (3.125)$$

Tout d'abord, sur la Figure 3.1 sont présentés les résultats obtenus avec $C_{CFL} = 0.4$ et $\gamma = 1.4$ pour la condition initiale discontinue à gauche et la condition initiale régulière à droite. Les courbes tracées correspondent aux intégrales en espace discrètes de l'entropie relative au temps final ϕ_ε^{N+1} tracées en fonction de ε en échelle logarithmique pour différentes valeurs de M . La courbe en pointillés est la droite de référence, de pente -4 . Pour les deux données initiales considérées, les droites obtenues par les simulations sont parallèles à la droite de référence et le taux de convergence est alors de l'ordre de ε^4 , ce qui est en accord avec le Théorème 3.4.1. Il semble, et c'est encore une fois en accord avec le Théorème 3.4.1, que le taux de convergence est indépendant de la condition initiale adoptée ainsi que du nombre de mailles utilisé.



(a) Condition initiale discontinue



(b) Condition initiale régulière

FIGURE 3.1: Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec $C_{CFL} = 0.4$ et $\gamma = 1.4$.

Ensuite, le comportement du taux de convergence est présenté pour différentes valeurs de la constante C_{CFL} . La donnée initiale discontinue, donnée par (3.123), est considérée. Le coefficient de pression γ est égal, ici encore, à 1.4. Sur la Figure 3.2, est présentée l'intégrale en espace discrète de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique pour $C_{CFL} = 0.4$ à gauche et $C_{CFL} = 0.25$ à droite et pour différentes valeurs

de M . Comme attendu, les deux résultats sont très similaires, toujours de pentes d'ordre ε^4 en accord avec le Théorème 3.4.1. Le coefficient C_{CFL} ne semble pas non plus jouer de rôle dans la vitesse de convergence.

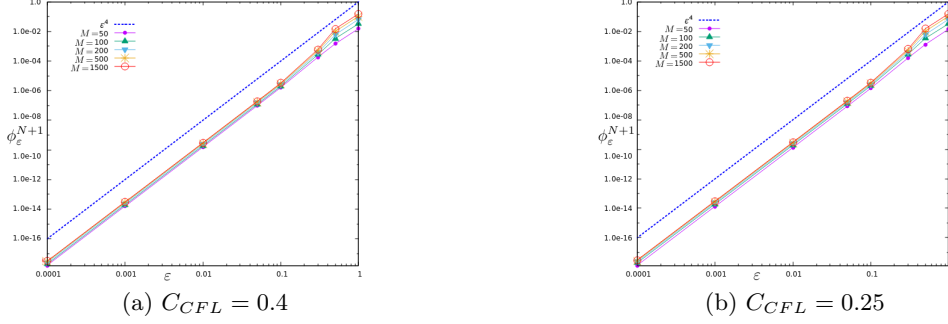


FIGURE 3.2: Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec la condition initiale discontinue et $\gamma = 1.4$.

Enfin, sur la Figure 3.3, l'influence de la loi de pression est étudiée. Pour ce faire, le taux de convergence est tracé avec la donnée initiale discontinue donnée par (3.123) et $C_{CFL} = 0.4$ pour la fonction de pression définie par (3.122) avec $\gamma = 1.4$ à gauche et $\gamma = 3.5$ à droite. Ici encore, un taux de convergence de l'ordre de ε^4 , en accord avec le Théorème 3.4.1, est retrouvé, indépendamment de γ .

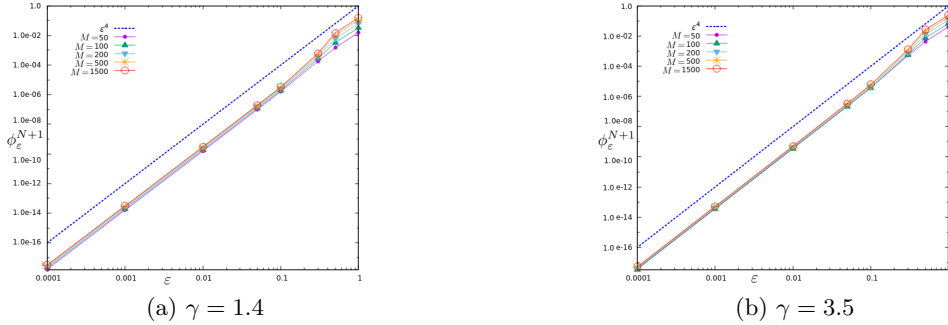


FIGURE 3.3: Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec la condition initiale discontinue et $C_{CFL} = 0.4$.

Partie II

Développement de schémas préservant l'asymptotique

Dans cette seconde partie, deux méthodes de construction de schémas préservant l'asymptotique diffusive sont présentées. Elles sont toutes les deux basées sur des solveurs de Riemann approchés de type Godunov, qui sont dès à présent rappelés brièvement dans le cadre du problème hyperbolique homogène suivant :

$$\partial_t W(x, t) + \partial_x F(W(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

où $W \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur contenant les inconnues et $F(W) \in \mathbb{R}^N$ désigne le flux. L'espace $\mathbb{R}$ est discrétisé à l'aide des cellules $(K_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}])_{i \in \mathbb{Z}}$ de taille constante Δx et de centres $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme illustré sur la Figure 3.4.

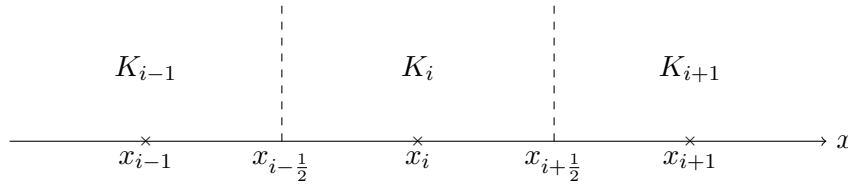


FIGURE 3.4: Discrétisation spatiale.

Concernant la discrétisation temporelle, le pas de temps est noté Δt , supposé constant, et $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$. La solution du système hyperbolique (1) est alors approchée par une fonction constante par morceaux de valeur W_i^n pour x dans la maille K_i et t entre t^n et t^{n+1} . Cette discrétisation $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}^{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de la moyenne de W , la solution exacte de (1), sur K_i au temps t^n :

$$W_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t^n) dx. \quad (2)$$

L'intégration de l'équation (1) sur K_i et entre t^n et t^{n+1} donne :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (W(x, t^{n+1}) - W(x, t^n)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (F(W(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - F(W(x_{i-\frac{1}{2}}, t))) dt = 0,$$

et en utilisant (2), la mise à jour de l'approximation se fait de la manière suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3)$$

où

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt.$$

Pour établir complètement le schéma (3), il est nécessaire de définir les flux aux interfaces $(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$. C'est un travail très délicat et, dans ce manuscrit, la définition des flux numériques est obtenue à partir d'un solveur de Riemann approché.

Un solveur de Riemann est une fonction $W_{\mathcal{R}}$ qui décrit les solutions du problème homogène (1) muni de la condition initiale suivante :

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{sinon,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Les solutions de ce problème de Cauchy, appelé problème de Riemann, sont autosimilaires, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent comme fonction d'une seule variable x/t . Elles peuvent ainsi être représentées dans le plan (x, t) et sont définies comme une succession d'ondes, des discontinuités de contact, des chocs ou des détente, séparant des états constants [40, 82]. Sur la Figure 3.5, un exemple est proposé dans le cas d'un problème à deux inconnues avec une détente pour la première onde et un choc pour la deuxième. Une des variables (disons u) est également représentée en fonction de x , au temps $T > 0$ donné.

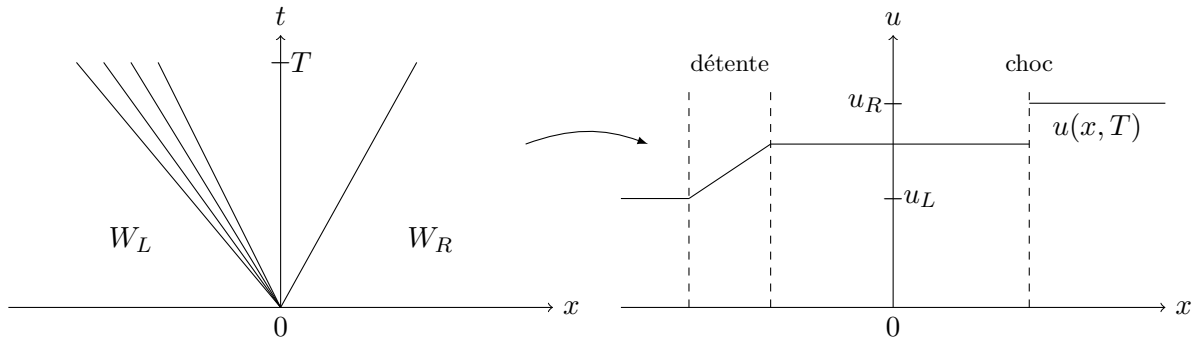


FIGURE 3.5: Illustration du problème de Riemann.

L'étude des problèmes de Riemann est essentielle dans le développement d'une certaine classe de discrétisations de systèmes de lois de conservation (voir [28, 35, 40, 62,

82] par exemple). En effet, au temps t^n , une discrétisation de la solution de (1) est donnée par une fonction constante par morceaux. Localement, à une interface quelconque, il s'agit donc de résoudre un problème de Riemann. Si le solveur de Riemann exact $W_{\mathcal{R}}(\frac{x}{t}; W_L, W_R)$, solution de (1) muni de la condition initiale (4), est connu, alors, à une interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, la solution exacte en $x \in [x_i, x_{i+1}]$ au temps $t^n + \Delta t$ est donnée par $W_{\mathcal{R}}(\frac{x-x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n)$ pour un pas de temps Δt suffisamment petit. Ainsi, à partir de la solution approchée au temps t^n notée $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$, la solution exacte au temps $t^n + \Delta t$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$W^\Delta(x, t^n + \Delta t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right) \mathbf{1}_{x \in [x_i, x_{i+1}]}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bien entendu, afin de garantir la non interaction d'ondes issues de deux interfaces différentes (voir Figure 3.6 pour l'illustration), il est nécessaire de restreindre le pas de temps Δt par la condition CFL suivante (voir [26]) :

$$\Delta t \max_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad (5)$$

où $\Lambda_{i+\frac{1}{2}}$ désigne la plus grande (en valeur absolue) des vitesses d'onde associées à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$.

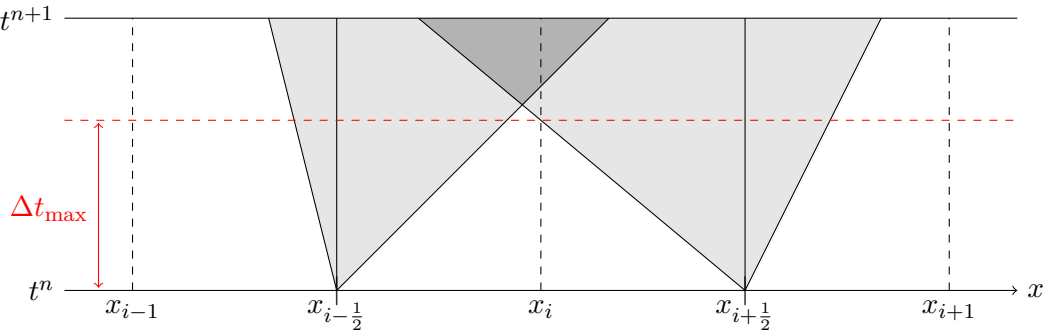


FIGURE 3.6: Juxtaposition d'ondes.

Pour avoir une discrétisation constante par morceaux au temps $t^n + \Delta t$, il suffit de choisir l'approximation comme la valeur moyenne de la solution comme suit :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W^\Delta(x, t^n + \Delta t) dx. \quad (6)$$

Le schéma (6) ainsi obtenu, appelé schéma de Godunov (voir [41]), s'écrit dans la formulation flux (3) avec les flux aux interfaces $(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i^n, W_{i+1}^n)).$$

En pratique, le schéma de Godunov est difficile à mettre en place puisque le solveur de Riemann exact n'est pas nécessairement connu. De plus, quand c'est le cas, il est lourd à implémenter en raison du grand nombre de cas à traiter. Il est donc préférable d'utiliser des schémas de type Godunov [37, 38, 51], c'est-à-dire des schémas issus d'une approximation $\widetilde{W}$ du solveur de Riemann exact $W_{\mathcal{R}}$. La fonction $\widetilde{W}$ est appelée solveur de Riemann approché. Les vitesses d'onde sont également approchées en gardant à l'esprit qu'il est nécessaire que l'éventail des ondes du solveur de Riemann exact soit inclus dans celui du solveur de Riemann approché [40, 62, 82]. En effet, cela garantit la non interaction des ondes et donc la stabilité du schéma. En général, les schémas de type Godunov utilisés sont construits comme une succession d'états constants séparés par des ondes. Un solveur de Riemann approché de type Godunov s'écrit de la façon suivante dans le cas de $n + 1$ ondes :

$$\widetilde{W}\left(\frac{x}{t}, W_L, W_R\right) = \begin{cases} W_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_1, \\ W_1^* & \text{si } \lambda_1 < \frac{x}{t} \leq \lambda_2, \\ \dots & \\ W_n^* & \text{si } \lambda_n < \frac{x}{t} \leq \lambda_{n+1}, \\ W_R & \text{si } \lambda_{n+1} < \frac{x}{t}, \end{cases}$$

et est illustré sur la Figure 3.7.

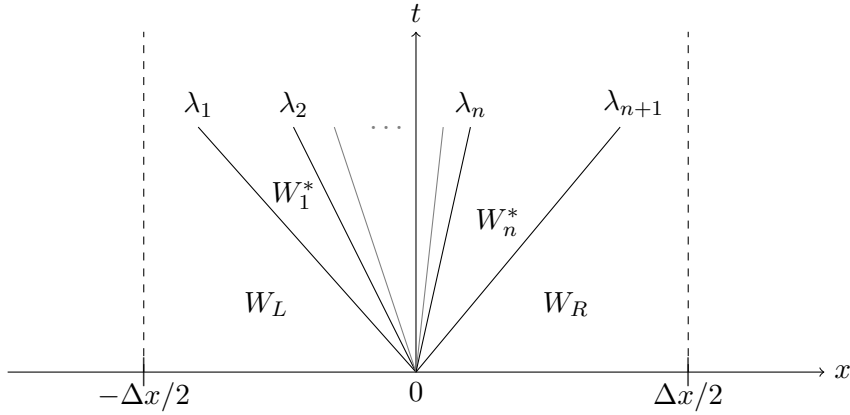


FIGURE 3.7: Solvateur type Godunov.

De manière analogue au schéma de Godunov, ce solveur permet de définir la fonction W^Δ , approchant la solution du problème (1) avec la condition initiale donnée par $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$, de la façon suivante :

$$W^\Delta(x, t^n + \Delta t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \widetilde{W}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right) \mathbf{1}_{x \in [x_i, x_{i+1}]}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

La mise à jour de l'approximation s'obtient ensuite en considérant les valeurs moyennes

de W^Δ sur chaque cellule (voir une illustration pour deux ondes en Figure 3.8) :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W^\Delta(x, t^n + \Delta t) dx,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = & \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \widetilde{W}\left(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx \\ & + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \widetilde{W}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

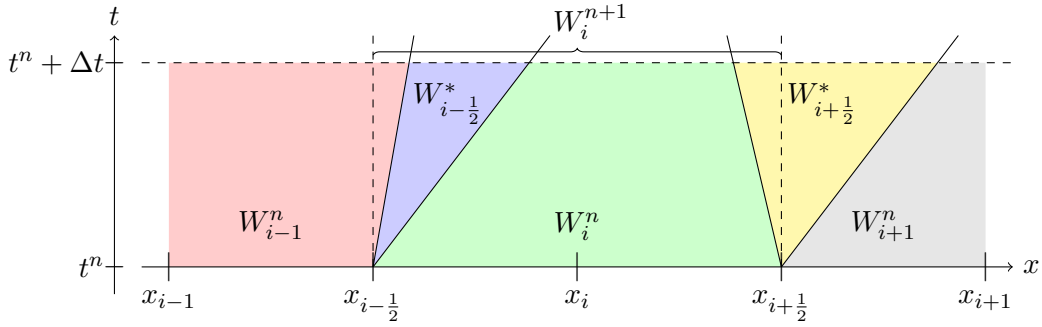


FIGURE 3.8: Illustration du schéma issu d'un solveur de Riemann approché dans le cas de deux ondes.

Pour écrire ce schéma sous la formulation flux (3), il est nécessaire de rappeler une des propriétés fondamentales que doit vérifier un solveur de Riemann approché. Il s'agit de la consistance intégrale : la solution approchée du problème de Riemann doit avoir la même moyenne que la solution exacte du problème Riemann sur les cellules duales (c'est-à-dire les cellules centrées aux interfaces). Cette propriété, introduite dans [51], s'exprime comme suit, à l'interface générique située en zéro :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx, \quad (8)$$

où $W_{\mathcal{R}}$ désigne le solveur de Riemann exact. Or, en intégrant l'équation (1) avec la condition initiale de Riemann donnée par (4), dont $W_{\mathcal{R}}$ est solution, sur $[0, \Delta t] \times [-\Delta x/2, \Delta x/2]$, l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx &= \frac{1}{2} (W_L + W_R) \\ &- \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \left(F\left(W_{\mathcal{R}}\left(\frac{\Delta x}{2t}; W_L, W_R\right)\right) - F\left(W_{\mathcal{R}}\left(\frac{-\Delta x}{2t}; W_L, W_R\right)\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Par la condition CFL (5), les ondes sont incluses dans le pavé $[0, T] \times [-\Delta x/2, \Delta x/2]$ (voir

Figure 3.7), ce qui permet d'écrire :

$$W_{\mathcal{R}}\left(\frac{-\Delta x}{2t}; W_L, W_R\right) = W_L \quad \text{et} \quad W_{\mathcal{R}}\left(\frac{\Delta x}{2t}; W_L, W_R\right) = W_R \quad \forall t \in (0, \Delta t).$$

La propriété de consistance intégrale (8) se réécrit donc de la façon suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx = \frac{1}{2} (W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_R) - F(W_L)). \quad (9)$$

Cette propriété permet d'écrire le schéma (7) sous la formulation flux (3). En effet, en procédant aux changements de variables en espace $x \leftarrow x - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x \leftarrow x - x_{i+\frac{1}{2}}$ dans les deux intégrales définissant le schéma (7), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx. \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus se réécrit de la manière suivante, en ajoutant et en ôtant l'intégrale du solveur approché entre $-\Delta x/2$ et $\Delta x/2$:

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx. \end{aligned}$$

La propriété de consistance intégrale (9) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)). \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, l'expression ci-dessus peut se réécrire sous la formulation flux (3) avec $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, où la fonction $\mathcal{F}$, appelée flux numérique, est définie par :

$$\mathcal{F}(W_L, W_R) = F(W_R) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} W_R + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R\right) dx. \quad (10)$$

Elle peut également être obtenue en travaillant sur des intégrales entre $-\Delta x/2$ et 0 et admet donc la deuxième écriture qui suit :

$$\mathcal{F}(W_L, W_R) = F(W_L) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} W_L - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^0 \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R\right) dx. \quad (11)$$

Le flux numérique doit satisfaire la propriété de consistance suivante :

$$\mathcal{F}(W, W) = F(W),$$

qui, en utilisant (10) ou (11), est obtenue dès que le solveur de Riemann approché vérifie

$$\widetilde{W}\left(\frac{x}{t}, W, W\right) = W, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Le développement d'un solveur de type Godunov très célèbre et particulièrement important dans les travaux présentés dans cette partie, le schéma HLL, est maintenant exposé. Il a été proposé par Harten, Lax et Van-Leer dans [51] et est issu d'un solveur de Riemann approché composé de deux ondes et d'un seul état intermédiaire constant, noté W^* . Les deux ondes associées à l'interface sont notées λ_L et λ_R et sont telles que $\lambda_L < \lambda_R$. Le solveur, illustré sur la Figure 3.9, s'écrit :

$$\widetilde{W}\left(\frac{x}{t}; W_L, W_R\right) = \begin{cases} W_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_L, \\ W^* & \text{si } \lambda_L < \frac{x}{t} \leq \lambda_R, \\ W_R & \text{sinon.} \end{cases} \quad (12)$$

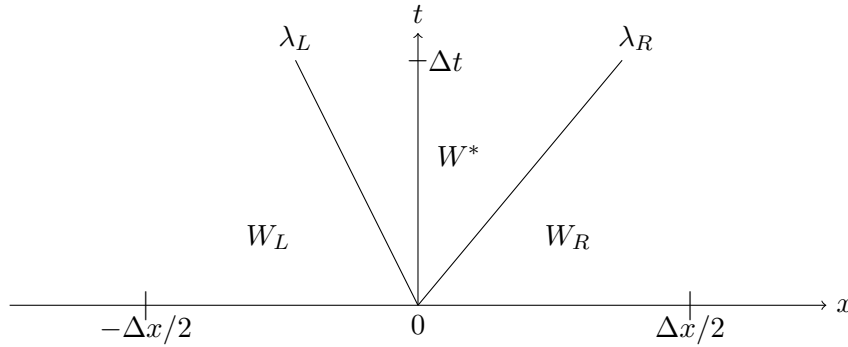


FIGURE 3.9: Solveur HLL.

L'état intermédiaire W^* est déterminé grâce à la propriété de consistance intégrale (9). En effet, elle impose l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx = \frac{1}{2} (W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_R) - F(W_L)).$$

Or, en utilisant la forme du solveur (12), cette intégrale s'écrit également :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R\right) dx = \frac{1}{2} (W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_R W_R - \lambda_L W_L - (\lambda_R - \lambda_L) W^*).$$

La consistance intégrale (9) impose alors la définition suivante de l'état intermédiaire W^* :

$$W^* = \frac{\lambda_R W_R - \lambda_L W_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{F(W_R) - F(W_L)}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (13)$$

En injectant (13) dans la forme générique du flux numérique (10) (ou (11)), la discrétisation peut s'écrire sous forme de formulation flux (3) avec le flux numérique suivant :

$$\mathcal{F}(W_L, W_R) = \begin{cases} F(W_L) & \text{si } 0 < \lambda_L, \\ F^* & \text{si } \lambda_L \leq 0 < \lambda_R, \\ F(W_R) & \text{si } \lambda_R \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

où

$$F^* = \frac{\lambda_R F(W_L) - \lambda_L F(W_R)}{\lambda_R - \lambda_L} + \frac{\lambda_L \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} (W_R - W_L). \quad (15)$$

Ce schéma est à la base de toutes les méthodes numériques présentées dans cette partie. Le plan de cette deuxième partie est le suivant.

Dans le Chapitre 4, une extension aux équations de Saint-Venant (2.12) de la méthode introduite par Berthon et Turpault dans [13] est proposée. Dans cet article, les auteurs développent des schémas préservant l'asymptotique dans le cas où l'opérateur de dérivation dans la limite de diffusion est linéaire. Ce n'est pas le cas pour la limite diffusive des équations de Saint-Venant, comme cela est mentionné dans le Chapitre 2. L'objet de ce chapitre est donc d'adapter la méthode, qui se fonde sur l'ajout d'un paramètre supplémentaire servant à contrôler la viscosité numérique dans une discrétisation HLL, à ce modèle.

Le Chapitre 5 traite d'une méthode de construction différente. L'idée de base est de préserver les états stationnaires du modèle hyperbolique, c'est-à-dire de déterminer une méthode exacte pour les solutions indépendantes du temps. Elle a été proposée dans [70] pour les équations de Saint-Venant avec terme source de friction de Manning (2.12). Dans ce chapitre il est montré que, grâce à une modification assez simple ne perturbant pas la préservation des états stationnaires, la discrétisation ainsi obtenue préserve la limite de diffusion. C'est un résultat fondamental puisque le schéma n'est pas initialement construit dans ce but. Ensuite, la méthode pour conserver les états stationnaires est appliquée au p -système (2.3) et au modèle M1 (2.19). Il est établi, ici encore, que les discrétisations ainsi construites préservent la limite de diffusion.

Pour finir, le Chapitre 6 est consacré à des illustrations numériques des deux méthodes proposées dans les Chapitres 4 et 5 pour chacun des trois modèles mentionnés. L'implémentation du schéma développé dans le Chapitre 4 pour les équations de Saint-Venant est nécessaire et des explications sur la manière de l'implémenter sont proposées. De plus, des discussions sur les ordres de convergence en espace des schémas sont données.

Méthode de perturbation HLL par correction visqueuse

Ce chapitre est dédié au développement de schémas dérivés du schéma HLL, capables de préserver l'asymptotique de diffusion. Ces travaux sont fondés sur les discrétisations proposées par Berthon et Turpault dans [13]. Leur idée consiste à considérer un schéma HLL modifié, dans lequel la discrétisation du terme source est injectée, puis à y ajouter un paramètre additionnel, jouant le rôle de degré de liberté supplémentaire. Ce paramètre permet une maîtrise de la viscosité numérique, qui devient dominante dans le régime asymptotique. Il est fixé de sorte que cette diffusion numérique coïncide avec une discrétisation de la diffusion intervenant dans l'équation limite associée au modèle hyperbolique. Le schéma ainsi développé est préserve alors l'asymptotique par construction.

Dans la section 4.1, la discrétisation HLL modifiée pour y inclure le terme source est exposée.

Ensuite, dans la section 4.2, la méthode introduite dans [13] est présentée plus en détails et un résultat de stabilité, également proposé dans [13], est exposé.

La section 4.3 concerne le cas du p -système pour lequel il n'est pas nécessaire d'ajouter de paramètre supplémentaire dans le schéma exposé en Section 4.1 pour préserver la limite de diffusion. La démonstration de la préservation de l'asymptotique est effectuée à l'aide de développements de Chapman-Enskog.

À l'opposé, la section 4.4 concerne le modèle M1, pour lequel il est indispensable d'ajouter un paramètre supplémentaire pour retrouver la limite de diffusion correcte. La préservation de l'asymptotique est démontré à l'aide, ici encore, de développements de Chapman-Enskog.

Enfin, dans la section 4.5, l'objet principal d'intérêt de ce chapitre est présenté. Il s'agit de l'extension de la méthode aux équations de Saint-Venant. Celle-ci n'est pas triviale puisque le terme source quadratique, impliquant un opérateur de dérivation très non linéaire dans l'équation de diffusion, impose un changement d'échelle différent de celui ha-

bituel pour cette méthode. Des propositions pour adapter la méthode à ce type de terme source sont proposées dans [34, 65]. L'adaptation exposée ici permet de garder une forme très proche du schéma proposé dans [13] pour les termes sources linéaires. Une implicitation du schéma hyperbolique et du schéma limite est ensuite donnée. En effet, le schéma pour la limite diffusive qui a été choisi est soumis à une condition CFL très restrictive et l'implicitation est nécessaire. Il faut toutefois préciser que le schéma hyperbolique implicite établi est toujours soumis à une restriction sur le pas de temps dépendant de ε car la jacobienne à inverser devient singulière quand ε tend vers zéro. Ces préoccupations numériques sont traitées dans le Chapitre 6.

4.1 Schéma HLL avec inclusion de la discrétisation du terme source

Pour commencer, le système hyperbolique avec terme source étudié est introduit en utilisant le formalisme (2.1) présenté dans le Chapitre 2. Il s'écrit :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = \sigma(R(x, W) - W), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (4.1)$$

où $W(x, t) \in \mathbb{R}^N$ désigne le vecteur des inconnues appartenant à l'ensemble convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. La fonction $F(W) \in \mathbb{R}^N$ désigne le flux. Le terme source est écrit de façon à exhiber le paramètre σ , qui contrôle, avec le temps t , le régime des solutions considéré. C'est pourquoi la fonction $R(x, W) \in \mathbb{R}^N$ ne dépend pas de σ .

Un maillage uniforme composé des cellules $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$ de taille constante Δx est considéré. Pour la discrétisation temporelle, l'incrément de temps est noté Δt et $t^n = n\Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La discrétisation présentée ici, introduite dans [18], permet d'inclure la discrétisation du terme source dans le solveur HLL en ajoutant dans ce dernier de la viscosité numérique additionnelle. Pour ce faire, les auteurs proposent de modifier le solveur de Riemann approché (12) en ajoutant une onde stationnaire (de vitesse nulle) de la manière suivante :

$$\widetilde{W}\left(\frac{x}{t}, W_L, W_R\right) = \begin{cases} W_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_L, \\ W_L^* & \text{si } \min(\lambda_L, 0) < \frac{x}{t} \leq \min(\lambda_R, 0), \\ W_R^* & \text{si } \max(\lambda_L, 0) < \frac{x}{t} \leq \max(\lambda_R, 0), \\ W_R & \text{si } \lambda_R < \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (4.2)$$

où les états intermédiaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} W_L^* &= \tilde{\alpha} W^* + (1 - \tilde{\alpha}) R(0^-, W_L), \\ W_R^* &= \tilde{\alpha} W^* + (1 - \tilde{\alpha}) R(0^+, W_R), \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec W^* l'état intermédiaire du solveur HLL, donné par (13), et où

$$R(0^\pm, W) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} R(x, W).$$

Le coefficient $\tilde{\alpha}$ intervenant dans les états intermédiaires est un paramètre compris entre 0 et 1, supposé consistant avec 1 quand Δx tend vers zéro. La proposition faite dans [13] est la suivante :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\lambda_R - \lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L + \sigma \Delta x}. \quad (4.4)$$

Des illustrations du solveur (4.2) sont présentées en Figure 4.1 pour deux configurations d'ondes différentes.

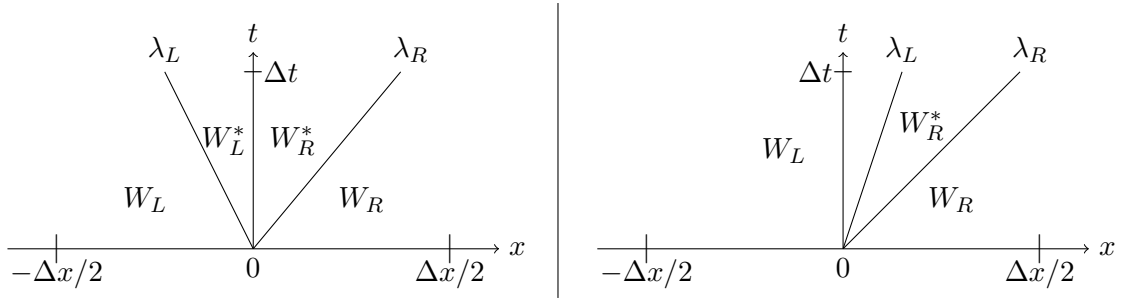


FIGURE 4.1: Solvateur HLL perturbé

L'état mis à jour W_i^{n+1} est obtenu en injectant le solveur de Riemann approché (4.2) aux interfaces $x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}}$ puis en intégrant sur la maille K_i :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \int_{-\Delta x/2}^0 W \left(\frac{x}{\Delta t}, W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx.$$

En utilisant la forme du solveur (4.2), le schéma ci-dessus se réécrit :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = W_i^n &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^L) \left(W_i^n - W_{i+\frac{1}{2}}^{L*} \right) + \min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^R) \left(W_{i+\frac{1}{2}}^{L*} - W_{i+1}^n \right) \right. \\ &\left. + \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^L) \left(W_{i-1}^n - W_{i-\frac{1}{2}}^{R*} \right) + \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^R) \left(W_{i-\frac{1}{2}}^{R*} - W_i^n \right) \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'injecter dans l'expression ci-dessus la définition des états intermédiaires (4.3) et d'utiliser les formules suivantes reliant le flux HLL F^* donné par (15) à l'état intermédiaire HLL W^* donné par (13) :

$$\lambda_L (W^* - W_L) = F^* - F_L \quad \text{et} \quad \lambda_R (W^* - W_R) = F^* - F_R,$$

pour obtenir le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
 W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Big[& \\
 & - \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_i^n \right) + \left(1 - \tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \right) \lambda_{i+\frac{1}{2}}^L \left(R \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) - W_i^n \right) \right) \mathbf{1}_{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^L < 0} \\
 & + \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i+1}^n \right) + \left(1 - \tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \right) \lambda_{i+\frac{1}{2}}^R \left(R \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) - W_{i+1}^n \right) \right) \mathbf{1}_{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^R < 0} \\
 & - \left(\tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \left(F_{i-\frac{1}{2}}^* - F_{i-1}^n \right) + \left(1 - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \right) \lambda_{i-\frac{1}{2}}^L \left(R \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) - W_{i-1}^n \right) \right) \mathbf{1}_{\lambda_{i-\frac{1}{2}}^L > 0} \\
 & + \left(\tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \left(F_{i-\frac{1}{2}}^* - F_i^n \right) + \left(1 - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \right) \lambda_{i-\frac{1}{2}}^R \left(R \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) - W_i^n \right) \right) \mathbf{1}_{\lambda_{i-\frac{1}{2}}^R > 0} \Big],
 \end{aligned}$$

où $F_i^n = F(W_i^n)$. En utilisant l'expression du flux numérique $\mathcal{F}$ du schéma HLL (14), le schéma complet s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(W_{i-1}^n, W_i^n) \right) \\
 + \Delta t \left(\frac{1 - \tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1 - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ \right), \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- &= \min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^L) \left(W_i^n - R \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) \right) \\
 &\quad + \min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^R) \left(R \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) - W_{i+1}^n \right) - F_i^n, \\
 \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ &= \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^L) \left(W_{i-1}^n - R \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) \right) \\
 &\quad + \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^R) \left(R \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) - W_i^n \right) + F_i^n. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

De par sa définition (4.4), $\tilde{\alpha}$ coïncide avec 1 à l'ordre zéro en Δx . Le flux du schéma ci-dessus est donc consistant avec le flux du schéma HLL. De plus, les auteurs de [13] ont montré à l'aide de développements de Taylor que, avec le choix (4.4) pour $\tilde{\alpha}$, le deuxième terme de (4.5) est consistant avec le terme source appliqué à l'état dans la cellule considérée $S(W_i^n)$ dans le cas d'un coefficient σ constant.

Dans toutes les applications présentées par la suite, les pentes utilisées sont systématiquement symétriques autour de zéro :

$$\lambda_R = -\lambda_L = \lambda > 0,$$

et le paramètre σ ainsi que la fonction R ne dépendent pas de la variable d'espace x . Ces hypothèses se justifient par soucis de clarté mais tous les résultats présentés dans ce chapitre restent vrais dans le cadre général. Dans ce cadre simplifié, les discrétisations du

terme source (4.6) s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- = \lambda_{i+\frac{1}{2}} (R(W_i^n) - W_i^n) - F(W_i^n), \\ \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ = \lambda_{i-\frac{1}{2}} (R(W_i^n) - W_i^n) + F(W_i^n), \end{cases} \quad (4.7)$$

et le paramètre $\tilde{\alpha}$ donné par (4.4) devient :

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sigma\Delta x}.$$

Il est à noter que $\tilde{\alpha}$, défini ci-dessus, vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{1 - \tilde{\alpha}}{\Delta x} = \frac{\sigma}{2\lambda} \tilde{\alpha},$$

et que, avec les pentes symétriques, le flux intermédiaire HLL s'écrit :

$$F^* = \frac{1}{2} (F(W_L) + F(W_R)) - \frac{\lambda}{2} (W_R - W_L).$$

En considérant les deux expressions ci-dessus, le schéma (4.5) admet finalement l'écriture simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = & W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (W_{i+1}^n - W_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (W_i^n - W_{i-1}^n) \right) \\ & + \frac{\sigma\Delta t}{2} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \right) (R(W_i^n) - W_i^n). \end{aligned} \quad (4.8)$$

La méthode pour construire un schéma préservant l'asymptotique à partir du schéma (4.8) est maintenant exposée.

4.2 Description de la méthode

L'idée des auteurs de [13] est d'utiliser le schéma HLL perturbé pour inclure le terme source (4.5) sur le système suivant, équivalent à (4.1) :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = (\sigma + \bar{\sigma}) \left(\bar{R}(x, W) - W \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (4.9)$$

où $\bar{\sigma}$ est un paramètre additionnel vérifiant $\sigma + \bar{\sigma} \geq 0$. Le terme source a été modifié et s'écrit maintenant avec $\bar{R}$ dont la définition est la suivante :

$$\bar{R}(x, W) = \frac{\sigma}{\sigma + \bar{\sigma}} R(x, W) + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma + \bar{\sigma}} W. \quad (4.10)$$

La discrétisation de (4.9) donnée par le schéma HLL perturbé (4.5) s'écrit de la façon suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \mathcal{F}(W_{i-1}^n, W_i^n) \right) + \Delta t \left(\frac{1 - \alpha_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1 - \alpha_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ \right), \quad (4.11)$$

où $\mathcal{F}$ désigne le flux numérique HLL défini par (14) et où le paramètre α est maintenant donné par :

$$\alpha = \frac{\lambda_R - \lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L + (\sigma + \bar{\sigma}) \Delta x},$$

et dépend donc de $\bar{\sigma}$. Il est important de noter que le paramètre α peut toujours dépendre, lui, de la variable d'espace x . En effet, puisque le paramètre $\bar{\sigma}$ est fixé pour que le régime diffusif du schéma coïncide avec une discrétisation de l'équation de diffusion, il peut dépendre des états de part et d'autre de l'interface à laquelle il est lié, et donc de x . La distinction entre $\tilde{\alpha}$ et α est effectuée puisque $\tilde{\alpha}$ est utilisé dans le schéma HLL perturbé (4.5), tandis que α est utilisé dans le schéma (4.11), désormais appelé schéma HLL consistant à la limite.

De plus, les discrétisations du terme source s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- = \min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^L) \left(W_i^n - \bar{R} \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) \right) \\ \quad + \min(0, \lambda_{i+\frac{1}{2}}^R) \left(\bar{R} \left(x_{i+\frac{1}{2}}^-, W_i^n \right) - W_{i+1}^n \right) - F(W_i^n), \\ \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ = \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^L) \left(W_{i-1}^n - \bar{R} \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) \right) \\ \quad + \max(0, \lambda_{i-\frac{1}{2}}^R) \left(\bar{R} \left(x_{i-\frac{1}{2}}^+, W_i^n \right) - W_i^n \right) + F(W_i^n). \end{cases}$$

En travaillant de la même façon qu'avec le schéma HLL perturbé (4.8) et en utilisant la définition de $\bar{R}$ donnée par (4.10), les pentes symétriques ainsi que σ et R indépendants de x permettent de réécrire le schéma (4.11) comme suit :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (W_{i+1}^n - W_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (W_i^n - W_{i-1}^n) \right) + \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}} \right) (R(W_i^n) - W_i^n), \quad (4.12)$$

avec

$$\alpha = \frac{2\lambda}{2\lambda + (\sigma + \bar{\sigma}) \Delta x}.$$

Le but de la méthode étant d'obtenir un schéma préservant l'asymptotique, le paramètre supplémentaire $\bar{\sigma}$ doit être fixé de sorte que le régime diffusif de (4.12) coïncide avec une discrétisation de l'équation de diffusion. Pour ce faire, il suffit d'injecter le changement

d'échelle du temps et du paramètre σ dans (4.12) puis de faire tendre ε vers zéro pour obtenir le schéma limite. Ensuite, un schéma pour l'équation de diffusion est choisit, puis $\bar{\sigma}$ est fixé pour que les deux schémas soient les mêmes. Il peut alors être fonction des discrétisations des deux côtés de l'interface associée :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(W_L, W_R),$$

d'où sa dépendance potentielle en la variable d'espace x .

Les auteurs de [13] ont obtenu un résultat de robustesse rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Dès que les discrétisations $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ au temps t^n appartiennent à l'ensemble convexe des états admissibles Ω et que la condition CFL suivante est vérifiée :*

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

les discrétisations $(W_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ au temps t^{n+1} obtenues par le schéma (4.12) appartiennent également à Ω .

Le lecteur peut se référer à [13] pour la preuve, qui utilise la forme convexe des états intermédiaires du solveur de Riemann utilisé.

Dans la prochaine section, il est établi que le schéma (4.8) pour le p -système préserve l'asymptotique et qu'il n'est pas nécessaire d'y injecter le paramètre additionnel $\bar{\sigma}$.

4.3 La question du p -système

Ce système, présenté dans le Chapitre 2, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (4.1) avec :

$$W = {}^t(\tau, u), \quad F(W) = {}^t(-u, p(\tau)) \quad \text{et} \quad R(W) = {}^t(\tau, 0).$$

La variable $\tau > 0$ désigne le volume spécifique du gaz et u sa vitesse. La pression p est décroissante pour assurer l'hyperbolicité du système et les valeurs propres de la jacobienne du flux sont données par $\lambda = \pm \sqrt{-p'(\tau)}$. Le modèle présenté ici est celui où la friction σ ne dépend pas de l'espace. La limite de diffusion de ce problème correspond à l'équation des milieux poreux rappelée ici :

$$\partial_t \tau + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\tau) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

et son équilibre local est le suivant :

$$u = -\frac{1}{\sigma} \partial_x p(\tau), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Les vitesses d'onde utilisées sont choisies de sorte que le cône qu'elles forment contienne les valeurs propres de la jacobienne du flux pour les états des deux côtés de l'interface considérée. Elles sont choisies symétriques autour de zéro et sont données par :

$$\lambda := \lambda_R = \max \left(\sqrt{-p'(\tau_L)}, \sqrt{-p'(\tau_R)} \right) = -\lambda_L > 0. \quad (4.17)$$

Le schéma HLL perturbé (4.8) pour le p -système (4.14), après changement d'échelle du temps $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et de la friction $\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon$, s'écrit :

$$\begin{cases} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^n - u_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) u_i^n, \end{cases} \quad (4.18)$$

où le paramètre $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ est défini comme suit, sans degré de liberté additionnel $\bar{\sigma}$:

$$\tilde{\alpha}^\varepsilon = \frac{2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon + \sigma\Delta x}. \quad (4.19)$$

Théorème 4.3.1. (*limite correcte*) Quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.18) vérifient l'équation de diffusion discrète suivante :

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\sigma\Delta x^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^2 (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^2 (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right). \quad (4.20)$$

Remarque 5. La discrétisation limite obtenue (4.20) est consistante avec l'équation de diffusion (4.15). En effet, par la définition des pentes (4.17), la quantité

$$\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^2 (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^2 (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n)}{\sigma\Delta x^2},$$

est consistante avec $\partial_x(-p'(\tau)\partial_x\tau)/\sigma$, c'est-à-dire avec $-\partial_{xx}p(\tau)/\sigma$ dans le cas de solutions régulières.

Démonstration. La démonstration s'effectue à l'aide de développements de Chapman-

Enskog des discrétisations :

$$\tau_i^n = \tau_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{et} \quad u_i^n = u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.21)$$

En notant que la quantité $p(\tau_i^n)$ admet le développement suivant :

$$p(\tau_i^n) = p(\tau_i^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

et, en injectant (4.21) dans la seconde équation de (4.18), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} u_i^{0,n+1} = u_i^{0,n} &- \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_i^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(p(\tau_i^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1}^{0,n} - u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(u_i^{0,n} - u_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ &- \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) \left(u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La définition de $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ (4.19) fournit immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2\lambda}{\sigma\Delta x}. \quad (4.23)$$

Ainsi, le terme dominant de l'équation (4.22) quand ε tend vers zéro est le dernier, ce qui donne :

$$u_i^{0,n} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le terme d'ordre zéro dans le développement de Chapman-Enskog de la vitesse est donc nul et les développements asymptotiques (4.21) s'écrivent alors :

$$\tau_i^n = \tau_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{et} \quad u_i^n = \varepsilon \left(u_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.24)$$

En utilisant les développements (4.24), la première équation du schéma (4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_i^{0,n+1} = \tau_i^{0,n} &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_{i+1}^{1,n} - u_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_i^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers zéro dans l'équation ci-dessus et en utilisant l'expression de la limite de $\frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.23), le résultat attendu (4.20) est obtenu. $\square$

Il est à noter que, à la limite, la deuxième expression de (4.18) est bien consistante avec l'équilibre local (4.16). En effet, en considérant les développements de Chapman-Enskog (4.24), la deuxième équation de (4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon u_i^{1,n+1} = & \varepsilon u_i^{1,n} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_i^{0,n}) \right) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(p(\tau_i^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_i^{1,n} \right) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(u_i^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\ & - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) \left(u_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

En utilisant la limite de la quantité $\frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.23), la limite de l'équation ci-dessus est la suivante :

$$u_i^{1,n} = -\frac{1}{2\sigma \Delta x} \left(\frac{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}}} \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_i^{0,n}) \right) + \frac{2\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}}} \left(p(\tau_i^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) \right) \right),$$

qui est bien une discrétisation de l'équilibre local (4.16).

Le résultat de cette section montre que l'ajout d'un paramètre additionnel $\bar{\sigma}$ pour obtenir un schéma préservant l'asymptotique n'est pas systématiquement nécessaire. Cependant, le cas du p -système reste isolé et, en général, le schéma (4.8) ne préserve pas la limite diffusive. En effet, dans la suite, ce schéma est appliqué au modèle M1 et il est montré que l'ajout d'un paramètre supplémentaire est indispensable pour retrouver une discrétisation correcte de la limite diffusive.

4.4 Application au modèle M1

Ce système, également présenté dans le Chapitre 2, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + c^2 \partial_x \left(E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -c\sigma F, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (4.1) avec

$$W = {}^t(E, F), \quad F(W) = {}^t \left(F, c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) \quad \text{et} \quad R(W) = {}^t(E, (1-c)F).$$

La variable $E > 0$ désigne l'énergie radiative et F le flux radiatif. La fonction χ , appelée facteur d'Eddington, s'écrit :

$$\chi(f) = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}} \quad \forall f \in \left] -2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3} \right[. \quad (4.26)$$

Le modèle présenté ici est celui où le paramètre d'opacité σ ne dépend pas de l'espace. La limite de diffusion de ce problème correspond à l'équation de la chaleur rappelée ici :

$$\partial_t E - \frac{c}{3\sigma} \partial_{xx} E = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (4.27)$$

et son équilibre local est le suivant :

$$F = -\frac{c}{3\sigma} \partial_x E, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

En accord avec les vitesses d'onde utilisées dans [13, 16], λ_L et λ_R sont choisies constantes égales à $\pm c$ et sont donc bien symétriques autour de zéro.

Dans cette partie, les deux résultats proposés dans [13] pour le modèle M1 sont rappelés. Le premier concerne la non préservation de la limite diffusive du schéma HLL perturbé (4.8) tandis que le deuxième donne une définition du paramètre additionnel $\bar{\sigma}$ pour obtenir la préservation de l'asymptotique par le schéma (4.12).

Le schéma HLL perturbé (4.8) pour le modèle M1 (4.25), après changement d'échelle du temps $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et de l'opacité $\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon$, s'écrit :

$$\begin{cases} E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{c \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n), \\ F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{c^2 \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{c \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n) - \frac{c \sigma \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon^2} F_i^n, \end{cases} \quad (4.29)$$

où $(\phi_i^n)_i^n$ défini par

$$\phi_i^n = \chi \left(\frac{F_i^n}{c E_i^n} \right), \quad (4.30)$$

a été introduit afin d'alléger les notations. Le paramètre $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ est défini constant comme suit, sans degré de liberté additionnel $\bar{\sigma}$:

$$\tilde{\alpha}^\varepsilon = \frac{2c\varepsilon}{2c\varepsilon + \sigma \Delta x}. \quad (4.31)$$

Théorème 4.4.1. (*limite incorrecte*) Quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.29) vérifient l'équation de diffusion discrète suivante :

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{c^2 \Delta t}{\sigma \Delta x^2} (E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n). \quad (4.32)$$

Remarque 6. La discrétisation limite obtenue (4.32) n'est pas consistante avec l'équation de diffusion (4.27) puisque le coefficient de diffusion est $-c^2/\sigma$ et non $-c/(3\sigma)$.

Démonstration. La démonstration s'effectue à l'aide de développements de Chapman-

Enskog des discrétisations :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = F_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.33)$$

où l'ordre zéro de l'énergie radiative $E_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, comme l'énergie radiative globale E_i^n l'est. Ainsi, le développement de (ϕ_i^n) , défini par (4.30), est le suivant :

$$\phi_i^n = \phi_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \phi_i^{0,n} = \chi \left(\frac{F_i^{0,n}}{cE_i^{0,n}} \right). \quad (4.34)$$

En injectant les développements (4.33) et (4.34), la deuxième équation de (4.29) devient :

$$\begin{aligned} F_i^{0,n+1} = F_i^{0,n} &- \frac{c^2 \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(E_{i+1}^{0,n} \phi_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n} \phi_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &+ \frac{c \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(F_{i+1}^{0,n} - 2F_i^{0,n} + F_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &- \frac{c \sigma \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left(F_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.35)$$

La définition de $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ donnée par (4.31) fournit immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2c}{\sigma \Delta x}. \quad (4.36)$$

Ainsi, le terme dominant de l'équation (4.35) quand ε tend vers zéro est le dernier, ce qui donne :

$$F_i^{0,n} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le terme d'ordre zéro dans le développement de Chapman-Enskog du flux radiatif est donc nul et les développements asymptotiques (4.33) s'écrivent alors :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = \varepsilon \left(F_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.37)$$

En utilisant les développements (4.37), la première équation du schéma (4.29) devient :

$$\begin{aligned} E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} &- \frac{\Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\Delta x} \left(F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &+ \frac{c \Delta t \tilde{\alpha}^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(E_{i+1}^{0,n} - 2E_i^{0,n} + E_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.38)$$

En faisant tendre ε vers zéro dans l'équation ci-dessus et en utilisant l'expression de la limite de $\frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.36), le résultat attendu (4.32) est obtenu. $\square$

Ainsi, le schéma HLL perturbé (4.8) ne préserve pas, cette fois-ci, l'asymptotique. Il est donc nécessaire ici d'utiliser la méthode décrite dans la section 4.2. Le schéma (4.12) pour le modèle M1 (4.25), après changement d'échelle du temps $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et de l'opacité

$\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon$, s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (F_{i+1}^n - F_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{c\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (E_{i+1}^n - E_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (E_i^n - E_{i-1}^n) \right), \\ F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{c^2\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (E_{i+1}^n\phi_{i+1}^n - E_i^n\phi_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (E_i^n\phi_i^n - E_{i-1}^n\phi_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{c\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (F_{i+1}^n - F_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{c\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) F_i^n, \end{array} \right. \quad (4.39)$$

où la variable ϕ est définie par (4.30) et le paramètre α^ε est défini par :

$$\alpha^\varepsilon = \frac{2c\varepsilon}{2c\varepsilon + (\sigma + \bar{\sigma})\Delta x}. \quad (4.40)$$

Théorème 4.4.2. (*limite correcte*) Si le paramètre $\bar{\sigma}$ est fixé comme suit :

$$\bar{\sigma} = (3c - 1)\sigma, \quad (4.41)$$

alors, quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.39) vérifient l'équation de diffusion discrète suivante :

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{c\Delta t}{3\sigma\Delta x^2} (E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n). \quad (4.42)$$

Remarque 7. Dans ce cas particulier, puisque le coefficient $\bar{\sigma}$ est choisi indépendant de l'espace, le paramètre additionnel α^ε est également indépendant de l'espace.

Remarque 8. En considérant $\bar{\sigma}$ donné par (4.41), la quantité $\sigma + \bar{\sigma}$ est bien strictement positive.

Remarque 9. L'expression (4.42) est bien consistante avec l'équation de diffusion (4.27). Bien entendu, cette discrétisation asymptotique a été choisie en amont puis le paramètre $\bar{\sigma}$ a été fixé pour que la limite du schéma (4.39) coïncide avec cette discrétisation.

Démonstration. La démonstration s'effectue à l'aide des développements de Chapman-Enskog suivants :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = F_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.43)$$

où l'ordre zéro de l'énergie radiative $E_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, comme l'énergie radiative globale E_i^n l'est. Ainsi, le développement de (ϕ_i^n) , défini par (4.30), est le suivant :

$$\phi_i^n = \phi_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \phi_i^{0,n} = \chi \left(\frac{F_i^{0,n}}{cE_i^{0,n}} \right). \quad (4.44)$$

En injectant les développements (4.43) et (4.44), la deuxième équation de (4.39) devient :

$$\begin{aligned} F_i^{0,n+1} = F_i^{0,n} &- \frac{c^2 \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(E_{i+1}^{0,n} \phi_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n} \phi_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &+ \frac{c \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(F_{i+1}^{0,n} - 2F_i^{0,n} + F_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &- \frac{c\sigma \Delta t \alpha^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left(F_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Le paramètre α^ε ne dépend pas de l'espace puisque $\bar{\sigma}$ donné par (4.41) ne dépend pas de l'espace. La définition de α^ε donnée par (4.40) et celle de $\bar{\sigma}$ (4.41) fournissent immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{3\sigma \Delta x}. \quad (4.46)$$

Ainsi, $\frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}$ admet une limite non nulle et le terme dominant de l'équation (4.45) quand ε tend vers zéro est le dernier. Sa limite s'écrit alors :

$$F_i^{0,n} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Le terme d'ordre zéro dans le développement de Chapman-Enskog du flux radiatif est donc nul et les développements asymptotiques (4.43) s'écrivent alors :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = \varepsilon \left(F_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.47)$$

Concernant (ϕ_i^n) donné par (4.30), son développement s'écrit maintenant :

$$\phi_i^n = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.48)$$

car $\chi(0) = \frac{1}{3}$ par la définition (4.26). En utilisant les développements (4.47), la première équation du schéma (4.39) s'écrit :

$$\begin{aligned} E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} &- \frac{\Delta t \alpha^\varepsilon}{2\Delta x} \left(F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &+ \frac{c \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(E_{i+1}^{0,n} - 2E_i^{0,n} + E_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.49)$$

En faisant tendre ε vers zéro dans l'équation ci-dessus et en utilisant l'expression de la limite de $\frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.46), le résultat attendu (4.42) est obtenu. $\square$

Il est à noter que, à la limite, la deuxième équation de (4.39) est également consistante avec l'équilibre local (4.28). En effet, en considérant les développements de Chapman-

Enskog (4.47) et (4.48), la deuxième équation de (4.39) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon F_i^{1,n+1} = & \varepsilon F_i^{1,n} - \frac{c^2 \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} \left(\frac{1}{3} E_{i+1}^{0,n} - \frac{1}{3} E_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ & + \frac{c \Delta t \alpha^\varepsilon}{2 \Delta x} \left(F_{i+1}^{1,n} - 2F_i^{1,n} + F_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ & - \frac{c \sigma \Delta t \alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \left(F_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En utilisant la limite non nulle de la quantité $\frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.46), la limite de l'équation ci-dessus est la suivante :

$$F_i^{1,n} = -\frac{c}{3\sigma} \frac{E_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{2\Delta x},$$

qui est bien une discrétisation consistante avec l'équilibre local (4.28).

L'extension de la méthode issue de [13] pour les équations de Saint-Venant est maintenant proposée. La difficulté réside dans le changement d'échelle différent de la friction.

4.5 Extension aux équations de Saint-Venant

Dans cette partie, l'extension des travaux issus de [13] aux équations de Saint-Venant est proposée. Comme présenté dans le Chapitre 2, les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = -kq|q|h^{-\eta}, \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (4.50)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (4.1) avec :

$$W = {}^t(h, q), \quad F(W) = {}^t\left(q, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad R(W) = {}^t(h, q - q|q|h^{-\eta}). \quad (4.51)$$

La variable $h > 0$ désigne la hauteur d'eau et q son débit. Dans ce modèle, le coefficient décrivant la raideur du terme source se note non plus σ mais k et il ne dépend toujours pas de l'espace. La limite de diffusion de ce modèle correspond à l'équation très non linéaire suivante :

$$\partial_t h + \partial_x \left(-\text{sign}(\partial_x h) \sqrt{\frac{h^\eta}{k}} \left| \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right| \right) = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (4.52)$$

et son équilibre local s'écrit :

$$q = -\text{sign}(\partial_x h) \sqrt{\frac{h^\eta}{k}} \left| \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right|, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (4.53)$$

Les vitesses d'onde utilisées sont choisies en fonction des valeurs propres de la jacobienne du flux, qui valent :

$$\lambda^-(W) = \frac{q}{h} - \sqrt{gh} \quad \text{et} \quad \lambda^+(W) = \frac{q}{h} + \sqrt{gh},$$

et sont choisies symétriques centrées autour de zéro comme suit :

$$\lambda_R = \max \left(\frac{|q_L|}{h_L} + \sqrt{gh_L}, \frac{|q_R|}{h_R} + \sqrt{gh_R} \right) = -\lambda_L > 0. \quad (4.54)$$

Comme observé dans le Chapitre 2, le terme source quadratique nécessite un changement d'échelle de k en $k \leftarrow k/\varepsilon^2$ et non $k \leftarrow k/\varepsilon$ comme pour les deux autres systèmes étudiés. Cela impose également des modifications dans le schéma HLL avec perturbation. En effet, si le schéma HLL perturbé (4.8) est appliqué directement au modèle (4.50), alors la discrétisation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g(h_{i+1}^n)^2}{2} \right) - \left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g(h_i^n)^2}{2} \right) \right) \right. \\ \quad \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g(h_i^n)^2}{2} \right) - \left(\frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} + \frac{g(h_{i-1}^n)^2}{2} \right) \right) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \right) q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (4.55)$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\lambda}{2\lambda + k\Delta x}.$$

L'introduction du même changement d'échelle que celui utilisé dans le cadre continu $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et $k \leftarrow k/\varepsilon^2$ permet de réécrire (4.55) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^n - q_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g(h_{i+1}^n)^2}{2} \right) - \left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g(h_i^n)^2}{2} \right) \right) \right. \\ \quad \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g(h_i^n)^2}{2} \right) - \left(\frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} + \frac{g(h_{i-1}^n)^2}{2} \right) \right) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (4.56)$$

et $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ est défini par :

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\lambda\varepsilon^2}{2\lambda\varepsilon^2 + k\Delta x}.$$

La limite de $\frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro est donc nulle et, à la limite, la première équation de (4.56) s'écrit :

$$h_i^{n+1} = h_i^n, \quad (4.57)$$

ce qui ne correspond pas à une discrétisation de l'équation de diffusion (4.52).

Il est alors nécessaire de procéder à une modification dans le schéma HLL perturbé. Il s'agit de modifier le paramètre $\tilde{\alpha}$ et les discrétisations du terme source (4.7) via l'ajout d'un paramètre positif δ comme suit :

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\lambda}{2\lambda + k\delta\Delta x}, \quad (4.58)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\delta} (R(W_i^n) - W_i^n) - F(W_i^n), \\ \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}}^+ = \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\delta} (R(W_i^n) - W_i^n) + F(W_i^n). \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Après quelques calculs, le schéma (4.8) est retrouvé :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (W_{i+1}^n - W_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (W_i^n - W_{i-1}^n) \right) \\ &\quad + \frac{k\Delta t}{2} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}} \right) (R(W_i^n) - W_i^n), \end{aligned} \quad (4.60)$$

et δ intervient uniquement dans le paramètre $\tilde{\alpha}$. Puisque $\tilde{\alpha} = 1 + \mathcal{O}(\Delta x)$, le schéma ci-dessus est bien consistant avec le système hyperbolique considéré (4.1), de la même manière que l'était (4.8).

L'astuce est en fait de poser $\delta = \varepsilon$. En effet, cela permet au coefficient $\tilde{\alpha}$ d'être de l'ordre de ε après avoir injecté le changement d'échelle de l'opacité $k \leftarrow k/\varepsilon^2$:

$$\tilde{\alpha}^\varepsilon = \frac{2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon + k\Delta x}. \quad (4.61)$$

En utilisant (4.51), et après changement d'échelle du temps et de k , le schéma (4.60) pour les équations de Saint-Venant (4.50) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^n - q_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^n - u_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (4.62)$$

où la variable u définie par

$$u = \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2}, \quad (4.63)$$

a été introduite afin d'alléger les notations et où le paramètre $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ est donné par (4.61).

Théorème 4.5.1. (*limite incorrecte*) Quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.62) vérifient l'équation de diffusion discrète suivante :

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{k\Delta x^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^2 (h_{i+1}^n - h_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^2 (h_i^n - h_{i-1}^n) \right). \quad (4.64)$$

Remarque 10. La discrétisation limite obtenue (4.64) n'est pas consistante avec l'équation de diffusion (4.52).

Démonstration. La démonstration s'effectue ici encore à l'aide de développements de Chapman-Enskog des discrétisations :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q_i^n = q_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.65)$$

où l'ordre zéro de la hauteur d'eau $h_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, comme la hauteur d'eau globale h_i^n l'est. Ainsi, le développement de (u_i^n) , défini

par (4.63), est le suivant :

$$u_i^n = u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{avec } u_i^{0,n} = \frac{(q_i^{0,n})^2}{h_i^{0,n}} + g \frac{(h_i^{0,n})^2}{2}. \quad (4.66)$$

Le développement suivant est également obtenu :

$$q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta} = q_i^{0,n} |q_i^{0,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.67)$$

En injectant les développements (4.65), (4.66) et (4.67), la deuxième équation de (4.62) devient :

$$\begin{aligned} q_i^{0,n+1} = q_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} & \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_{i+1}^{0,n} - u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ & \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_i^{0,n} - u_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(q_{i+1}^{0,n} - q_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ & \left. - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(q_i^{0,n} - q_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ & - \frac{k \Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) \left(q_i^{0,n} |q_i^{0,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.68)$$

La définition de $\tilde{\alpha}^\varepsilon$ donnée par (4.61) fournit immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2\lambda}{k \Delta x}. \quad (4.69)$$

Ainsi, le terme dominant de l'équation (4.68) quand ε tend vers zéro est le dernier, ce qui donne :

$$q_i^{0,n} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Le terme d'ordre zéro dans le développement de Chapman-Enskog du débit est donc nul et les développements asymptotiques (4.66) s'écrivent alors :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q_i^n = \varepsilon \left(q_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.70)$$

En utilisant les développements (4.70), la première équation de (4.62) devient :

$$\begin{aligned} h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(q_{i+1}^{1,n} - q_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ & \left. + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(q_i^{1,n} - q_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\ & \left. - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.71)$$

En faisant tendre ε vers zéro dans l'équation ci-dessus et en utilisant l'expression de la limite de $\frac{\bar{\alpha}^\varepsilon}{\varepsilon}$ donnée par (4.69), le résultat attendu (4.64) est obtenu. $\square$

Ainsi, le schéma HLL perturbé pour inclure le terme source (4.60) ne préserve pas l'asymptotique. Il est donc nécessaire, ici encore, d'utiliser la méthode décrite dans la section 4.2. Cependant, il est essentiel d'y ajouter le paramètre supplémentaire δ qui sera pris égal à ε après changement d'échelle. Pour obtenir ce schéma, il suffit d'appliquer la discrétisation (4.60) au système (4.1) avec $k + \bar{k}$ pour friction et $\bar{R}$ défini en (4.10). Après quelques calculs similaires à ceux effectués pour acquérir (4.60), le schéma (4.12) est retrouvé :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = W_i^n &- \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} (W_{i+1}^n - W_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}} \lambda_{i-\frac{1}{2}} (W_i^n - W_{i-1}^n) \right) \\ &+ \frac{k\Delta t}{2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}} \right) (R(W_i^n) - W_i^n), \end{aligned} \quad (4.72)$$

et δ intervient uniquement dans le paramètre α défini par :

$$\alpha = \frac{2\lambda}{2\lambda + (k + \bar{k}) \Delta x}.$$

Puisque $\alpha = 1 + \mathcal{O}(\Delta x)$, le schéma (4.72) est bien consistant avec le système hyperbolique considéré (4.1), de la même manière que l'était (4.12).

En posant $\delta = \varepsilon$ et en effectuant les changements d'échelle $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$, $k \leftarrow k/\varepsilon^2$ et $\bar{k} \leftarrow \bar{k}/\varepsilon^2$ dans le schéma (4.72) pour les équations de Saint-Venant (4.50), le schéma suivant est obtenu :

$$\left\{ \begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^n - q_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right), \\ q_i^{n+1} &= q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^n - u_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ &\quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta}, \end{aligned} \right. \quad (4.73)$$

où la variable u est définie en (4.63) et où le paramètre α^ε est donné par :

$$\alpha^\varepsilon = \frac{2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon + (k + \bar{k}) \Delta x}. \quad (4.74)$$

Théorème 4.5.2. (*limite correcte*) Si $\bar{k}$ est fixé comme suit :

$$\bar{k} = 2\lambda^2 \sqrt{\frac{\bar{k}}{g}} \sqrt{\frac{|h_R - h_L|}{(h_R^\eta + h_L^\eta) \Delta x (h_R + h_L)}} - k, \quad (4.75)$$

avec h_L et h_R les discrétisations de h au temps t^n de part et d'autre de l'interface, alors, quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.73) vérifient l'équation de diffusion discrète suivante :

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} (f(h_i^n, h_{i+1}^n) - f(h_{i-1}^n, h_i^n)), \quad (4.76)$$

où la fonction antisymétrique f définie par

$$f(h_L, h_R) = \text{sign}(h_R - h_L) \sqrt{(h_R^\eta + h_L^\eta) \left| \frac{h_R^2 - h_L^2}{\Delta x} \right|}, \quad (4.77)$$

a été introduite afin d'alléger les notations.

Remarque 11. Le paramètre α dépend de la variable de temps t . Il est calculé ici au temps t^n , mais l'indexation par n est omise pour alléger la lecture. Dans la prochaine partie concernant l'implication du schéma (4.73), le paramètre α est cette fois pris au temps t^{n+1} .

Remarque 12. En considérant la définition (4.75) de $\bar{k}$, la quantité $k + \bar{k}$ est positive mais peut être nulle lorsque $h_L = h_R$, c'est-à-dire en hauteur d'eau constante. Cela peut paraître ennuyeux de premier abord, mais ces cas singuliers se traitent à part sans poser de problème particulier, comme cela sera vu dans la preuve du Théorème 4.5.2.

Remarque 13. La discrétisation limite obtenue (4.76) est bien consistante avec l'équation de diffusion (4.52). Ici encore, partant de la discrétisation de la limite de diffusion (4.76), le paramètre $\bar{k}$ est fixé de telle sorte que la limite du schéma (4.73) coïncide avec cette discrétisation du problème limite.

Démonstration. La démonstration s'effectue ici encore à l'aide des développements de Chapman-Enskog suivants :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q_i^n = q_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.78)$$

où l'ordre zéro de la hauteur d'eau $h_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, comme la hauteur d'eau globale h_i^n l'est. Ainsi, le développement de (u_i^n) , défini par (4.63), est le suivant :

$$u_i^n = u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad u_i^{0,n} = \frac{(q_i^{0,n})^2}{h_i^{0,n}} + g \frac{(h_i^{0,n})^2}{2}. \quad (4.79)$$

Le développement suivant est également obtenu :

$$q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta} = q_i^{0,n} |q_i^{0,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.80)$$

En injectant les développements (4.78), (4.79) et (4.80), la deuxième équation de (4.73) devient :

$$\begin{aligned}
 q_i^{0,n+1} = q_i^{0,n} &- \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_{i+1}^{0,n} - u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(u_i^{0,n} - u_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\
 &+ \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(q_{i+1}^{0,n} - q_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(q_i^{0,n} - q_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\
 &- \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) \left(q_i^{0,n} |q_i^{0,n}| \left(h_i^{0,n} \right)^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

La définition de α^ε donnée par (4.74) fournit immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{g((h_L^0)^\eta + (h_R^0)^\eta)(h_L^0 + h_R^0)}{k|h_R^0 - h_L^0|\Delta x}} & \text{si } h_L^0 \neq h_R^0, \\ +\infty & \text{si } h_L^0 = h_R^0. \end{cases}$$

Même si la limite de $\frac{\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}$ peut ne pas être finie, le terme dominant quand ε tend vers zéro dans l'équation (4.81) est le dernier. Sa limite s'écrit alors :

$$q_i^{0,n} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Le terme d'ordre zéro dans le développement de Chapman-Enskog du débit est donc nul et les développements asymptotiques (4.78) s'écrivent alors :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \varepsilon h_i^{1,n} + \varepsilon^2 h_i^{2,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{et} \quad q_i^n = \varepsilon \left(q_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \tag{4.82}$$

et le développement suivant est également obtenu :

$$q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta} = \varepsilon^2 \left(q_i^{1,n} |q_i^{1,n}| \left(h_i^{0,n} \right)^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \tag{4.83}$$

Pour terminer cette preuve, il est nécessaire de distinguer différents cas selon les ordres zéro et un des hauteurs d'eau h_{i-1}^n , h_i^n et h_{i+1}^n . Pour ce faire, le développement suivant de α^ε à une interface générique avec $h_L = h_L^0 + \varepsilon h_L^1 + \varepsilon^2 h_L^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ pour hauteur d'eau à gauche et $h_R = h_R^0 + \varepsilon h_R^1 + \varepsilon^2 h_R^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ pour hauteur d'eau à droite est tout d'abord écrit :

$$\alpha^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon \alpha^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{si } h_L^0 \neq h_R^0, \\ \sqrt{\varepsilon} \alpha^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 \neq h_R^1, \\ \alpha^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 = h_R^1, \end{cases} \tag{4.84}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{g((h_R^0)^\eta + (h_L^0)^\eta)(h_R^0 + h_L^0)}{k|h_R^0 - h_L^0|\Delta x}} > 0, \\ \alpha^{1/2} &= \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{g(h_R^0)^{\eta+1}}{k|h_R^1 - h_L^1|\Delta x}} > 0, \\ \text{et } \alpha^0 &= \left(1 + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{k|h_R^2 - h_L^2|\Delta x}{g(h_R^0)^{\eta+1}}}\right)^{-1} > 0.\end{aligned}\tag{4.85}$$

Les quantités β^L et β^R à cette même interface sont définies de la façon suivante, $K \in \{L, R\}$:

$$\beta^K = -\frac{\Delta t}{2\varepsilon} \alpha^\varepsilon \left(\frac{g}{2\Delta x} \left((h_R)^2 - (h_L)^2 \right) + \frac{k}{\varepsilon^2} q_K |q_K| (h_K)^{-\eta} \right).$$

Ces quantités interviennent dans la deuxième équation du schéma (4.73) qui peut se réécrire comme suit après utilisation de la définition de u donnée par (4.63) :

$$\begin{aligned}q_i^{n+1} &= q_i^n + \beta_{i+\frac{1}{2}}^L + \beta_{i-\frac{1}{2}}^R + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} - \frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} \right) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} \right) \right).\end{aligned}$$

Par les développements (4.82), (4.83) et (4.84), les quantités β^L et β^R admettent les développements suivants, $K \in \{L, R\}$:

$$\beta^K = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{2} \alpha^1 \left(\frac{g}{2\Delta x} \left((h_R^0)^2 - (h_L^0)^2 \right) + k q_K^1 |q_K^1| (h_K^0)^{-\eta} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 \neq h_R^0, \\ -\frac{k\Delta t}{2\sqrt{\varepsilon}} \alpha^{1/2} q_K^1 |q_K^1| (h_K^0)^{-\eta} + \mathcal{O}(1) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 \neq h_R^1, \\ -\frac{k\Delta t}{2\varepsilon} \alpha^0 q_K^1 |q_K^1| (h_K^0)^{-\eta} + \mathcal{O}(1) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 = h_R^1. \end{cases}$$

De plus

$$\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon \lambda (q_R - q_L) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\Delta t}{2\Delta x} \alpha^1 (q_R^1 - q_L^1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{si } h_L^0 \neq h_R^0, \\ \frac{\sqrt{\varepsilon}\Delta t}{2\Delta x} \alpha^{1/2} (q_R^1 - q_L^1) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 \neq h_R^1, \\ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \alpha^0 (q_R^1 - q_L^1) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 = h_R^1, \end{cases}$$

et

$$\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon \left(\frac{q_R^2}{h_R} - \frac{q_L^2}{h_L} \right) = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \alpha^\varepsilon \left(\frac{(q_R^1)^2}{h_R^0} - \frac{(q_L^1)^2}{h_L^0} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Grâce aux développements ci-dessus ainsi que (4.82), la seconde équation du schéma

(4.73) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon) = -\frac{g\Delta t}{4\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 \left((h_{i+1}^{0,n})^2 - (h_i^{0,n})^2 \right) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^1 \left((h_i^{0,n})^2 - (h_{i-1}^{0,n})^2 \right) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^1 \right) q_i^{1,n} |q_i^{1,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta} \quad \text{si } h_i^{0,n} \neq h_{i+1}^{0,n} \text{ et } h_i^{0,n} \neq h_{i-1}^{0,n}, \\ \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) = q_i^{1,n} |q_i^{1,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si à aucune des deux interfaces la hauteur d'eau à l'ordre zéro est constante, la limite de la seconde équation du schéma (4.73) s'écrit :

$$\frac{g}{2} \left(\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^1} \frac{(h_{i+1}^{0,n})^2 - (h_i^{0,n})^2}{\Delta x} + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^1} \frac{(h_i^{0,n})^2 - (h_{i-1}^{0,n})^2}{\Delta x} \right) = -k q_i^{1,n} |q_i^{1,n}| (h_i^{0,n})^{-\eta},$$

qui est bien une discrétisation de l'équilibre local (4.53). En revanche, dès que la hauteur d'eau à l'ordre zéro est constante à une des deux interfaces alors la seconde équation du schéma (4.73) donne $\bar{q}_i^{1,n} = 0$. De la même façon, le débit à l'ordre un est nul de l'autre côté de l'interface où la hauteur d'eau à l'ordre zéro est constante. Pour le voir, il suffit d'établir la limite de la seconde équation dans le schéma (4.73) sur la maille K_{i+1} (si l'interface concernée est en $x_{i+\frac{1}{2}}$). Un débit nul à l'ordre un pour une hauteur d'eau constante à l'ordre zéro est ici encore en accord avec l'équilibre local (4.53). Maintenant, le développement de Chapman-Enskog de q_i^n s'écrit :

$$q_i^n = \begin{cases} \varepsilon \left(q_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) & \text{si } h_i^{0,n} \neq h_{i-1}^{0,n} \text{ et } h_i^{0,n} \neq h_{i+1}^{0,n}, \\ \varepsilon^2 \left(q_i^{2,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.86)$$

Le développement asymptotique de α^ε donné par (4.84) ainsi que (4.86) fournissent :

$$\frac{1}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon (q_R - q_L) = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.87)$$

La quantité ci-dessus intervient dans la première équation du schéma (4.73). Celle-ci se réécrit donc :

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \Delta t \mathcal{O}(\varepsilon) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right). \quad (4.88)$$

Il s'agit maintenant de déterminer la limite de la quantité

$$\frac{1}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right).$$

Pour ce faire, le paramètre suivant est introduit :

$$\gamma = \frac{1}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon \lambda (h_R - h_L).$$

Alors, par le développement (4.84) de α^ε , le développement de ce paramètre s'écrit :

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x} \alpha^1 \lambda (h_R^0 - h_L^0) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 \neq h_R^0, \\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\Delta x} \alpha^{1/2} \lambda (h_R^1 - h_L^1) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 \neq h_R^1, \\ \frac{\varepsilon}{2\Delta x} \alpha^0 \lambda (h_R^2 - h_L^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{si } h_L^0 = h_R^0 \text{ et } h_L^1 = h_R^1. \end{cases} \quad (4.89)$$

Il est donc clair que $\gamma = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ dès que $h_L^0 = h_R^0$. La première équation du schéma (4.73), réécrite en (4.88), devient alors :

$$h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} + \Delta t \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}) \mathbf{1}_{h_i^{0,n} \neq h_{i+1}^{0,n}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^1 \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}) \mathbf{1}_{h_i^{0,n} \neq h_{i-1}^{0,n}} \right).$$

En utilisant l'expression de α^1 donnée par (4.85), la limite de la relation ci-dessus quand ε tend vers zéro est la suivante :

$$h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\sqrt{\frac{g \left((h_{i+1}^{0,n})^\eta + (h_i^{0,n})^\eta \right) (h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n})}{k |h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}| \Delta x}} (h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}) - \sqrt{\frac{g \left((h_i^{0,n})^\eta + (h_{i-1}^{0,n})^\eta \right) (h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n})}{k |h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}| \Delta x}} (h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}) \right).$$

La preuve se conclut en utilisant la fonction f donnée par (4.77) dans l'équation ci-dessus. Le résultat attendu (4.76) est alors établi. $\square$

Pour finir ce chapitre, l'implication du schéma (4.73) est proposée. Celle-ci trouve son utilité numériquement. En effet, une condition très restrictive sur le pas de temps est nécessaire pour que le schéma limite pour les équations de Saint-Venant (4.76) soit stable. Expérimentalement, cette restriction est de l'ordre de Δx^5 , ce qui n'est pas exploitable. L'implication suivante du schéma limite est donc proposée :

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} \left(f(h_i^{n+1}, h_{i+1}^{n+1}) - f(h_{i-1}^{n+1}, h_i^{n+1}) \right), \quad (4.90)$$

où la fonction f est définie par (4.77). L'ennui maintenant est que ce schéma ne correspond pas à la limite du schéma préservant l'asymptotique (4.73). La première idée pour y remédier peut être de recalculer le coefficient $\bar{k}$ dans le schéma (4.73) pour que (4.90) soit sa limite. Cependant, cette méthode donne des termes mixtes en temps, avec des discrétisations au temps t^n et des discrétisations au temps t^{n+1} . La semi-implication suivante du

schéma (4.73) est alors proposée :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad - \frac{k \Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^{n+1} |q_i^{n+1}| (h_i^{n+1})^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (4.91)$$

où $(u_i^n)_i$ et α sont encore définis par :

$$u_i^n = \frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g(h_i^n)^2}{2}, \quad (4.92)$$

$$\text{et } \alpha = \frac{2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon + (k + \bar{k}) \Delta x}. \quad (4.93)$$

Les pentes $(\lambda_{i+\frac{1}{2}})_i$ sont toujours définies au temps t^n par (4.54). Le résultat de préservation d'asymptotique suivant peut alors être établi.

Théorème 4.5.3. (*limite correcte*) Si $\bar{k}$ est fixé comme suit :

$$\bar{k} = 2\lambda^2 \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{\frac{|h_R - h_L|}{(h_R^\eta + h_L^\eta) \Delta x (h_R + h_L)}} - k, \quad (4.94)$$

où cette fois h_L et h_R désignent les discrétisations de h au temps t^{n+1} de part et d'autre de l'interface, alors, quand ε tend vers zéro, les discrétisations définies par (4.91) coïncident avec les discrétisations issues du schéma (4.90).

Remarque 14. Le paramètre α dépend maintenant, et uniquement, des discrétisations au temps t^{n+1} .

Remarque 15. Le Théorème 4.5.3 est la version implicite du Théorème 4.5.2 et se démontre de façon totalement analogue.

Remarque 16. Le schéma donné par (4.91) avec $\bar{k}$ défini de façon implicite par (4.94) est encore soumis à une restriction dépendante de ε sur le pas de temps Δt . En effet, pour déterminer $(h_i^{n+1})_i$ et $(q_i^{n+1})_i$, un système non linéaire doit être résolu et celui-ci devient singulier quand ε tend vers zéro. La méthode numérique pour implémenter ce schéma est présentée plus en détails dans le Chapitre 6.

Schémas préservant le régime asymptotique et tous les états stationnaires

Ce chapitre est dédié à l'étude d'une seconde classe de schémas, initialement construits dans le but de préserver tous les états stationnaires. La méthode a été développée pour les équations de Saint-Venant et l'extension au p -système et au modèle M1 est proposée ici. Le formalisme utilisé ici est le suivant :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (5.1)$$

Le vecteur W , contenant les inconnues du système, appartient à l'ensemble convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ appelé espace des états admissibles. La fonction $F(W) \in \mathbb{R}^N$, dont la jacobienne est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, désigne le flux et $S(W) \in \mathbb{R}^N$ désigne le terme source. Contrairement au formalisme (4.1) utilisé dans le Chapitre 4, il n'est pas nécessaire ici que ce dernier soit écrit en extrayant le paramètre σ (ou k). En effet, les schémas présentés dans ce chapitre ne sont pas basés sur l'ajout d'un paramètre supplémentaire à fixer correctement mais sur un choix approprié des états intermédiaires et de la discrétisation du terme source. De cette façon, tous les états stationnaires associés au système (5.1) sont préservés.

Définition 5.0.1. *Un état stationnaire du problème (5.1) est une solution du système stationnaire suivant :*

$$\partial_x F(W) = S(W), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

La préservation de ce type de solutions est cruciale puisqu'un schéma ne vérifiant pas cette propriété peut développer des perturbations dans les approximations qui peuvent potentiellement devenir importantes et remettre en cause la validité des approximations obtenues. C'est donc un enjeu essentiel, en particulier dans le cadre de l'hydrodynamique avec le système d'équations de Saint-Venant. En effet, c'est pour ce modèle qu'ont été ini-

tialement développé les schémas préservant les états stationnaires, appelés schémas *well-balanced* ou schémas équilibres. Le but premier était de capter l'état d'équilibre nommé lac au repos, c'est-à-dire celui où la vitesse de l'eau est nulle. Les travaux pionniers dans ce domaine ont été, entre autres, proposés dans [5, 48, 61]. De nombreuses techniques de construction de schémas capables de préserver tous les états stationnaires (et plus seulement le lac au repos) ont ensuite été données [43, 78], notamment grâce à des méthodes de reconstruction hydrostatique [3, 11, 77].

La notion de schémas *well-balanced* a plus récemment été étendue à d'autres modèles et en particulier à la dynamique des gaz avec les équations d'Euler munies d'un terme source de gravité [58, 59].

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section 5.1, le schéma générique pour (5.1) est présenté. Il est issu d'un solveur de Riemann approché à deux états intermédiaires. Ceux-ci sont en partie déterminés grâce à la propriété indispensable de consistance intégrale. Cependant, ils ne peuvent être complètement déterminés dans le cas général. En effet, une discrétisation du terme source doit être effectuée et des versions discrètes de la stationnarité (5.2) sont utilisées. Ces étapes sont spécifiques au modèle étudié et sont traitées dans les Sections 5.2 et 5.3.

L'objet de la Section 5.2 est de présenter le schéma issu de [70] pour les équations de Saint-Venant. La discrétisation du terme source ainsi que les deux équations supplémentaires pour déterminer les états intermédiaires sont proposées.

Ensuite, dans la Section 5.3, le schéma pour le p -système et le modèle M1 sont proposés. Pour chacun de ces deux problèmes, la discrétisation du terme source ainsi que les deux équations additionnelles pour calculer les états intermédiaires sont obtenues en utilisant une méthode complètement analogue à celle employée pour les équations de Saint-Venant. Cependant, la forme moins complexe du terme source pour ces deux systèmes simplifie grandement l'obtention des états intermédiaires.

Enfin, dans la section 5.4, trois résultats sont proposés puis démontrés. Ils traitent du caractère asymptotique de chacun des schémas développés dans les Sections 5.2 et 5.3. Les preuves sont toutes les trois analogues et reposent, comme c'est également le cas dans le Chapitre 4, sur des développements de Chapman-Enskog des discrétisations. Ces résultats sont d'une importance remarquable puisqu'ils démontrent qu'une discrétisation bien choisie du terme source pour capter les états stationnaires permet également de capter la limite diffusive. En revanche, à l'inverse des schémas présentés dans le Chapitre 4, la discrétisation limite n'est pas connue exactement car certains termes de viscosité numérique ne peuvent pas être exhibés explicitement.

5.1 Méthode générique

La méthode de construction a été développée pour les équations de Saint-Venant dans [70]. C'est une discrétisation type volumes finis qui repose sur l'utilisation d'un solveur de Riemann approché à deux états intermédiaires ainsi qu'une discrétisation adaptée du terme source. Le maillage spatial considéré est uniforme et composé des cellules $(K_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}))_{i \in \mathbb{Z}}$ de taille constante Δx et de centre x_i . Concernant la discrétisation temporelle, l'incrément de temps est noté Δt et $t^{n+1} = n\Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La discrétisation est basée sur l'utilisation d'un solveur de Riemann à deux états intermédiaires séparés par les ondes $\lambda_L < 0$, l'onde stationnaire de vitesse nulle et $\lambda_R > 0$. Afin d'alléger les calculs, les pentes sont supposées symétriques :

$$\lambda_R = -\lambda_L = \lambda > 0,$$

et sont déterminées à partir des valeurs propres de la jacobienne du flux F intervenant dans le problème (5.1). Comme rappelé dans l'introduction de la Partie II, un solveur de Riemann approché $\widetilde{W}(\frac{x}{t}, W_L, W_R)$ approche les solutions de (5.1) en x au temps t pour la condition initiale :

$$W^0(x) = \begin{cases} W_L & \text{si } x \leq 0, \\ W_R & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas ici de deux états intermédiaires, il s'écrit comme suit, $\forall t \in (0, \Delta t]$, $x \in [-\Delta x/2, \Delta x/2]$:

$$\widetilde{W}\left(\frac{x}{t}, W_L, W_R\right) = \begin{cases} W_L & \text{si } \frac{x}{t} < -\lambda, \\ W_L^* & \text{si } -\lambda \leq \frac{x}{t} < 0, \\ W_R^* & \text{si } 0 \leq \frac{x}{t} < \lambda, \\ W_R & \text{si } \lambda \leq \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (5.3)$$

et sa structure est représentée sur la Figure 5.1.

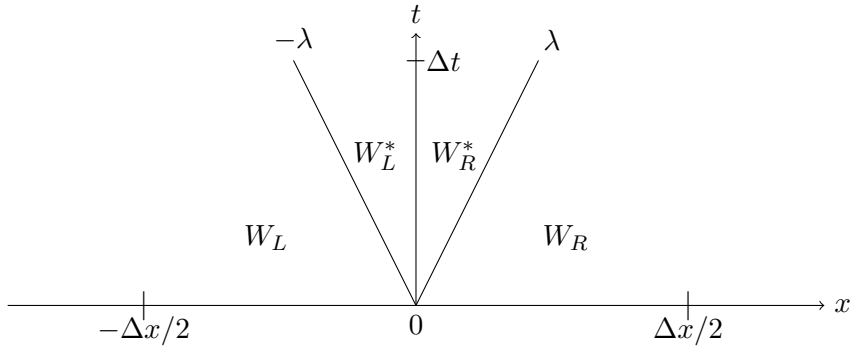


FIGURE 5.1: Solveur à deux états intermédiaires.

Le solveur $\widetilde{W}$ défini par (5.3) peut être introduit à chaque interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, $i \in \mathbb{Z}$, par une simple translation en temps et en espace. Pour s'assurer que les ondes n'interagissent pas entre elles, il suffit que les pas de discrétisation Δt et Δx vérifient la condition CFL hyperbolique suivante :

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}, \quad (5.4)$$

avec $\lambda_{i+\frac{1}{2}}$ l'onde positive associée à l'interface située en $x_{i+\frac{1}{2}}$. La fonction de juxtaposition

suivante est définie à partir du solveur de Riemann approché (5.3) :

$$W(t^n + t, x) = \widetilde{W} \left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{t}, W_i^n, W_{i+1}^n \right) \quad \forall t \in (0, \Delta t], \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (5.5)$$

La fonction ci-dessus, illustrée dans la maille K_i sur la Figure 5.2, est utilisée pour mettre à jour l'état W_i^{n+1} en appliquant l'intégration suivante :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(t + \Delta t, x) dx. \quad (5.6)$$

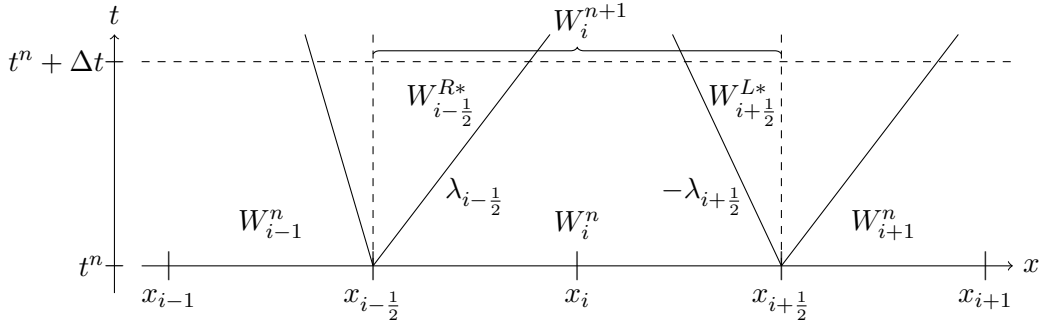


FIGURE 5.2: Schéma type-Godunov obtenu par le solveur de Riemann approché.

En utilisant la forme du solveur de Riemann (5.3), la discrétisation décrite par (5.6) s'obtient par intégration de trois états constants. Elle se réécrit donc :

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(W_{i+\frac{1}{2}}^{L*} - W_i^n \right) + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(W_{i-\frac{1}{2}}^{R*} - W_i^n \right) \right). \quad (5.7)$$

Pour établir entièrement le schéma donné par (5.7), il est nécessaire de définir les états intermédiaires $W_{i+\frac{1}{2}}^{L*}$ et $W_{i-\frac{1}{2}}^{R*}$. Pour ce faire, la propriété de consistance intégrale est utilisée. Cependant, ici, le système (5.1) n'est pas homogène et l'expression de consistance intégrale (9) ne peut pas être utilisée directement. Il faut refaire les calculs en partant du principe que l'intégrale du solveur de Riemann approché sur la maille $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ est égale à celle du solveur de Riemann exact, noté $W_{\mathcal{R}}$. L'égalité suivante doit donc être satisfaite :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R \right) dx. \quad (5.8)$$

Or l'intégration de l'équation (5.1) sur $[0, \Delta t] \times [-\Delta x/2, \Delta x/2]$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \partial_t W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R \right) dx &= \frac{1}{2} (W_L + W_R) \\ &- \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \left(F \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{-\Delta x}{2t}, W_L, W_R \right) \right) - F \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{\Delta x}{2t}, W_L, W_R \right) \right) \right) dt \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} S \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \end{aligned}$$

Sous la condition CFL (5.4), les ondes sont incluses dans le pavé $[0, \Delta t] \times [-\Delta x/2, \Delta x/2]$ et donc :

$$W_{\mathcal{R}} \left(\frac{-\Delta x}{2t}; W_L, W_R \right) = W_L \quad \text{et} \quad W_{\mathcal{R}} \left(\frac{\Delta x}{2t}; W_L, W_R \right) = W_R \quad \forall t \in (0, \Delta t).$$

La propriété de consistance intégrale (5.8) se réécrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R \right) dx &= \frac{1}{2} (W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_R) - F(W_L)) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} S \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

De plus, par la définition du solveur approché (5.3), son intégrale sur $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ est la suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W} \left(\frac{x}{\Delta t}, W_L, W_R \right) dx = \frac{1}{2} (W_L + W_R) + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (-W_L + W_L^* + W_R^* - W_R). \quad (5.10)$$

Ainsi, en utilisant les expressions (5.9) et (5.10), la consistance intégrale (5.8) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} W_L^* + W_R^* &= W_L + W_R - \frac{1}{\lambda} (F(W_R) - F(W_L)) \\ &+ \frac{1}{\lambda \Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} S \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En utilisant l'état intermédiaire issu du solveur HLL classique, défini par (13) et noté ici $W_{\mathcal{HLL}}$ par souci de clarté dans les notations, l'expression (5.11) se réécrit :

$$W_L^* + W_R^* = 2W_{\mathcal{HLL}} + \frac{1}{\lambda \Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} S \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \quad (5.12)$$

Afin de pouvoir exploiter (5.12), une discrétisation du terme source, notée $\bar{S}$, doit être calculée :

$$\bar{S} \simeq \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} S \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt.$$

Pour ce faire, des versions discrètes de la stationnarité (5.2) sont utilisées. La relation de

consistance intégrale s'écrit alors :

$$W_L^* + W_R^* = 2W_{\mathcal{HLL}} + \frac{\Delta x}{\lambda} \bar{S}. \quad (5.13)$$

Étant donné que les trois systèmes étudiés dans ce manuscrit sont composés de deux inconnues, la relation (5.13) impose deux équations que doivent vérifier les états intermédiaires W_L^* et W_R^* . Or ces deux vecteurs sont chacun constitué de deux composantes, donc il est nécessaire de déterminer deux autres équations afin d'exprimer pleinement W_L^* et W_R^* . Celles-ci sont obtenues de sorte que le schéma préserve les états stationnaires. Une condition suffisante est la suivante.

Principe (WB). *Les états intermédiaires vérifient $W_L^* = W_L$ et $W_R^* = W_R$ dès que W_L et W_R définissent un état stationnaire.*

Dans le principe (WB), un couple (W_L, W_R) est appelé état stationnaire s'il satisfait la version discrète suivante du problème stationnaire donné par (5.2) :

$$F(W_R) - F(W_L) = \bar{S} \Delta x. \quad (5.14)$$

De par la forme du schéma (5.7), si les états intermédiaires vérifient le principe (WB) et si (W_i^n, W_{i+1}^n) et (W_{i-1}^n, W_i^n) sont stationnaires au sens de (5.14), alors $W_i^{n+1} = W_i^n$ et le schéma préserve alors bien les états stationnaires.

À partir de (5.14), l'idée est de poser l'équation suivante sur les états intermédiaires :

$$F(W_R^*) - F(W_L^*) = \bar{S} \Delta x, \quad (5.15)$$

ou bien une équation linéarisée de l'expression ci-dessus. Ces étapes sont spécifiques au modèle étudié et sont traitées dans les Sections 5.2 et 5.3.

5.2 Description de la méthode pour les équations de Saint-Venant

Comme présenté dans le Chapitre 2, les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = -kq|q|h^{-\eta}, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (5.1) avec :

$$W = {}^t(h, q), \quad F(W) = {}^t\left(q, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad S(W) = {}^t(0, -kq|q|h^{-\eta}). \quad (5.17)$$

La variable $h > 0$ désigne la hauteur d'eau et q son débit. Dans ce modèle, la friction se note k et ne dépend pas de l'espace. Le paramètre η est strictement positif et différent de 1, usuellement fixé à 7/3. Pour ce modèle, l'onde positive λ , intervenant dans le schéma

(5.7), est définie à partir des valeurs propres de la jacobienne de F donné en (5.17), comme suit :

$$\lambda = \max \left(\frac{|q_L|}{h_L} + \sqrt{gh_L}, \frac{|q_R|}{h_R} + \sqrt{gh_R} \right). \quad (5.18)$$

Concernant les états stationnaires de (5.16), ils sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_x q = 0, \\ \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = -kq|q|h^{-\eta}, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.19)$$

De la première équation de (5.19), le débit d'eau est uniforme et est noté q_0 . La deuxième équation de (5.19) contrôle la hauteur d'eau des états stationnaires et s'écrit :

$$\partial_x \left(\frac{q_0^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = -kq_0|q_0|h^{-\eta}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.20)$$

Il est important de noter pour la suite que, dans le cas d'un état stationnaire assez régulier, l'équation (5.20) peut se réécrire de la façon suivante :

$$-\frac{q_0^2}{\eta-1} \partial_x h^{\eta-1} + \frac{g}{\eta+2} \partial_x h^{\eta+2} = -kq_0|q_0|, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.21)$$

Afin de pleinement déterminer le schéma (5.7) exposé dans la section précédente, il est nécessaire d'avoir une expression complète des états intermédiaires $W_L^* = {}^t(h_L^*, q_L^*)$ et $W_R^* = {}^t(h_R^*, q_R^*)$. Ils sont calculés à l'interface générique située en zéro, dans la maille $(-\Delta x/2, \Delta x/2)$, dont l'état initial en $t = 0$ est donné par $W_L = {}^t(h_L, q_L)$ à gauche de zéro et $W_R = {}^t(h_R, q_R)$ à droite. En utilisant (5.17), les équations données pour avoir la consistance intégrale (5.13) s'écrivent :

$$\begin{aligned} h_L^* + h_R^* &= 2h_{\mathcal{HLL}}, \\ q_L^* + q_R^* &= 2q_{\mathcal{HLL}} - \frac{k\Delta x}{\lambda} \bar{q} |\bar{q}| \bar{h}^{-\eta}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

où les états intermédiaires HLL valent :

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (h_L + h_R) - \frac{1}{2\lambda} (q_R - q_L), \\ q_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (q_L + q_R) - \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{q_R^2}{h_R} + \frac{gh_R^2}{2} - \frac{q_L^2}{h_L} - \frac{gh_L^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

et où la quantité $-k\bar{q}|\bar{q}|\bar{h}^{-\eta}$ discrétise le terme source :

$$-k\bar{q}|\bar{q}|\bar{h}^{-\eta} \simeq \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-kq|q|h^{-\eta}) \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \quad (5.24)$$

Les expressions des inconnues $\bar{q}$ et $\bar{h}^{-\eta}$ doivent alors être déterminées de sorte qu'elles soient consistantes respectivement avec $h^{-\eta}$ et q . Concernant $\bar{h}^{-\eta}$, une version discrète de

l'équation différentielle (5.20), satisfaite par les états stationnaires, est utilisée pour écrire la définition suivante :

$$\overline{h^{-\eta}} = -\frac{\mu_0}{k\Delta x} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{q_0^2} \frac{[h^2]}{2} \right), \quad (5.25)$$

où les crochets désignent la notation de saut générique $[X] = X_R - X_L$. La quantité μ_0 désigne le signe de q_0 , le débit à l'équilibre, dont le carré est déterminé en utilisant une version discrète de l'expression (5.21) satisfaite par les états stationnaires réguliers :

$$-q_0^2 \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta-1} + g \frac{[h^{\eta+2}]}{\eta+2} = -k\mu_0 q_0^2 \Delta x.$$

L'égalité ci-dessus permet alors d'écrire :

$$q_0^2 = g \frac{[h^{\eta+2}]}{\eta+2} \left(-k\mu_0 \Delta x + \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta-1} \right)^{-1}. \quad (5.26)$$

L'injection de l'expression de q_0^2 ci-dessus dans la relation (5.25) sur $\overline{h^{-\eta}}$ donne :

$$\overline{h^{-\eta}} = \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} - \frac{\mu_0}{k\Delta x} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta-1} \right).$$

Cependant, puisque q_0 n'est pas déterminé, μ_0 n'est toujours pas connu. Il suffit de prendre $\mu_0 = \bar{\mu} := \text{sign}(\bar{q})$ en imposant par la suite sur $\bar{q}$ que $\bar{q} = q_0 = q_L = q_R$ en état stationnaire. L'expression de $\overline{h^{-\eta}}$ ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\overline{h^{-\eta}} = \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} - \frac{\bar{\mu}}{k\Delta x} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta-1} \right). \quad (5.27)$$

Proposition 5.2.1. *La quantité $\overline{h^{-\eta}}$ donnée par (5.27) est consistante avec $h^{-\eta}$.*

Démonstration. La preuve, proposée dans [70], s'effectue en posant $h_L = h(x)$ et $h_R = h(x + \Delta x)$ puis, à l'aide de développements de Taylor, en montrant que

$$\frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} = h^{-\eta} + \mathcal{O}(\Delta x),$$

et

$$-\frac{\bar{\mu}}{k\Delta x} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta+2}{[h^{\eta+2}]} \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta-1} \right) = \mathcal{O}(\Delta x).$$

□

Remarque 17. Le paramètre q_0 intervenant dans (5.25) et dont le carré est défini par (5.26) a été fixé en utilisant une version discrète de l'équation (5.21) satisfaite par les états stationnaires réguliers. Cependant, afin de prendre en compte les conditions initiales

non régulières, le cut-off suivant peut-être effectué :

$$\overline{h^{-\eta}} = \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta + 2}{[h^{\eta+2}]} - \frac{\bar{\mu}}{k\Delta x} [h]_c \left(-\frac{1}{h_L h_R} + \frac{h_L + h_R}{2} \frac{\eta + 2}{[h^{\eta+2}]} \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta - 1} \right),$$

où

$$[h]_c = \begin{cases} [h] & \text{si } |h_R - h_L| \leq C\Delta x, \\ C\Delta x & \text{sinon.} \end{cases}$$

La constante C est positive et une étude de son impact dans les résultats numériques est proposée dans [70].

La définition de $\bar{q}$ proposée dans [70] est la suivante :

$$\bar{q} = \begin{cases} \frac{2|q_L||q_R|}{|q_L| + |q_R|} \text{sign}(q_L + q_R) & \text{si } q_L \neq 0 \text{ et } q_R \neq 0, \\ 0 & \text{si } q_L = 0 \text{ ou } q_R = 0, \end{cases} \quad (5.28)$$

cependant, pour démontrer la préservation de la limite diffusive dans la Section 5.4, il est nécessaire que l'implication suivante soit vérifiée :

$$\bar{q} = 0 \Rightarrow q_L = q_R = 0. \quad (5.29)$$

C'est pourquoi $\bar{q}$ est défini ici de la manière suivante :

$$\bar{q} = \text{sign}(q_L + q_R) \sqrt{\frac{1}{2} (q_L^2 + q_R^2)}, \quad (5.30)$$

et $\bar{q}$ est clairement consistant avec q .

La dernière étape dans la construction du schéma est d'établir deux autres équations, qui viendront s'ajouter à (5.22) pour déterminer complètement les états intermédiaires W_L^* et W_R^* . D'après (5.15), pour assurer la préservation des états stationnaires, il suffit que :

$$\begin{cases} q_R^* - q_L^* = 0, \\ \frac{(q_R^*)^2}{h_R^*} + \frac{g(h_R^*)^2}{2} - \frac{(q_L^*)^2}{h_L^*} - \frac{g(h_L^*)^2}{2} = -k\bar{q}|\bar{q}|\overline{h^{-\eta}}\Delta x. \end{cases} \quad (5.31)$$

En particulier, la première équation de (5.31) impose $q_L^* = q_R^*$ et ce débit intermédiaire est noté q^* . La seconde équation de (5.22) donne alors :

$$q^* = q_{\mathcal{HLL}} - \frac{k\bar{q}|\bar{q}|\overline{h^{-\eta}}\Delta x}{2\lambda}. \quad (5.32)$$

Concernant h_L^* et h_R^* , une linéarisation de la deuxième équation de (5.31) est utilisée :

$$\left(-\frac{\bar{q}^2}{h_R h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L) \right) (h_R^* - h_L^*) = -k\bar{q}|\bar{q}|\overline{h^{-\eta}}\Delta x. \quad (5.33)$$

En posant

$$\alpha = -\frac{\bar{q}^2}{h_R h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L), \quad (5.34)$$

les hauteurs d'eau des états intermédiaires vérifient :

$$h_R^* - h_L^* = -\frac{k\bar{q}|\bar{q}|\bar{h}^{-\eta}\Delta x}{\alpha}. \quad (5.35)$$

Enfin, en combinant (5.22) et (5.35), les expressions suivantes des hauteurs d'eau intermédiaires sont obtenues :

$$\begin{aligned} h_L^* &= h_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} + \frac{k\bar{q}|\bar{q}|\bar{h}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha}, \\ h_R^* &= h_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{k\bar{q}|\bar{q}|\bar{h}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Remarque 18. A priori, il n'y a pas de raison que la quantité α ne soit jamais nulle. Dans ce cas, les définitions de h_L^* et h_R^* données par (5.36) sont mal posées. Un cut-off dans la définition (5.34) de α de la forme :

$$\alpha = \begin{cases} -\frac{\bar{q}^2}{h_R h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L) & \text{si } \left| -\frac{\bar{q}^2}{h_R h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L) \right| \geq C, \\ \text{sign} \left(-\frac{\bar{q}^2}{h_R h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L) \right) C & \text{sinon,} \end{cases}$$

peut être proposé, où C est une constante positive donnée. Dans les cas tests numériques utilisés dans ces travaux et dans ceux de [70], le cas α nul n'arrive pas et le cut-off ci-dessus n'est pas nécessaire.

En injectant les expressions (5.32) et (5.36) dans le schéma (5.7), celui-ci se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} + \frac{k\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}|\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}|\bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha_{i+\frac{1}{2}}} - h_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{k\bar{q}_{i-\frac{1}{2}}|\bar{q}_{i-\frac{1}{2}}|\bar{h}_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha_{i-\frac{1}{2}}} - h_i^n \right) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(q_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{k\Delta x}{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}} \bar{q}_{i+\frac{1}{2}}|\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}|\bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta} - q_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(q_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{k\Delta x}{2\lambda_{i-\frac{1}{2}}} \bar{q}_{i-\frac{1}{2}}|\bar{q}_{i-\frac{1}{2}}|\bar{h}_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta} - q_i^n \right) \right), \end{cases}$$

c'est-à-dire, en utilisant les définitions de $h_{\mathcal{HLL}}$ et $q_{\mathcal{HLL}}$ données par (5.23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{k\Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{-1} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{-1} \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g(h_{i+1}^n)^2}{2} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} - \frac{g(h_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}} + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}} \right). \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Le schéma (5.37) possède la propriété de consistance avec le problème initial (5.16). Elle est démontrée dans [70].

Concernant la robustesse du schéma, une modification des états intermédiaires est inévitable pour assurer la positivité de la hauteur d'eau. Les variables h_L^* et h_R^* sont corrigées comme suit :

$$\begin{aligned} h_L^* &= \min \left(\max \left(h_{\mathcal{HLL}} + \frac{k\overline{q}|\overline{q}|\overline{h}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha}, \varepsilon \right), 2h_{\mathcal{HLL}} - \varepsilon \right), \\ h_R^* &= \min \left(\max \left(h_{\mathcal{HLL}} - \frac{k\overline{q}|\overline{q}|\overline{h}^{-\eta}\Delta x}{2\alpha}, \varepsilon \right), 2h_{\mathcal{HLL}} - \varepsilon \right), \end{aligned}$$

où ε est pris égal à $\min(h_L, h_R, h_{\mathcal{HLL}})$. Cependant, dans les travaux présentés ici, les hauteurs d'eau sont supposées suffisamment grandes pour que ce cut-off ne soit pas nécessaire et la démonstration de la préservation de l'asymptotique, présentée dans la Section 5.4, est effectuée en utilisant les définitions données par (5.36) pour les hauteurs d'eau intermédiaires.

Le schéma ainsi développé est bien *well-balanced*. Pour le montrer, il suffit de vérifier que $W_L^* = W_L$ et $W_R^* = W_R$ si W_L et W_R définissent un état stationnaire au sens de (5.14). En effet, si tel est le cas, alors :

$$q_L = q_R \quad \text{et} \quad q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] = -k\overline{q}|\overline{q}|\overline{h}^{-\eta}\Delta x. \quad (5.38)$$

Ainsi, les débits q_L et q_R sont égaux et notés q . Le débit intermédiaire q^* donné par (5.32) s'écrit alors :

$$q^* = q_{\mathcal{HLL}} + \frac{1}{2\lambda} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right),$$

et en utilisant la définition de $q_{\mathcal{HLL}}$ donnée par (5.23) :

$$q^* = \frac{q_L + q_R}{2} - \frac{1}{2\lambda} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right) + \frac{1}{2\lambda} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right) = q.$$

Ainsi, $q_L^* = q_L$ et $q_R^* = q_R$. Maintenant, par les expressions de h_L^* et h_R^* données par (5.36) ainsi que la relation (5.38), les deux égalités suivantes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} h_L^* &= h_{\mathcal{HLL}} - \frac{1}{2\alpha} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right), \\ h_R^* &= h_{\mathcal{HLL}} + \frac{1}{2\alpha} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right), \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de $h_{\mathcal{HLL}}$ donnée par (5.23) :

$$\begin{aligned} h_L^* &= \frac{1}{2} (h_L + h_R) - \frac{1}{2\lambda} (q_R - q_L) - \frac{1}{2\alpha} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right), \\ h_R^* &= \frac{1}{2} (h_L + h_R) - \frac{1}{2\lambda} (q_R - q_L) + \frac{1}{2\alpha} \left(q^2 \left[\frac{1}{h} \right] + \frac{g}{2} [h^2] \right). \end{aligned}$$

Or $q_L = q_R$ en état stationnaire et, en utilisant l'expression de α donnée par (5.34), les expressions ci-dessus donnent $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$.

5.3 Extension au p -système et au modèle M1

Dans cette section, les états intermédiaires apparaissant dans le schéma (5.7) sont exprimés dans le cadre du p -système puis du modèle M1. Cette extension est relativement aisée puisque ces deux modèles sont plus simples que les équations de Saint-Venant dans le sens où la variable τ (pour le p -système) ou E (pour le modèle M1) n'intervient pas dans le terme source. En effet, la discrétisation du terme source ne nécessite alors la détermination que d'une seule inconnue, analogue à $\bar{q}$ dans les équations de Saint-Venant.

5.3.1 Application au p -système

Comme présenté dans le Chapitre 2, le p -système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (5.39)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (5.1) avec :

$$W = {}^t(\tau, u), \quad F(W) = {}^t(-u, p(\tau)) \quad \text{et} \quad S(W) = {}^t(0, -\sigma u). \quad (5.40)$$

La variable $\tau > 0$ désigne le volume spécifique du gaz considéré et u sa vitesse. Dans ce modèle la friction se note σ et ne dépend pas de l'espace. La fonction p désigne la pression et est supposée strictement positive et strictement décroissante. Pour ce modèle, l'onde positive λ , intervenant dans le schéma (5.7), est définie à partir des valeurs propres de la

jacobienne de F donné en (5.40) comme suit :

$$\lambda = \max \left(\sqrt{-p'(\tau_L)}, \sqrt{-p'(\tau_R)} \right). \quad (5.41)$$

Concernant les états stationnaires de (5.39), ils sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_x u = 0, \\ \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.42)$$

De la première équation de (5.42), la vitesse est uniforme et est notée u_0 . La deuxième équation de (5.42) contrôle le volume spécifique des états stationnaires et s'écrit :

$$\partial_x p(\tau) = -\sigma u_0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.43)$$

Il est important de noter que, contrairement à l'équation vérifiée par les états stationnaires pour les équations de Saint-Venant (5.20), le terme source dans (5.43) ne dépend pas de τ . Il n'est donc pas nécessaire de considérer l'équation satisfaite par les états stationnaires réguliers ici. La discrétisation du terme source pour avoir la stationnarité se trouvera également simplifiée.

Afin de pleinement déterminer le schéma (5.7) exposé dans la Section 5.1, il faut, ici encore, obtenir une expression complète des états intermédiaires $W_{i-\frac{1}{2}}^{R*} = {}^t(\tau_{i-\frac{1}{2}}^{R*}, u_{i-\frac{1}{2}}^{R*})$ et $W_{i+\frac{1}{2}}^{L*} = {}^t(\tau_{i+\frac{1}{2}}^{L*}, u_{i+\frac{1}{2}}^{L*})$. Ils sont calculés à l'interface générique en zéro, dans la maille $(-\Delta x/2, \Delta x/2)$, dont l'état initial en $t = 0$ est donné par $W_L = {}^t(\tau_L, u_L)$ à gauche de zéro et $W_R = {}^t(\tau_R, u_R)$ à droite. En utilisant (5.40), les équations données pour avoir la consistance intégrale (5.13) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tau_L^* + \tau_R^* &= 2\tau_{\mathcal{HLL}}, \\ u_L^* + u_R^* &= 2u_{\mathcal{HLL}} - \frac{\sigma \Delta x}{\lambda} \bar{u}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

où les états intermédiaires HLL valent :

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (\tau_L + \tau_R) + \frac{1}{2\lambda} (u_R - u_L), \\ u_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (u_L + u_R) - \frac{1}{2\lambda} (p(\tau_R) - p(\tau_L)), \end{aligned} \quad (5.45)$$

et où la quantité $-\sigma \bar{u}$ discrétise le terme source à l'interface entre deux états $W_L = {}^t(\tau_L, u_L)$ et $W_R = {}^t(\tau_R, u_R)$:

$$-\sigma \bar{u} \simeq \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-\sigma u) \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \quad (5.46)$$

Une expression de l'inconnue $\bar{u}$, consistante avec u , doit alors être déterminée. Pour ce faire, une version discrète de l'équation différentielle (5.43), satisfaite par les états stationnaires, est utilisée. Celle-ci impose que $\bar{u} = u_L$ dès que $u_L = u_R$. Il suffit de choisir $\bar{u}$

comme une moyenne des états u_L et u_R . La définition suivante est proposée :

$$\bar{u} = \text{sign}(u_L + u_R) \sqrt{\frac{1}{2} (u_L^2 + u_R^2)}. \quad (5.47)$$

Ensuite, il s'agit d'établir deux autres équations qui viendront s'ajouter à (5.44) pour déterminer complètement les états intermédiaires W_L^* et W_R^* . D'après (5.15), pour assurer la préservation des états stationnaires, il suffit que :

$$\begin{cases} u_R^* - u_L^* = 0, \\ p(\tau_R^*) - p(\tau_L^*) = -\sigma \bar{u} \Delta x. \end{cases} \quad (5.48)$$

En particulier, la première équation de (5.48) impose $u_L^* = u_R^*$ et cette vitesse intermédiaire est notée u^* . La seconde équation de (5.44) donne alors :

$$u^* = u_{\mathcal{HLL}} - \frac{\sigma \Delta x}{2\lambda} \bar{u}. \quad (5.49)$$

Concernant τ_L^* et τ_R^* , une linéarisation de la deuxième équation de (5.48) est utilisée :

$$(\tau_R^* - \tau_L^*) \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{\tau_R - \tau_L} = -\sigma \bar{u} \Delta x,$$

et les volumes spécifiques des états intermédiaires vérifient alors :

$$\tau_R^* - \tau_L^* = -\frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)} \sigma \bar{u} \Delta x. \quad (5.50)$$

Le terme de droite dans l'expression ci-dessus est bien défini puisque la fonction de pression p est supposée strictement décroissante. Dans le cas où $\tau_L = \tau_R$ alors le terme $\frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)}$ sera pris égal à $\frac{1}{p'(\tau_L)}$. Enfin, en combinant (5.44) et (5.50), les expressions suivantes des volumes spécifiques intermédiaires sont obtenues :

$$\begin{aligned} \tau_L^* &= \tau_{\mathcal{HLL}} + \frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)} \frac{\sigma \bar{u} \Delta x}{2}, \\ \tau_R^* &= \tau_{\mathcal{HLL}} - \frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)} \frac{\sigma \bar{u} \Delta x}{2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

En injectant les expressions (5.49) et (5.51) dans le schéma (5.7), celui-ci se réécrit

comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{HLL}} + \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)} \frac{\sigma \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \Delta x}{2} - \tau_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{HLL}} - \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)} \frac{\sigma \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \Delta x}{2} - \tau_i^n \right) \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{HLL}} - \frac{\sigma \Delta x}{2 \lambda_{i+\frac{1}{2}}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - u_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(u_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{HLL}} - \frac{\sigma \Delta x}{2 \lambda_{i-\frac{1}{2}}} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} - u_i^n \right) \right), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, en utilisant les définitions de $\tau_{\mathcal{HLL}}$ et $u_{\mathcal{HLL}}$ données par (5.45) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)} \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_{i-1}^n)) \\ \quad - \frac{\sigma \Delta t}{2} (\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}). \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Le schéma (5.52) possède la propriété de consistance avec le problème initial (5.39). Elle se démontre en remarquant que, pour la première équation (5.52), le premier et le dernier terme du membre de droite coïncident avec de la viscosité numérique et que le deuxième est une discrétisation du flux. Pour la deuxième équation de (5.52), le premier terme du membre de droite coïncide avec de la viscosité numérique, le second avec une discrétisation du flux et le dernier avec une discrétisation du terme source puisque $\bar{u}$ est consistant avec u .

Le caractère *well-balanced* du schéma (5.52) se montre aisément en prouvant que $W_L^* = W_L$ et $W_R^* = W_R$ dès que W_L et W_R définissent un état stationnaire au sens de (5.14). En effet, si tel est le cas alors :

$$u_L = u_R \quad \text{et} \quad p(\tau_R) - p(\tau_L) = -\sigma \bar{u} \Delta x. \quad (5.53)$$

Ainsi, les vitesses u_L et u_R sont égales et notées u . La vitesse intermédiaire u^* donnée par (5.49) s'écrit alors :

$$u^* = u_{\mathcal{HLL}} + \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{2\lambda},$$

et en utilisant la définition de $u_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}}$ donnée par (5.45) :

$$u^* = \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{2\lambda} + \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{2\lambda} = u.$$

Ainsi, $u_L^* = u_L$ et $u_R^* = u_R$. Maintenant, par les expressions de h_L^* et h_R^* données par (5.51), ainsi que la relation (5.53), les deux égalités suivantes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\tau_L^* &= \tau_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)} \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{2}, \\ \tau_R^* &= \tau_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} + \frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)} \frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{2},\end{aligned}$$

et, en utilisant la définition de $\tau_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}}$ donnée par (5.45) :

$$\begin{aligned}\tau_L^* &= \frac{\tau_L + \tau_R}{2} - \frac{u_R - u_L}{2\lambda} - \frac{\tau_R - \tau_L}{2}, \\ \tau_R^* &= \frac{\tau_L + \tau_R}{2} - \frac{u_R - u_L}{2\lambda} + \frac{\tau_R - \tau_L}{2}.\end{aligned}$$

Or $u_L = u_R$ en état stationnaire donc les expressions ci-dessus donnent $\tau_L^* = \tau_L$ et $\tau_R^* = \tau_R$.

5.3.2 Application au modèle M1

Comme présenté dans le Chapitre 2, le modèle M1 s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -c\sigma F, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (5.54)$$

c'est-à-dire dans le formalisme (5.1) avec :

$$W = {}^t(E, F), \quad F(W) = {}^t\left(F, c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right)\right) \quad \text{et} \quad S(W) = {}^t(0, -c\sigma F). \quad (5.55)$$

La variable $E > 0$ désigne l'énergie radiative et F le flux radiatif. L'intensité du terme source se note σ et ne dépend pas de l'espace, et le paramètre c décrit la vitesse de la lumière. La fonction χ s'écrit :

$$\chi(f) = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}} \quad \forall f \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[. \quad (5.56)$$

L'onde positive λ est définie constante égale à c .

Concernant les états stationnaires de (5.54), ils sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_x F = 0, \\ \partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -c\sigma F, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.57)$$

De la première équation de (5.57), le flux radiatif est uniforme et est noté F_0 . La deuxième équation de (5.57) contrôle le volume spécifique des états stationnaires et s'écrit :

$$\partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F_0}{cE} \right) \right) = -c\sigma F_0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.58)$$

Comme c'était déjà le cas pour l'équation vérifiée par les états stationnaires pour le p -système (5.43) et contrairement à l'équation vérifiée par les états stationnaires pour les équations de Saint-Venant (5.20), le terme source dans (5.58) ne dépend pas de E . Il n'est donc pas nécessaire de considérer l'équation satisfaite par les états stationnaires réguliers et la discrétisation du terme source pour avoir la stationnarité se trouvera simplifiée.

Afin de pleinement déterminer le schéma (5.7) exposé dans la Section 5.1, il faut encore une fois écrire une expression complète des états intermédiaires $W_{i-\frac{i}{2}}^{R*} = (E_{i-\frac{i}{2}}^{R*}, F_{i-\frac{i}{2}}^{R*})$ et $W_{i+\frac{i}{2}}^{L*} = (E_{i+\frac{i}{2}}^{L*}, F_{i+\frac{i}{2}}^{L*})$. Ils sont calculés à l'interface générique en zéro, dans la maille $(-\Delta x/2, \Delta x/2)$, dont l'état initial en $t = 0$ est donné par $W_L = {}^t(E_L, F_L)$ à gauche de zéro et $W_R = {}^t(E_R, F_R)$ à droite. En utilisant (5.55), les équations données pour avoir la consistance intégrale (5.13) s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_L^* + E_R^* &= 2E_{\mathcal{HLL}}, \\ F_L^* + F_R^* &= 2F_{\mathcal{HLL}} - \frac{c\sigma\Delta x}{\lambda} \bar{F}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

où les états intermédiaires HLL valent :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (E_L + E_R) - \frac{1}{2\lambda} (F_R - F_L), \\ F_{\mathcal{HLL}} &= \frac{1}{2} (F_L + F_R) - \frac{1}{2\lambda} \left(c^2 E_R \chi \left(\frac{F_R}{cE_R} \right) - c^2 E_L \chi \left(\frac{F_L}{cE_L} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

et où la quantité $-c\sigma\bar{F}$ discrétise le terme source à l'interface entre deux états $W_L = {}^t(E_L, F_L)$ et $W_R = {}^t(E_R, F_R)$:

$$-c\sigma\bar{F} \simeq \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-c\sigma F) \left(W_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{t}, W_L, W_R \right) \right) dx dt. \quad (5.61)$$

Une expression de l'inconnue $\bar{F}$, consistante avec F , doit alors être déterminée. Pour ce faire, une version discrète de l'équation différentielle (5.58), satisfaite par les états stationnaires, est utilisée. Celle-ci impose que $\bar{F} = F_L$ dès que $F_L = F_R$. Il suffit de choisir $\bar{F}$ comme une moyenne des états F_L et F_R . La définition suivante est proposée :

$$\bar{F} = \text{sign}(F_L + F_R) \sqrt{\frac{1}{2} (F_L^2 + F_R^2)}. \quad (5.62)$$

Ensuite, il s'agit d'établir deux autres équations qui viendront s'ajouter à (5.59) pour déterminer complètement les états intermédiaires W_L^* et W_R^* . D'après (5.15), pour assurer la

préservation des états stationnaires, il suffit que :

$$\begin{cases} F_R^* - F_L^* = 0, \\ c^2 E_R^* \chi \left(\frac{F_R^*}{c E_R^*} \right) - c^2 E_L^* \chi \left(\frac{F_L^*}{c E_L^*} \right) = -c \sigma \bar{F} \Delta x. \end{cases} \quad (5.63)$$

En particulier, la première équation de (5.63) impose $F_L^* = F_R^*$ et ce flux radiatif intermédiaire est noté F^* . La seconde équation de (5.59) donne alors :

$$F^* = F_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{c\sigma\Delta x}{2\lambda} \bar{F}. \quad (5.64)$$

Concernant E_L^* et E_R^* , une linéarisation de la deuxième équation de (5.63) est utilisée :

$$E_R^* \chi \left(\frac{F_R}{c E_R} \right) - E_L^* \chi \left(\frac{F_L}{c E_L} \right) = -\frac{\sigma}{c} \bar{F} \Delta x. \quad (5.65)$$

Enfin, en combinant (5.59) et (5.65), les expressions suivantes des énergies radiatives intermédiaires sont obtenues :

$$\begin{aligned} E_L^* &= \frac{2\phi_R}{\phi_R + \phi_L} E_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} + \frac{\sigma \bar{F} \Delta x}{c(\phi_R + \phi_L)}, \\ E_R^* &= \frac{2\phi_L}{\phi_R + \phi_L} E_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{\sigma \bar{F} \Delta x}{c(\phi_R + \phi_L)}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

où les notations $\phi_L := \chi \left(\frac{F_L}{c E_L} \right)$ et $\phi_R = \chi \left(\frac{F_R}{c E_R} \right)$ ont été introduites pour alléger l'écriture.

En injectant les expressions (5.64) et (5.66) dans le schéma (5.7), celui-ci se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{2\phi_{i+1}^n}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} E_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} + \frac{\sigma \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta x}{c(\phi_{i+1}^n + \phi_i^n)} - E_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{2\phi_{i-1}^n}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} E_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{\sigma \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta x}{c(\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)} - E_i^n \right) \right), \\ F_i^{n+1} = F_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{c\sigma\Delta x}{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - F_i^n \right) \right. \\ \quad \left. + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(F_{i-\frac{1}{2}}^{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}} - \frac{c\sigma\Delta x}{2\lambda_{i-\frac{1}{2}}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - F_i^n \right) \right), \end{cases}$$

où $\phi_i^n = \chi \left(\frac{F_i^n}{c E_i^n} \right)$. En utilisant les définitions de $E_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}}$ et $F_{\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{L}}$ données par (5.60), le

schéma ci-dessus se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_i^n \phi_i^n) - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} (E_i^n \phi_i^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1}^n}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\phi_{i-1}^n}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\sigma \Delta t}{c} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ F_i^{n+1} = F_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\lambda_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n)) \\ \quad - \frac{c^2 \Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c\sigma \Delta t}{2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n). \end{array} \right. \quad (5.67)$$

Le schéma (5.67) possède la propriété de consistance avec le problème initial (5.54). Elle se démontre en remarquant que, pour la première équation de (5.67), le premier et le dernier terme du membre de droite coïncident avec de la viscosité numérique et que le deuxième est une discrétisation du flux. Pour la deuxième équation de (5.67), le premier terme du membre de droite coïncide avec de la viscosité numérique, le second avec une discrétisation du flux et le dernier avec une discrétisation du terme source puisque $\bar{F}$ est consistant avec F .

Le caractère *well-balanced* du schéma (5.67) se montre aisément en prouvant que $W_L^* = W_L$ et $W_R^* = W_R$ dès que W_L et W_R définissent un état stationnaire au sens de (5.14). En effet, si tel est le cas alors :

$$F_L = F_R \quad \text{et} \quad c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L = -c\sigma \bar{F} \Delta x. \quad (5.68)$$

Ainsi, les flux radiatifs F_L et F_R sont égaux et sont notés F . Le flux intermédiaire F^* donné par (5.64) s'écrit alors :

$$F^* = F_{\mathcal{HLL}} + \frac{c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L}{2\lambda},$$

et en utilisant la définition de $F_{\mathcal{HLL}}$ donnée par (5.60) :

$$F^* = \frac{F_L + F_R}{2} - \frac{c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L}{2\lambda} + \frac{c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L}{2\lambda} = F.$$

Ainsi, $F_L^* = F_L$ et $F_R^* = F_R$. Maintenant, les expressions de E_L^* et E_R^* données par (5.66) ainsi que la relation (5.68) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} E_L^* &= \frac{2\phi_R}{\phi_R + \phi_L} E_{\mathcal{HLL}} - \frac{c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L}{c^2 (\phi_R + \phi_L)}, \\ E_R^* &= \frac{2\phi_L}{\phi_R + \phi_L} E_{\mathcal{HLL}} + \frac{c^2 E_R \phi_R - c^2 E_L \phi_L}{c^2 (\phi_R + \phi_L)}, \end{aligned}$$

et, en utilisant la définition de $E_{\mathcal{HLL}}$ donnée par (5.60) :

$$\begin{aligned} E_L^* &= \frac{2\phi_R}{\phi_R + \phi_L} \left(\frac{E_L + E_R}{2} - \frac{F_R - F_L}{2\lambda} \right) - \frac{E_R\phi_R - E_L\phi_L}{\phi_R + \phi_L}, \\ E_R^* &= \frac{2\phi_L}{\phi_R + \phi_L} \left(\frac{E_L + E_R}{2} - \frac{F_R - F_L}{2\lambda} \right) + \frac{E_R\phi_R - E_L\phi_L}{\phi_R + \phi_L}. \end{aligned}$$

Or $F_L = F_R$ en état stationnaire donc les expressions ci-dessus donnent $E_L^* = E_L$ et $E_R^* = E_R$.

5.4 Préservation de l'asymptotique

Dans cette section, trois résultats concernant les schémas (5.37), (5.52) et (5.67) sont proposés. Ils traitent de la préservation de l'asymptotique par ces schémas, et sont remarquables car, à la base, ces schémas n'ont pas été construits pour préserver cette asymptotique. Dans la suite, ces trois résultats sont énoncés puis prouvés. Les démonstrations reposent sur des développements de Chapman-Enskog des discrétisations.

5.4.1 Les équations de Saint-Venant

Concernant les équations de Saint-Venant (5.16), le schéma donné par (5.37) après injection du changement d'échelle $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et $k \leftarrow k/\varepsilon^2$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{-1} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{-1} \right), \\ q_i^{n+1} &= q_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g(h_{i+1}^n)^2}{2} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} - \frac{g(h_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ &\quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i+\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}} + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{q_{i-\frac{1}{2}}} | \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.69)$$

où $\overline{q}$ est donné par (5.30), α est donné par (5.34) et où la définition de $\overline{h^{-\eta}}$ donnée par (5.27) s'écrit maintenant :

$$\overline{h^{-\eta}} = \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta + 2}{[h^{\eta+2}]} - \frac{\varepsilon^2 \overline{\mu}}{k\Delta x} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + \frac{[h^2]}{2} \frac{\eta + 2}{[h^{\eta+2}]} \frac{[h^{\eta-1}]}{\eta - 1} \right). \quad (5.70)$$

La limite diffusive associée aux équations de Saint-Venant (5.16), donnée dans le Chapitre 2, s'écrit :

$$\partial_t h + \partial_x \left(-\text{sign}(\partial_x h) \sqrt{\frac{h^\eta}{k} \left| \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right|} \right) = 0, \quad (5.71)$$

et que son équilibre local s'écrit comme suit :

$$q = -\text{sign}(\partial_x h) \sqrt{\frac{h^\eta}{k} \left| \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right|}. \quad (5.72)$$

Dans le théorème suivant, un résultat sur la convergence asymptotique de (5.69) est proposé.

Théorème 5.4.1. *Si les pentes $\lambda_{i+\frac{1}{2}}, i \in \mathbb{Z}$ définies par (5.18) et les quantités $\alpha_{i+\frac{1}{2}}, i \in \mathbb{Z}$ définies par (5.34) sont telles que*

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} \alpha_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{i-\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (5.73)$$

alors les deux propositions suivantes sont vérifiées.

- (i) *À la limite ε tend vers zéro, la première équation de (5.69) est consistante avec la limite diffusive du modèle (5.71).*
- (ii) *À la limite ε tend vers zéro, la deuxième équation de (5.69) est consistante avec l'équilibre local (5.72).*

Remarque 19. L'hypothèse (5.73) est purement technique. De plus, dans le régime asymptotique, les discrétisations du débit deviennent nulles. Ainsi la quantité $\lambda_{i-\frac{1}{2}} \alpha_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{i-\frac{1}{2}}$ est strictement positive en régime de diffusion et l'hypothèse (5.73) est satisfaite.

Démonstration. La preuve s'effectue à l'aide de développements de Chapman-Enskog des discrétisations. Ils s'écrivent :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q_i^n = q_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.74)$$

où l'ordre zéro de la hauteur d'eau $h_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, comme la hauteur d'eau l'est. De plus, en utilisant (5.74), les développements des quantités $\bar{q}$, $\overline{h^{-\eta}}$ et α , données respectivement par (5.30), (5.27) et (5.34), s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \overline{h^{-\eta}} &= \overline{h^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \alpha &= \alpha^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.75)$$

où

$$\bar{q}^0 = \text{sign}(q_R^0 + q_L^0) \sqrt{\frac{1}{2} ((q_L^0)^2 + (q_R^0)^2)}, \quad (5.76)$$

$$\overline{h^{-\eta}} = \frac{[(h^0)^2]}{2} \frac{\eta + 2}{[(h^0)^{\eta+2}]}, \quad (5.77)$$

$$\text{et } \alpha^0 = -\frac{\bar{q}^0}{h_R^0 h_L^0} + \frac{g}{2} (h_R^0 + h_L^0). \quad (5.78)$$

En injectant les développements (5.74) et (5.75) dans (5.69), le schéma se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} (q_{i+1}^{0,n} - q_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ \quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ q_i^{0,n+1} = q_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^{0,n} - q_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^{0,n} - q_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\frac{(q_{i+1}^{0,n})^2}{h_{i+1}^{0,n}} + \frac{g(h_{i+1}^{0,n})^2}{2} - \frac{(q_{i-1}^{0,n})^2}{h_{i-1}^{0,n}} - \frac{g(h_{i-1}^{0,n})^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (5.79)$$

Quand ε tend vers zéro, la limite du système d'équations (5.79) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 = 0, \\ \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 = 0. \end{array} \right.$$

En injectant la première expression du système ci-dessus dans la deuxième, la relation suivante s'écrit :

$$\left(\lambda_{i-\frac{1}{2}} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^0 + \lambda_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^0 \right) \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 = 0, \quad (5.80)$$

et l'utilisation de l'hypothèse (5.73) donne alors :

$$\overline{q_{i-\frac{1}{2}}^0} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

La définition de $\bar{q}^0$ donnée dans (5.75), donne donc nécessairement :

$$q_i^{0,n} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 20. C'est ici que la modification effectuée sur $\bar{q}$, l'approximation du débit aux

interfaces, prend son sens. En effet, avec la définition de $\bar{q}$ proposée dans [70], dont la définition est donnée par (5.28), un débit nul à l'interface n'impose pas nécessairement un débit nul des deux côtés de l'interface. C'est en revanche le cas avec la définition (5.30) choisie ici.

L'ordre zéro du développement asymptotique du débit est donc nul. Les développements asymptotiques de h et q s'écrivent alors maintenant de la façon suivante :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q_i^n = \varepsilon \left(q_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (5.81)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{q}$, $\overline{h^{-\eta}}$ et α sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \varepsilon \left(\bar{q}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \\ \overline{h^{-\eta}} &= \overline{h^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \alpha &= \tilde{\alpha}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.82)$$

où

$$\bar{q}^1 = \text{sign}(q_R^1 + q_L^1) \sqrt{\frac{1}{2} ((q_L^1)^2 + (q_R^1)^2)} \quad (5.83)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\alpha}^0 = \frac{g}{2} (h_R^0 + h_L^0). \quad (5.84)$$

En injectant les développements (5.81) et (5.82) dans le schéma (5.69), on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} h_i^{0,n+1} &= h_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{i+1}^{1,n} - q_{i-1}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &\quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} |\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}}| \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} |\overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}}| \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \varepsilon q_i^{1,n+1} &= \varepsilon q_i^{1,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^{1,n} - q_i^{1,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^{1,n} - q_{i-1}^{1,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\frac{\varepsilon^2 (q_{i+1}^{1,n})^2}{h_{i+1}^{0,n}} + \frac{g(h_{i+1}^{0,n})^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 (q_{i-1}^{1,n})^2}{h_{i-1}^{0,n}} - \frac{g(h_{i-1}^{0,n})^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} |\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}}| \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} |\overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}}| \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \right. \quad (5.85)$$

Quand ε tend vers zéro, les expressions (5.85) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}) \right) \\ + \frac{k\Delta t}{2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^0} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 \right) = 0, \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{g(h_{i+1}^{0,n})^2}{2} - \frac{g(h_{i-1}^{0,n})^2}{2} \right) \\ - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 \right) = 0, \end{cases}$$

ou encore, en utilisant l'expression de $\tilde{\alpha}^0$ donnée par (5.84) :

$$\begin{cases} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} \\ + \frac{2k}{g} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0}{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}} - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0}{h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n}} \right) = 0, \\ \frac{(h_{i+1}^{0,n})^2 - (h_{i-1}^{0,n})^2}{\Delta x} + \frac{2k}{g} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0 \right) = 0. \end{cases} \quad (5.86)$$

La seconde équation du système limite ci-dessus est une discrétisation de l'équilibre local donné par (5.72). En effet, celui-ci peut se réécrire comme suit :

$$\partial_x \frac{gh^2}{2} = -kq|q|h^{-\eta}. \quad (5.87)$$

Le point (ii) du Théorème 5.4.1 est donc vérifié. De cet équilibre local discret, la relation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{2k}{g} \frac{\overline{q_{i-\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0}{h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n}} \\ = - \frac{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}}{h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n}} \left(\frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{2k}{g} \frac{\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0}{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}} \right). \end{aligned}$$

L'injection de l'expression ci-dessus dans la première équation de (5.86) donne :

$$\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}}{h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n}} \right) \left(\frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{2k}{g} \frac{\overline{q_{i+\frac{1}{2}}^{-1}} \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^0}{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}} \right) = 0.$$

Puisque $\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}}{h_i^{0,n} + h_{i-1}^{0,n}} > 0$, la relation ci-dessus permet d'écrire l'égalité suivante, vérifiée pour toute interface $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{2k}{g} \frac{\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}^1 |\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}^1| \bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta^0}}{h_{i+1}^{0,n} + h_i^{0,n}} = 0. \quad (5.88)$$

Maintenant que la relation (5.88) est établie, les développements asymptotiques utilisés pour h et q sont les suivants :

$$h_i^n = h_i^{0,n} + \varepsilon h_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad q_i^n = \varepsilon \left(q_i^{1,n} + \varepsilon q_i^{2,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right). \quad (5.89)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{q}$, $\bar{h}^{-\eta}$ et α sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \varepsilon \left(\bar{q}^1 + \varepsilon \bar{q}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right), \\ \bar{h}^{-\eta} &= \bar{h}^{-\eta^0} + \varepsilon \bar{h}^{-\eta^1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \alpha &= \tilde{\alpha}^0 + \varepsilon \tilde{\alpha}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.90)$$

où

$$\bar{q}^2 = \text{sign}(q_R^1 + q_L^1) \frac{q_L^2 q_L^1 + q_R^2 q_R^1}{\sqrt{2((q_L^1)^2 + (q_R^1)^2)}} \mathbf{1}_{(q_L^1)^2 + (q_R^1)^2 \neq 0} \quad (5.91)$$

$$\bar{h}^{-\eta^1} = \bar{h}^{-\eta^0} \left(\frac{2[h^1 h^0]}{[(h^0)^2]} - \frac{(\eta + 2)[h^1 (h^0)^{\eta+1}]}{[(h^0)^{\eta+2}]} \right) \quad (5.92)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\alpha}^1 = \frac{g}{2} (h_R^1 + h_L^1). \quad (5.93)$$

Les développements (5.89) et (5.90) permettent d'écrire également les développements suivants :

$$\bar{q} |\bar{q}| \bar{h}^{-\eta} / \alpha = \varepsilon^2 \left(\beta^0 + \varepsilon \beta^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right), \quad (5.94)$$

où

$$\beta^0 = \frac{\bar{q}^1 |\bar{q}^1| \bar{h}^{-\eta^0}}{\tilde{\alpha}^0}, \quad (5.95)$$

$$\text{et} \quad \beta^1 = \frac{2\bar{q}^2 |\bar{q}^1| \bar{h}^{-\eta^0} + \bar{q}^1 |\bar{q}^1| \bar{h}^{-\eta^1}}{\tilde{\alpha}^0} - \frac{\bar{q}^1 |\bar{q}^1| \bar{h}^{-\eta^0} \tilde{\alpha}^1}{(\tilde{\alpha}^0)^2}. \quad (5.96)$$

L'injection des développements (5.89) et (5.94) dans la première équation du schéma (5.69)

donne :

$$\begin{aligned}
 h_i^{0,n+1} = & h_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n} \right) \right) \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{1,n} - h_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{1,n} - h_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(q_{i+1}^{1,n} - q_{i-1}^{1,n} \right) \\
 & + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\beta_{i+\frac{1}{2}}^0 + \varepsilon\beta_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\beta_{i-\frac{1}{2}}^0 + \varepsilon\beta_{i-\frac{1}{2}}^1 \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

En rassemblant les termes en facteurs de $1/\varepsilon$, l'expression (5.97) se réécrit

$$\begin{aligned}
 h_i^{0,n+1} = & h_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} + k\beta_{i+\frac{1}{2}}^0 \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + k\beta_{i-\frac{1}{2}}^0 \right) \right) \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{1,n} - h_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{1,n} - h_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(q_{i+1}^{1,n} - q_{i-1}^{1,n} \right) \\
 & + \frac{k\Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\beta_{i+\frac{1}{2}}^1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\beta_{i-\frac{1}{2}}^1 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

En utilisant la définition de β^0 donnée par (5.95) ainsi que la relation (5.88), la relation suivante s'écrit :

$$\frac{h_{i+1}^{0,n} - h_i^{0,n}}{\Delta x} + k\beta_{i+\frac{1}{2}}^0 = \frac{h_i^{0,n} - h_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + k\beta_{i-\frac{1}{2}}^0 = 0, \tag{5.99}$$

et l'équation (5.98) se réécrit comme suit :

$$h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(q_{i+1}^{1,n} - q_{i-1}^{1,n} \right) + \Delta t R_i^n + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{5.100}$$

où le résidu R_i^n est défini par :

$$\begin{aligned}
 R_i^n = & \frac{1}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{1,n} - h_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{1,n} - h_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\
 & + \frac{k}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\beta_{i+\frac{1}{2}}^1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\beta_{i-\frac{1}{2}}^1 \right).
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

La dernière étape de la preuve consiste à remarquer que $R_i^n = \mathcal{O}(\Delta x)$. En effet,

$$R_i^n = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i+1}^{1,n} - h_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(h_i^{1,n} - h_{i-1}^{1,n} \right)}{\Delta x^2} + k \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}\beta_{i+\frac{1}{2}}^1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\beta_{i-\frac{1}{2}}^1}{\Delta x} \right),$$

et puisque les deux termes ci-dessus sont des dérivées discrètes, R_i^n est un terme de diffusion

numérique. Ainsi, la limite diffusive discrète du schéma (5.69) s'écrit :

$$h_i^{0,n+1} = h_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{i+1}^{1,n} - q_{i-1}^{1,n}) + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.102)$$

et est donc bien consistante avec

$$\partial_t h + \partial_x q = 0.$$

De plus, puisqu'on a vu que les discrétisations à l'ordre un du débit $(q_i^{1,n})_i^n$ sont consistantes avec l'équilibre local donné par (5.72), alors (5.100) discrétise bien l'équation de diffusion donnée par (5.71). Le point (i) du Théorème 5.4.1 est donc vérifié et la preuve est achevée. $\square$

5.4.2 Le p -système

Le schéma donné par (5.52) pour le p -système (5.39), après injection du changement d'échelle $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et $\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon$, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)} \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_{i-1}^n)) \\ \quad - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \right). \end{array} \right. \quad (5.103)$$

où $\bar{u}$ est donné par (5.47). La limite diffusive associée au p -système (5.39), donnée dans le Chapitre 2, s'écrit :

$$\partial_t \tau + \frac{1}{\sigma} \partial_x p(\tau) = 0, \quad (5.104)$$

et que son équilibre local s'écrit comme suit :

$$u = -\frac{1}{\sigma} \partial_x p(\tau). \quad (5.105)$$

Dans le théorème suivant, un résultat sur la convergence asymptotique de (5.103) est proposé.

Théorème 5.4.2. *Les deux propositions suivantes sont vérifiées par les discrétisations données par le schéma (5.103).*

- (i) *À la limite ε tend vers zéro, la première équation de (5.103) est consistante avec la limite diffusive du modèle (5.104).*

(ii) À la limite ε tend vers zéro, la deuxième équation de (5.103) est consistante avec l'équilibre local (5.105).

Démonstration. La preuve s'effectue à l'aide de développements de Chapman-Enskog des discrétisations. Ils s'écrivent :

$$\tau_i^n = \tau_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u_i^n = u_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.106)$$

Pour simplifier l'écriture des expressions à venir, les notations suivantes sont introduites :

$$\begin{aligned} \beta &:= \frac{\tau_R - \tau_L}{p(\tau_R) - p(\tau_L)}, \\ \gamma &:= \bar{u}\beta. \end{aligned} \quad (5.107)$$

En utilisant (5.106), les développements des quantités $\bar{u}$, β et γ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \beta &= \beta^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \gamma &= \gamma^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.108)$$

où

$$\bar{u}^0 = \text{sign}(u_R^0 + u_L^0) \sqrt{\frac{1}{2} ((u_L^0)^2 + (u_R^0)^2)}, \quad (5.109)$$

$$\beta^0 = \frac{\tau_R^0 - \tau_L^0}{p(\tau_R^0) - p(\tau_L^0)}, \quad (5.110)$$

$$\gamma^0 = \bar{u}^0 \beta^0. \quad (5.111)$$

L'injection des développements (5.106) et (5.108) dans (5.103) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_i^{0,n+1} &= \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(u_{i+1}^{0,n} - u_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ u_i^{0,n+1} &= u_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1}^{0,n} - u_i^{0,n} \right) - \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_i^{0,n} - u_{i-1}^{0,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \right. \quad (5.112)$$

Quand ε tend vers zéro, la limite du système d'équations (5.112) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} \right) = 0, \\ \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} \right) = 0. \end{cases}$$

En utilisant la définition de γ^0 (5.111) et en injectant la première expression du système ci-dessus dans la deuxième, la relation suivante s'écrit :

$$\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \beta_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} \right) \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} = 0,$$

et puisque $\lambda_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \beta_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} < 0$ par décroissance stricte de la pression p , alors

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^0 = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

La définition de $\bar{u}^0$ donnée dans (5.109) donne donc nécessairement :

$$u_i^{0,n} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

L'ordre zéro du développement asymptotique de la vitesse est donc nul. Les développements asymptotiques de τ et u s'écrivent donc maintenant de la façon suivante :

$$\tau_i^n = \tau_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u_i^n = \varepsilon \left(u_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (5.113)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{u}$ et γ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \varepsilon \left(\bar{u}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \\ \gamma &= \varepsilon \left(\gamma^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (5.114)$$

où

$$\bar{u}^1 = \text{sign}(u_R^1 + u_L^1) \sqrt{\frac{1}{2} ((u_L^1)^2 + (u_R^1)^2)}, \quad (5.115)$$

$$\gamma^1 = \bar{u}^1 \beta^0. \quad (5.116)$$

En injectant les développements (5.113) et (5.114) dans le schéma (5.103), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{0,n+1} = \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) \\ \quad + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \varepsilon u_i^{1,n+1} = \varepsilon u_i^{1,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(u_i^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ \quad - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (5.117)$$

Quand ε tend vers zéro, les expressions (5.117) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n} \right) \right) \\ \quad + \frac{\sigma\Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0, \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n}) \right) - \frac{\sigma\Delta t}{2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0. \end{array} \right.$$

et après simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = -\frac{1}{\sigma} \frac{p(\tau_{i+1}^{0,n}) - p(\tau_{i-1}^{0,n})}{2\Delta x}. \end{array} \right. \quad (5.118)$$

La seconde équation du système limite ci-dessus est une discrétisation de l'équilibre local donné par (5.105). Le point (ii) du Théorème 5.4.2 est donc démontré. De cet équilibre local discret, et en utilisant la définition de γ^1 donnée par (5.116) ainsi que celle de β^0 donnée par (5.110), la relation suivante est obtenue :

$$\frac{\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} = -\frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{0,n}}{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{0,n}} \left(\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right).$$

L'injection de l'expression ci-dessus dans la première équation de (5.118) donne :

$$\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{0,n}}{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{0,n}} \right) \left(\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0.$$

Puisque $\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{\beta_{i-\frac{1}{2}}^{0,n}}{\beta_{i+\frac{1}{2}}^{0,n}} > 0$ alors la relation ci-dessus permet d'écrire l'égalité suivante, vérifiée pour toute interface $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} = 0. \quad (5.119)$$

Maintenant que la relation (5.119) est établie, les développements asymptotiques utilisés pour τ et u sont les suivants :

$$\tau_i^n = \tau_i^{0,n} + \varepsilon \tau_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad u_i^n = \varepsilon \left(u_i^{1,n} + \varepsilon u_i^{2,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right). \quad (5.120)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{u}$, β et γ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \varepsilon \left(\bar{u}^1 + \varepsilon \bar{u}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right), \\ \beta &= \beta^0 + \varepsilon \beta^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \gamma &= \varepsilon \left(\gamma^1 + \varepsilon \gamma^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (5.121)$$

où

$$\bar{u}^2 = \begin{cases} \text{sign}(u_R^2 + u_L^2) \sqrt{\frac{1}{2} ((u_L^2)^2 + (u_R^2)^2)} & \text{si } u_L^1 = u_L^2 = 0, \\ \text{sign}(u_R^1 + u_L^1) \frac{u_L^2 u_L^1 + u_R^2 u_R^1}{\sqrt{2} ((u_L^1)^2 + (u_R^1)^2)} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.122)$$

$$\beta^1 = \frac{\tau_R^1 - \tau_L^1 - \beta^0 (\tau_R^1 p'(\tau_R^0) - \tau_L^1 p'(\tau_L^0))}{p(\tau_R^0) - p(\tau_L^0)}, \quad (5.123)$$

$$\gamma^2 = \bar{u}^2 \beta^0 + \bar{u}^1 \beta^1. \quad (5.124)$$

L'injection des développements (5.120) et (5.121) dans la première équation du schéma (5.103) donne :

$$\begin{aligned} \tau_i^{0,n+1} &= \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{1,n} - \tau_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{1,n} - \tau_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.125)$$

En rassemblant les termes en facteurs de $1/\varepsilon$, l'expression (5.97) se réécrit :

$$\begin{aligned}\tau_i^{0,n+1} &= \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{1,n} - \tau_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{1,n} - \tau_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma \Delta t}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}\tag{5.126}$$

En utilisant la relation (5.119), la relation suivante s'écrit :

$$\frac{\tau_{i+1}^{0,n} - \tau_i^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} = \frac{\tau_i^{0,n} - \tau_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \sigma \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} = 0,$$

et l'équation (5.126) s'écrit maintenant :

$$\tau_i^{0,n+1} = \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) + \Delta t R_i^n + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où le résidu R_i^n est défini par :

$$\begin{aligned}R_i^n &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{1,n} - \tau_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{1,n} - \tau_{i-1}^{1,n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right).\end{aligned}\tag{5.127}$$

La dernière étape de la preuve consiste à remarquer que $R_i^n = \mathcal{O}(\Delta x)$. En effet, ce résidu s'écrit :

$$R_i^n = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\tau_{i+1}^{1,n} - \tau_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\tau_i^{1,n} - \tau_{i-1}^{1,n} \right)}{\Delta x^2} + \sigma \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{2,n}}{\Delta x} \right),$$

et puisque les deux termes ci-dessus sont des dérivées discrètes, R_i^n est un terme de diffusion numérique en $\mathcal{O}(\Delta x)$. Ainsi, la limite diffusive discrète du schéma (5.103) s'écrit :

$$\tau_i^{0,n+1} = \tau_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i+1}^{1,n} - u_{i-1}^{1,n} \right) + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\varepsilon),\tag{5.128}$$

et est donc consistante avec

$$\partial_t \tau - \partial_x u = 0.$$

De plus, puisqu'on a vu que les discrétisations à l'ordre un de la vitesse $(u_i^{1,n})_i^n$ sont consistantes avec l'équilibre local donné par (5.105), alors (5.128) discrétise bien l'équation de diffusion donnée par (5.104) et le point (i) du Théorème 5.4.2 est démontré. $\square$

5.4.3 Le modèle M1

Le schéma donné par (5.67) pour le modèle M1 (5.54), après injection du changement d'échelle $\Delta t \leftarrow \Delta t/\varepsilon$ et $\sigma \leftarrow \sigma/\varepsilon$, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_i^n \phi_i^n) - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} (E_i^n \phi_i^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1}^n}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\phi_{i-1}^n}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\sigma \Delta t}{c \varepsilon^2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ F_i^{n+1} = F_i^n + \frac{\Delta t}{2 \varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^n - F_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{c^2 \Delta t}{2 \varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c \sigma \Delta t}{2 \varepsilon^2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n). \end{array} \right. \quad (5.129)$$

où $\bar{F}$ est donné par (5.62) et ϕ_i^n désigne $\chi(\frac{F_i^n}{c E_i^n})$ avec χ le facteur d'Eddington donné en (5.56). La limite diffusive associée au modèle M1 (5.54), donnée dans le Chapitre 2, s'écrit :

$$\partial_t E - \frac{c}{3\sigma} \partial_{xx} E = 0, \quad (5.130)$$

et que son équilibre local s'écrit comme suit :

$$F = -\frac{c}{3\sigma} \partial_x E. \quad (5.131)$$

Dans le théorème suivant, un résultat sur la convergence asymptotique de (5.129) est proposé.

Théorème 5.4.3. *Les deux propositions suivantes sont vérifiées par les discrétisations données par le schéma (5.129).*

- (i) *À la limite ε tend vers zéro, la première équation de (5.129) est consistante avec la limite diffusive du modèle (5.130).*
- (ii) *À la limite ε tend vers zéro, la deuxième équation de (5.129) est consistante avec l'équilibre local (5.131).*

Démonstration. La preuve s'effectue à l'aide de développements de Chapman-Enskog des discrétisations. Ils s'écrivent :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = F_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.132)$$

où l'ordre zéro de l'énergie radiative $E_i^{0,n}$ est supposé strictement positif pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. De plus, en utilisant (5.132), les développements des quantités $\bar{F}$ donné par

(5.62) et de $\phi = \chi(\frac{F}{cE})$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F}^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \phi &= \phi^0 + \mathcal{O}(\varepsilon),\end{aligned}\tag{5.133}$$

où

$$\bar{F}^0 = \text{sign}(F_R^0 + F_L^0) \sqrt{\frac{1}{2} ((F_L^0)^2 + (F_R^0)^2)},\tag{5.134}$$

$$\phi^0 = \chi\left(\frac{F^0}{cE^0}\right).\tag{5.135}$$

L'injection des développements (5.132) et (5.133) dans (5.129) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} E_i^{0,n+1} &= E_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} (E_{i+1}^{0,n} \phi_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n} \phi_i^{0,n}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} (E_i^{0,n} \phi_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n} \phi_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1}^{0,n}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} (F_{i+1}^{0,n} - F_i^{0,n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{i-1}^{0,n}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} (F_i^{0,n} - F_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma \Delta t}{c \varepsilon^2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ F_i^{0,n+1} &= F_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^{0,n} - F_i^{0,n}) - \lambda_{i+\frac{1}{2}} (F_i^{0,n} - F_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{c^2 \Delta t}{2\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^{0,n} \phi_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n} \phi_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &\quad - \frac{c \sigma \Delta t}{2\varepsilon^2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \right.\tag{5.136}$$

Les développements impliquant des termes en ϕ se font facilement puisque, la définition (5.56) du facteur d'Eddington χ donne $\phi > 0$. Quand ε tend vers zéro, la limite du système d'équations (5.136) s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} - \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} &= 0, \\ \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{0,n} &= 0. \end{aligned} \right.$$

L'injection de la première expression du système ci-dessus dans la deuxième permet d'écrire :

$$\left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} + \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} \right) \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} = 0,$$

et puisque $\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{\phi_{i+1}^{0,n} + \phi_i^{0,n}} + \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{\phi_i^{0,n} + \phi_{i-1}^{0,n}} > 0$ alors

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{0,n} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Enfin, la définition de $\bar{F}^0$ donnée dans (5.134) donne nécessairement :

$$F_i^{0,n} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

L'ordre zéro du développement asymptotique du flux radiatif est donc nul. Les développements asymptotiques de E et F s'écrivent donc maintenant de la façon suivante :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i^n = \varepsilon \left(F_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (5.137)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{F}$ et ϕ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \varepsilon \left(\bar{F}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \\ \phi &= \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.138)$$

où

$$\bar{F}^1 = \text{sign}(F_R^1 + F_L^1) \sqrt{\frac{1}{2} ((F_L^1)^2 + (F_R^1)^2)}. \quad (5.139)$$

La quantité $1/3$ vient de l'évaluation de χ en zéro. En injectant les développements (5.137) et (5.138) dans le schéma (5.129), on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} E_i^{0,n+1} &= E_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n}) \\ &\quad + \frac{3\sigma \Delta t}{2c\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \varepsilon F_i^{1,n+1} &= \varepsilon F_i^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1}^{1,n} - F_i^{1,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (F_i^{1,n} - F_{i-1}^{1,n}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \frac{c^2 \Delta t}{6\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ &\quad - \frac{c\sigma \Delta t}{2\varepsilon} \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \right. \quad (5.140)$$

Quand ε tend vers zéro, les expressions (5.140) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}) \right) \\ \quad + \frac{3\sigma\Delta t}{2c} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0, \\ -\frac{c^2\Delta t}{6\Delta x} (E_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}) - \frac{c\sigma\Delta t}{2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n}) = 0, \end{cases}$$

et après simplifications :

$$\begin{cases} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0, \\ \frac{1}{2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n}) = -\frac{c}{3\sigma} \frac{E_{i+1}^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{2\Delta x}. \end{cases} \quad (5.141)$$

La seconde équation du système limite ci-dessus est une discrétisation de l'équilibre local donné par (5.131). Le point (i) du Théorème 5.4.3 est donc démontré. De cet équilibre local discret, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} = - \left(\frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right).$$

L'injection de l'expression ci-dessus dans la première équation de (5.141) donne :

$$\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) = 0.$$

Puisque $\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}} > 0$, la relation ci-dessus permet d'écrire l'égalité suivante, vérifiée pour toute interface $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} = 0. \quad (5.142)$$

Maintenant que la relation (5.142) est établie, les développements asymptotiques utilisés pour E et F sont les suivants :

$$E_i^n = E_i^{0,n} + \varepsilon E_i^{1,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad F_i^n = \varepsilon \left(F_i^{1,n} + \varepsilon F_i^{2,n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right). \quad (5.143)$$

Ainsi, les développements des quantités $\bar{F}$ et ϕ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \varepsilon \left(\bar{F}^1 + \varepsilon \bar{F}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right), \\ \phi &= \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.144)$$

où

$$\bar{F}^2 = \begin{cases} \text{sign}(F_R^2 + F_L^2) \sqrt{\frac{1}{2} ((F_L^2)^2 + (F_R^2)^2)} & \text{si } F_L^1 = F_L^2 = 0, \\ \text{sign}(F_R^1 + F_L^1) \frac{F_L^2 F_L^1 + F_R^2 F_R^1}{\sqrt{2} ((F_L^1)^2 + (F_R^1)^2)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.145)$$

Le terme d'ordre un dans le développement de ϕ est nul puisque $\chi'(0) = 0$. En effet, grâce à la définition de χ donnée par (5.56), sa dérivée s'écrit :

$$\chi'(f) = \frac{2f}{\sqrt{4 - 3f^2}}.$$

L'injection des développements (5.143) et (5.144) dans la première équation du schéma (5.129) donne :

$$\begin{aligned} E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} &+ \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1}^{1,n} - E_i^{1,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (E_i^{1,n} - E_{i-1}^{1,n}) \right) \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n}) \\ &+ \frac{3\sigma \Delta t}{2c\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) \\ &+ \frac{3\sigma \Delta t}{2c} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.146)$$

En rassemblant les termes en facteurs de $1/\varepsilon$, l'expression (5.97) se réécrit :

$$\begin{aligned} E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} &+ \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} \right) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (E_{i+1}^{1,n} - E_i^{1,n}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (E_i^{1,n} - E_{i-1}^{1,n}) \right) \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n}) \\ &+ \frac{3\sigma \Delta t}{2c} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.147)$$

En utilisant la relation (5.142), la relation suivante s'écrit :

$$\frac{E_{i+1}^{0,n} - E_i^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{1,n} = \frac{E_i^{0,n} - E_{i-1}^{0,n}}{\Delta x} + \frac{3\sigma}{c} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{1,n} = 0,$$

et l'équation (5.147) s'écrit maintenant :

$$E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n}) + \Delta t R_i^n + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où le résidu R_i^n est défini par :

$$R_i^n = \frac{1}{2\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(E_{i+1}^{1,n} - E_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(E_i^{1,n} - E_{i-1}^{1,n} \right) \right) + \frac{3\sigma}{2c} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{2,n} \right). \quad (5.148)$$

La dernière étape de la preuve consiste à remarquer que $R_i^n = \mathcal{O}(\Delta x)$. En effet, ce résidu s'écrit :

$$R_i^n = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(E_{i+1}^{1,n} - E_i^{1,n} \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(E_i^{1,n} - E_{i-1}^{1,n} \right)}{\Delta x^2} + \frac{3\sigma}{c} \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{2,n} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{2,n}}{\Delta x} \right),$$

et puisque les deux termes ci-dessus sont des dérivées discrètes, R_i^n est un terme de diffusion numérique en $\mathcal{O}(\Delta x)$. Ainsi, la limite diffusive discrète du schéma (5.129) s'écrit :

$$E_i^{0,n+1} = E_i^{0,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(F_{i+1}^{1,n} - F_{i-1}^{1,n} \right) + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.149)$$

et est donc consistante avec

$$\partial_t E + \partial_x F = 0.$$

De plus, puisqu'on a vu que les discrétisations à l'ordre un du flux radiatif $(F_i^{1,n})_i^n$ sont consistantes avec l'équilibre local donné par (5.131), alors (5.149) discrétise bien l'équation de diffusion donnée par (5.130) et le point (ii) du Théorème 5.4.3 est démontré. $\square$

Résultats numériques

Ce dernier chapitre est consacré aux simulations numériques des schémas présentés dans les Chapitres 4 et 5 de ce manuscrit. Pour chacun des trois modèles étudiés, le p -système, le modèle M1 et les équations de Saint-Venant, les différents schémas construits sont tout d'abord rappelés. Pour les équations de Saint-Venant, les détails de l'implémentation des schémas implicites (4.90) et (4.91) sont présentés. Ensuite, la préservation des états stationnaires par les schémas développés dans le Chapitre 5 est mise en évidence. Ainsi, l'évolution des solutions approchées pour une condition initiale stationnaire mais également pour une condition initiale stationnaire perturbée, est présentée. Enfin, la préservation de la limite diffusive est illustrée pour deux conditions initiales, l'une continue et l'autre discontinue, et des discussions sur les ordres de convergence en espace sont proposées.

Dans tout ce chapitre, une discrétisation uniforme du domaine spatial $[a, b]$ avec $N \in \mathbb{N}$ mailles $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ est considérée. La taille de chaque maille est alors donnée par $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$ désigne le centre de la maille K_i et $x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{\Delta x}{2}$ ses extrémités. Concernant les conditions de bord utilisées, elles sont de type Dirichlet non homogène, compatibles avec l'état stationnaire, pour la validation de la préservation des états stationnaires, et de type flux nul pour la validation de la préservation de l'asymptotique.

6.1 Le p -système

Ce système, présenté dans le Chapitre 2, s'écrit de la manière suivante après changement d'échelle du temps et de la friction par le paramètre ε :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \varepsilon \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} u, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Dans les simulations, la pression p est définie par

$$p(\tau) = \tau^{-1.4}. \quad (6.2)$$

Le paramètre σ est le coefficient de friction et est fixé à 1. La limite de diffusion de ce problème, pour ε qui tend vers zéro, correspond à l'équation des milieux poreux rappelée ici :

$$\partial_t \bar{\tau} + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\bar{\tau}) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Les différents schémas pour le p -système (6.1) proposés dans ces travaux sont tout d'abord rappelés. Le premier est donné par (4.18). Il a été obtenu par la méthode HLL perturbée pour inclure le terme source décrite dans le Chapitre 4, sans nécessité d'un paramètre additionnel. Il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^n - u_i^n) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)) + \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) u_i^n, \end{array} \right. \quad (PS_{AP}^\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_{i+\frac{1}{2}} &= \max \left(\sqrt{-p'(\tau_i^n)}, \sqrt{-p'(\tau_{i+1}^n)} \right), \\ \tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon &= \frac{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}\varepsilon}{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}\varepsilon + \sigma \Delta x}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Le second schéma est donné par (5.103). Il est introduit dans le Chapitre 5 et a été

conçu pour préserver tous les états stationnaires. Il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_i^n)} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{p(\tau_i^n) - p(\tau_{i-1}^n)} \right), \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (p(\tau_{i+1}^n) - p(\tau_{i-1}^n)) \\ \quad - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} \left(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n + \bar{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \end{array} \right. \quad (PS_{FWB}^\varepsilon)$$

où les pentes $(\lambda_{i+\frac{1}{2}})_i$ sont données par (6.4) et où les vitesses aux interfaces $(\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)_i$ sont définies par :

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = \text{sign}(u_i^n + u_{i+1}^n) \sqrt{\frac{1}{2} \left((u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2 \right)}.$$

6.1.1 Préservation des états stationnaires par le schéma (PS_{FWB}^ε)

Avant de s'intéresser à la préservation de la limite de diffusion par les deux schémas développés (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) , la préservation des états stationnaires par le schéma (PS_{FWB}^ε) est vérifiée numériquement. Les tests proposés dans cette partie sont aussi effectués sur le schéma (PS_{AP}^ε) qui ne préserve, a priori, pas les états stationnaires. Il faut tout d'abord déterminer une condition initiale stationnaire, c'est-à-dire une solution $W = {}^t(\tau, u)$ du problème stationnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x u = 0, \\ \partial_x p(\tau) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} u. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

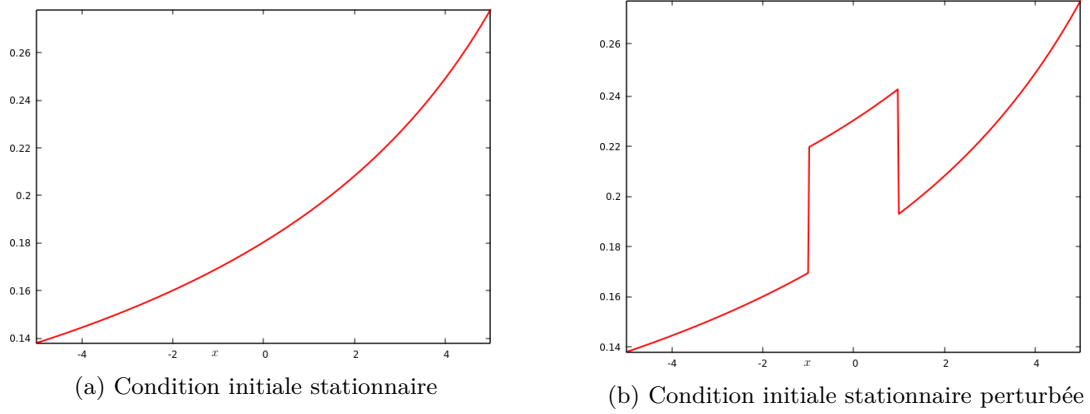
Puisque la fonction de pression p est définie par (6.2), la condition initiale suivante $W_0 = {}^t(\tau_0, u_0)$, solution du problème stationnaire (6.5), est proposée :

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \tau_0 = \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} (x - 10) \right)^{-1/1.4}, \quad \forall x \in (-5, 5). \quad (6.6)$$

Comme proposé dans [69, 70], les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) sont également testés avec la condition initiale perturbée $\tilde{W}_0 = {}^t(\tilde{\tau}_0, \tilde{u}_0)$ obtenue à partir de W_0 comme suit :

$$\tilde{u}_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x \in (-1, 1)}, \quad \forall x \in (-5, 5). \quad (6.7)$$

L'allure des volumes spécifiques donnés par (6.6) et (6.7) est représentée sur la Figure 6.1.


 FIGURE 6.1: Volumes spécifiques des conditions initiales pour $N = 400$.

Par construction, le schéma (PS_{FWB}^ε) est censé préserver les états stationnaires. L'approximation obtenue avec la condition initiale W_0 donnée par (6.6) ne devrait donc pas être modifiée au cours du temps. De plus, selon [69, 70], celle obtenue avec la condition initiale $\tilde{W}_0$ donnée par (6.7) devrait retourner à l'équilibre W_0 . En revanche, il n'y a pas de raison que le schéma (PS_{AP}^ε) vérifie ces propriétés.

L'erreur entre l'approximation (W_i^n) , calculée au temps T par le schéma (PS_{AP}^ε) ou (PS_{FWB}^ε) avec N mailles, et la solution stationnaire W_0 donnée par (6.6), est calculée en norme L^2 à l'aide de la formule suivante :

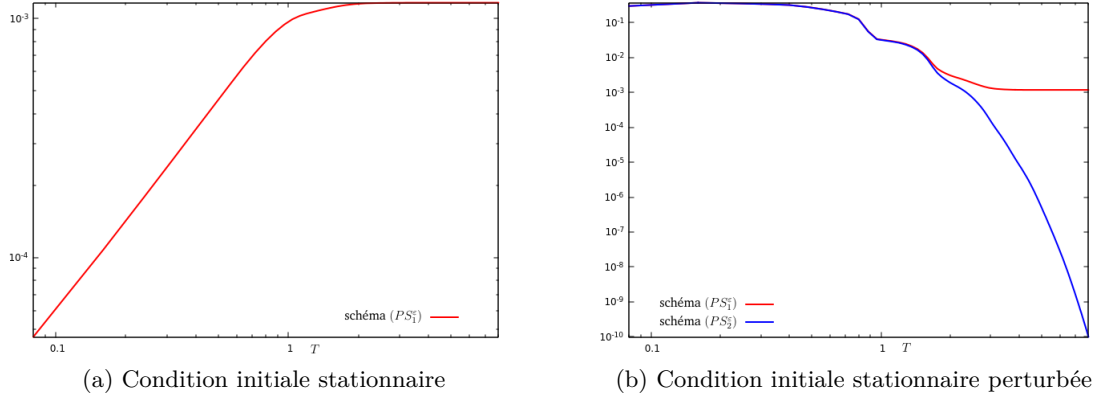
$$\mathcal{E}_N(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left((\tau_i^n - \tau_0(x_i))^2 + (u_i^n - u_0(x_i))^2 \right) \Delta x}. \quad (6.8)$$

Sur la Figure 6.2, l'erreur en échelle logarithmique pour chacun des schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) et chacune des conditions initiales (6.6) et (6.7) est représentée en fonction du temps T . Les conditions au bord utilisées sont de type Dirichlet non homogènes. Elles sont données par :

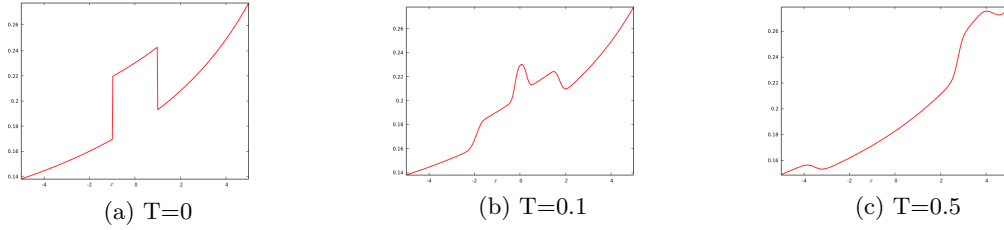
$$W_0^n = W_0 \left(a - \frac{\Delta x}{2} \right) \quad \text{et} \quad W_{N+1}^n = W_0 \left(b + \frac{\Delta x}{2} \right). \quad (6.9)$$

Par soucis de clarté, l'erreur obtenue par le schéma (PS_{FWB}^ε) n'est pas tracée sur la Figure 6.2 (a) car elle reste égale au zéro machine, 10^{-15} environ. Cela correspond au résultat attendu pour ce schéma. En revanche, les approximations données par le schéma (PS_{AP}^ε) s'écartent de l'état stationnaire. Le schéma (PS_{AP}^ε) ne préserve donc pas les états stationnaires, ce qui était prévisible.

Le comportement au cours du temps, tracé en échelle logarithmique, de l'erreur entre les discrétisations données par les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) , avec la condition initiale

FIGURE 6.2: Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

perturbée (6.7), et l'état stationnaire W_0 donné par (6.6) est représenté sur le graphe (b) de la Figure 6.2. Les approximations calculées par (PS_{FWB}^ε) retournent donc bien à l'équilibre W_0 . L'élimination de la perturbation est représentée sur la Figure 6.3. En

FIGURE 6.3: Volume spécifique obtenu par le schéma (PS_{FWB}^ε) pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

revanche, l'erreur pour les discrétisations données par le schéma (PS_{AP}^ε) se stabilise à environ 10^{-3} . Les discrétisations ne retournent donc pas à l'état stationnaire W_0 . Cela met bien en évidence la préservation des états stationnaires par (PS_{FWB}^ε) mais pas par le schéma (PS_{AP}^ε) .

6.1.2 Préservation de l'asymptotique

La validation de la préservation de l'asymptotique par les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) est maintenant exposée. En effet, il a été démontré dans le Théorème 4.3.1 que la discrétisation du volume spécifique issue du schéma (PS_{AP}^ε) converge vers celle donnée par (4.20), qui discrétise l'équation de diffusion (6.3). Ce schéma limite est rappelé :

$$\bar{\tau}_i^{n+1} = \bar{\tau}_i^n + \frac{\Delta t}{\sigma \Delta x^2} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^2 (\bar{\tau}_{i+1}^n - \bar{\tau}_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^2 (\bar{\tau}_i^n - \bar{\tau}_{i-1}^n) \right), \quad (PS_{lim})$$

où les pentes $(\lambda_{i+\frac{1}{2}})_i$ sont toujours données par (6.4). De plus, le Théorème 5.4.2 propose un résultat de convergence asymptotique pour le schéma (PS_{FWB}^ε) , dont la limite n'est pas

connue. Seule sa consistance avec l'équation de diffusion (6.3) est satisfaite. Cependant, la mise en évidence de la convergence peut tout de même être effectuée en comparant les approximations données par (PS_{FWB}^ε) avec les approximations de la limite de diffusion (6.3) données par (PS_{lim}) .

Pour illustrer numériquement la préservation de l'asymptotique, les deux conditions initiales suivantes, définies sur le domaine spatial $(-5, 5)$, sont considérées.

- Condition initiale discontinue :

$$\tau_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } u_0(x) = 0. \quad (6.10)$$

- Condition initiale continue :

$$\tau_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} \left(3 + \sin \left(\frac{3\pi x}{2} \right) \right) & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } u_0(x) = 0. \quad (6.11)$$

Les volumes spécifiques pour les conditions (6.10) et (6.11) sont illustrées sur la Figure 6.4.

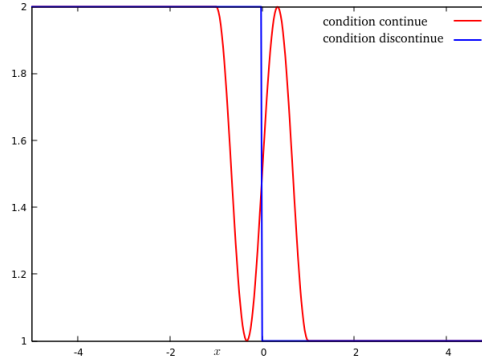


FIGURE 6.4: Volumes spécifiques des conditions initiales (6.10) et (6.11) pour $N = 400$.

À partir de maintenant, le temps final T est fixé à 0.3. Les conditions au bord utilisées pour le calcul des approximations par les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) sont de type flux nul et elles s'écrivent :

$$W_0^n = W_1^n \quad \text{et} \quad W_{N+1}^n = W_N^n. \quad (6.12)$$

Sur la Figure 6.5 est tracé le régime hyperbolique, obtenu à l'aide d'une discrétisation HLL du problème hyperbolique homogène, ainsi que le régime diffusif, obtenu avec le schéma (PS_{lim}) , pour chacune des deux conditions initiales (6.10) et (6.11). D'après les résultats théoriques de préservation d'asymptotique, les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε)

devraient donner des résultats similaires à la courbe rouge, le régime hyperbolique, quand ε est proche de 1, et à des résultats similaires à la bleue, le régime de diffusion, lorsque ε se rapproche de zéro.

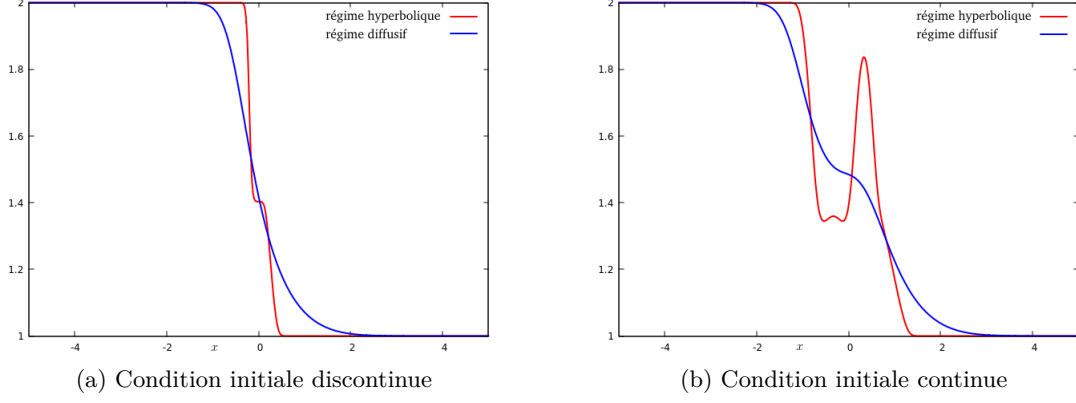


FIGURE 6.5: Volumes spécifiques des différents régimes pour $N = 400$.

Sur les Figures 6.6 et 6.7, une illustration de la convergence du schéma (PS_{AP}^ε) vers le schéma limite (PS_{lim}) est proposée pour chacune des conditions initiales (6.10) et (6.11). Les régimes hyperbolique et diffusif sont à chaque fois rappelés sur la figure de gauche tandis que sur la figure de droite sont tracées les volumes spécifiques obtenus par le schéma (PS_{AP}^ε) avec différentes valeurs de ε , le paramètre gouvernant le régime. Les graphiques analogues obtenus avec le schéma (PS_{FWB}^ε) ne sont pas présentés car ils sont quasiment identiques à ceux des Figures 6.6 et 6.7.

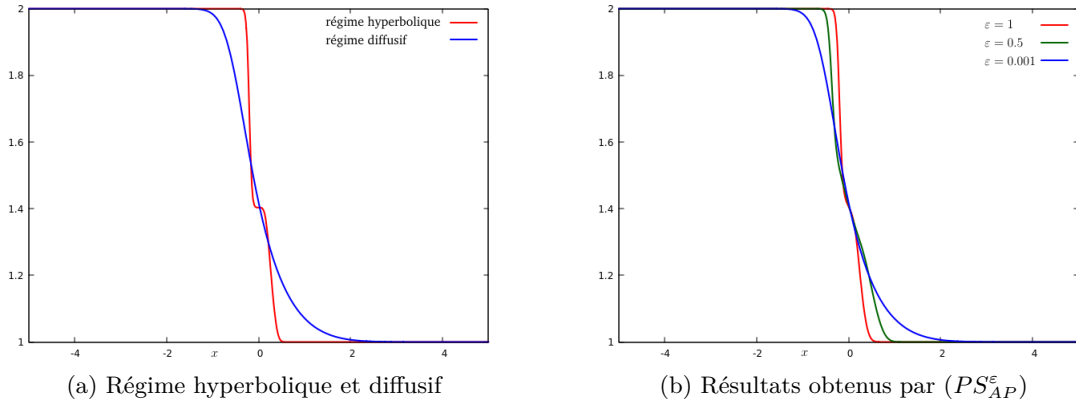
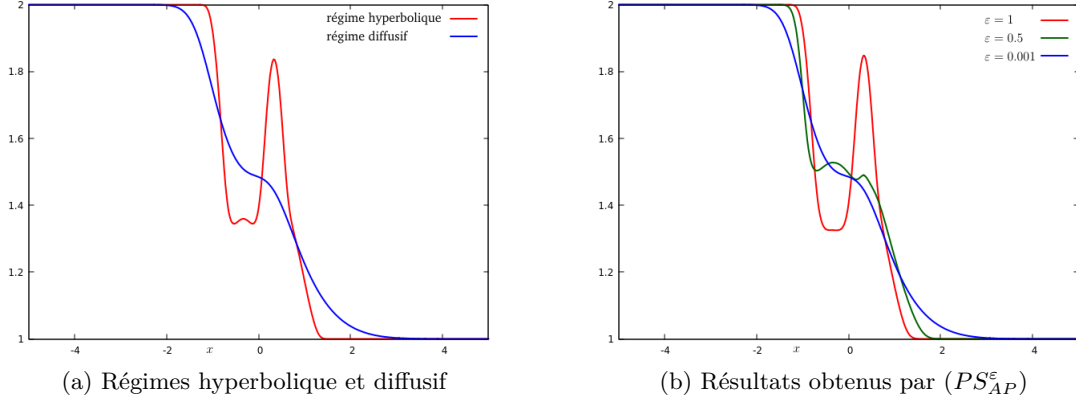


FIGURE 6.6: Volumes spécifiques pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.

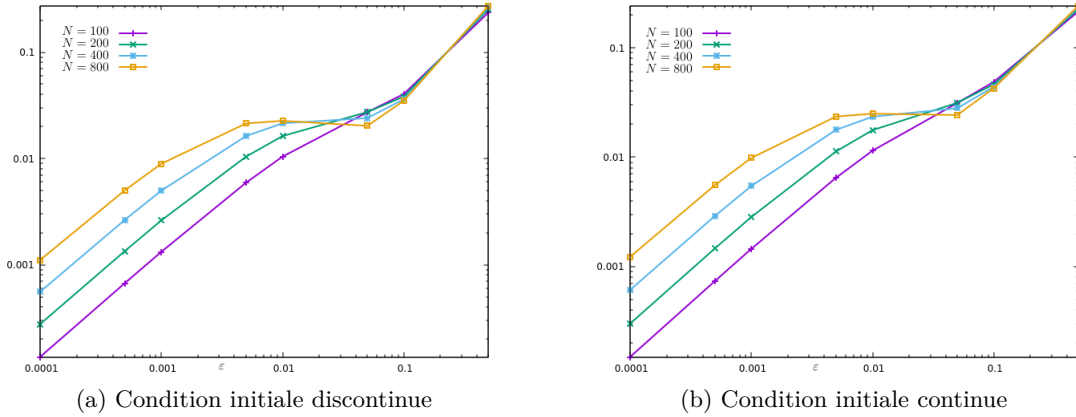
Les courbes d'erreur en fonction de ε pour les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) peuvent maintenant être tracées. Elles sont obtenues en considérant la norme L^2 discrète de la différence entre la discrétisation du volume spécifique issue du schéma (PS_{AP}^ε) ou (PS_{FWB}^ε) ,


 FIGURE 6.7: Volumes spécifiques pour $N = 400$ et la condition initiale continue.

notée $(\tau_i^n)_i$, et celle issue du schéma limite (PS_{lim}) , notée $(\bar{\tau}_i^n)_i$. Les erreurs sont donc calculées par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_N(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\tau_i^n - \bar{\tau}_i^n|^2 \Delta x}. \quad (6.13)$$

Sur la Figure 6.8 sont représentées, en échelle logarithmique, l'erreur calculée avec l'expression (6.13) des discrétisations du schéma (PS_{AP}^ε) en fonction de ε , pour chacune des deux conditions initiales (6.10) et (6.11). Pour ces deux conditions initiales, l'erreur


 FIGURE 6.8: Erreur calculée par (6.13) pour le schéma (PS_{AP}^ε) .

tend vers zéro. Un ressaut autour de $\varepsilon = 0.1$, d'autant plus important que le nombre de mailles est grand, est cependant observé. Une mise en cause d'une mauvaise approximation des états transitoires par le schéma (PS_{AP}^ε) peut être envisagée pour expliquer ce phénomène.

De la même façon, les courbes d'erreur en fonction de ε obtenues avec la formule (6.13) pour le schéma hyperbolique (PS_{FWB}^ε) comparé au schéma limite (PS_{lim}) sont représentées, toujours en échelle logarithmique, sur la Figure 6.9. Ces courbes d'erreur n'ont ab-

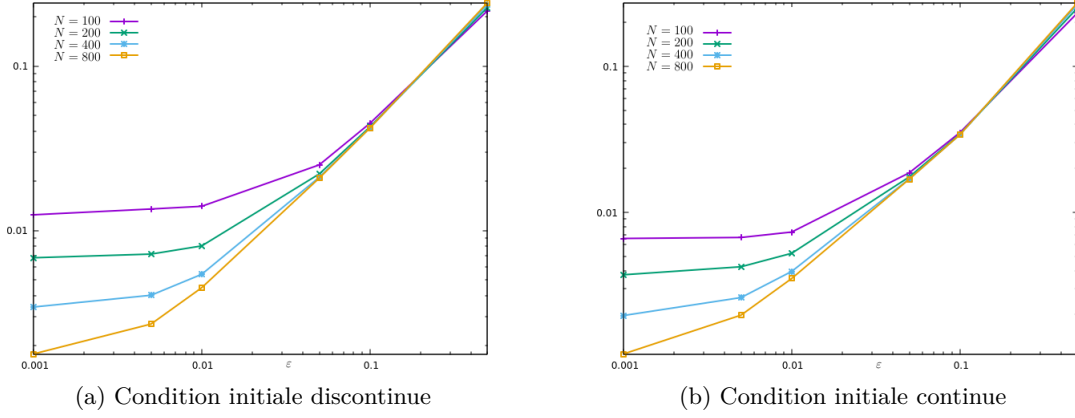


FIGURE 6.9: Erreur calculée par (6.13) pour le schéma (PS_{FWB}^ε).

solument pas la même allure que pour le schéma (PS_{AP}^ε) puisqu'elles semblent atteindre un palier de plus en plus faible que le nombre de mailles augmente. C'est un résultat prévisible puisqu'il est montré dans le Théorème 5.4.2 que, à la limite, le schéma (PS_{FWB}^ε) est consistant avec la limite diffusive (6.3). L'erreur entre cette limite et le schéma (PS_{lim}) est ainsi fonction de Δx et donc de plus en plus petite quand N augmente.

6.1.3 Ordre des schémas en espace

Une étude des ordres de convergence en espace des différents schémas est maintenant proposée. Pour ce faire, les discrétisations obtenues avec N mailles sont comparées avec celles obtenues avec $2N$ mailles. Il est alors nécessaire de distinguer les quantités discrètes provenant d'une discrétisation avec N mailles de celles provenant d'une discrétisation avec $2N$ mailles. Toutes les quantités pour lesquelles c'est nécessaire sont alors indicées par (N) ou $(2N)$. En particulier, les pas d'espace $\Delta x^{(N)}$ et $\Delta x^{(2N)}$ vérifient $\Delta x^{(N)} = 2\Delta x^{(2N)}$ et les centres des mailles $(x_i^{(N)})_{i=1,N}$ et $(x_i^{(2N)})_{i=1,2N}$ vérifient $x_i^{(N)} = x_{2i}^{(2N)}$. Le temps final T est toujours égal à 0.3.

Pour l'étude d'ordre du schéma limite (PS_{lim}), la discrétisation du volume spécifique obtenu avec N mailles est notée $(\bar{\tau}_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(\bar{\tau}_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. L'erreur $\mathcal{E}(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| \bar{\tau}_{2i}^{(2N),n} - \bar{\tau}_i^{(N),n} \right|^2 \Delta x^{(N)}}. \quad (6.14)$$

Cette formule d'erreur est adéquate car une approximation $(\bar{\tau}_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ d'ordre p en es-

pace vérifie l'égalité suivante :

$$\bar{\tau}_i^{N,n} = \bar{\tau}(x_i^{(N)}, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x^{(N)})^p), \quad (6.15)$$

où $\bar{\tau}(x_i, t^n)$ désigne la solution exacte au temps t^n en x_i . De la même façon pour la discrétisation avec $2N$ mailles, une erreur en espace d'ordre p s'écrit :

$$\bar{\tau}_{2i}^{2N,n} = \bar{\tau}(x_{2i}^{(2N)}, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x^{(2N)})^p). \quad (6.16)$$

En considérant la différence entre les expressions (6.15) et (6.16) et puisque $x_i^{(N)} = x_{2i}^{(2N)}$ et $\Delta x^{(2N)} = \Delta x^{(N)}/2$ alors :

$$\bar{\tau}_i^{N,n} - \bar{\tau}_{2i}^{2N,n} = \mathcal{O}((\Delta x^{(N)})^p) + \mathcal{O}((\Delta x^{(N)}/2)^p) = \mathcal{O}((\Delta x^{(N)})^p). \quad (6.17)$$

Ainsi si la discrétisation $(\bar{\tau}_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre p alors la quantité $e_i^{N,n} := \bar{\tau}_i^{N,n} - \bar{\tau}_{2i}^{2N,n}$ est de l'ordre de $\mathcal{O}((\Delta x^{(N)})^p)$ c'est à dire de l'ordre de N^{-p} . Cette méthode de calcul permet donc d'obtenir une estimation de l'erreur sans connaître l'expression de la solution exacte. Dans la suite, l'erreur donnée par (6.14) est tracée en fonction de N en échelle logarithmique. Les résultats attendu sont alors des droites dont la pente correspond à l'opposé de l'ordre p .

Concernant l'étude d'ordre des schémas hyperboliques (PS_{AP}^ε) et (PS_{FWB}^ε) , la discrétisation obtenue avec N mailles est notée $(W_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(W_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. Les composantes de ces vecteurs sont définies comme suit :

$$W_i^{(N),n} = {}^t \left((\tau_i^{(N),n}), (u_i^{(N),n}) \right).$$

L'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\left| \tau_{2i}^{(2N),n} - \tau_i^{(N),n} \right|^2 + \left| u_{2i}^{(2N),n} - u_i^{(N),n} \right|^2 \right) \Delta x^{(N)}}. \quad (6.18)$$

Sur la Figure 6.10, le comportement de l'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$, calculée avec la formule (6.18), des solutions approchées par le schéma (PS_{AP}^ε) pour différentes valeurs de ε est représenté. Ces erreurs sont tracées en échelle logarithmique. L'erreur pour l'approximation donnée par le schéma limite (PS_{lim}) , obtenue par la formule (6.14), est également représentée sur la Figure 6.10. La pente de cette droite est d'environ -1 pour chacune des conditions initiales (6.10) et (6.11). Le schéma limite est donc un schéma d'ordre 1 en espace. Ce résultat n'est pas surprenant puisque ce schéma n'est pas obtenu par une discrétisation classique de l'équation des milieux poreux qui serait d'ordre 2, mais par une discrétisation de la quantité $\partial_x(-p'(\tau)\partial_x\tau)/\sigma$. Concernant le schéma (PS_{AP}^ε) , avec la condition initiale discontinue (6.10), une convergence des tracés d'erreur, quand ε tend vers zéro, vers le tracé de l'erreur du schéma limite est observée. De plus, pour $\varepsilon = 1$, l'ordre du schéma est d'environ 0.6, ce qui est acceptable pour une condition initiale discontinue, puis, plus ε se rapproche de zéro et plus la courbe d'erreur se rapproche de celle

du schéma limite, d'ordre 1. En revanche, pour la condition initiale continue, un phénomène différent est observé, avec des courbes d'erreurs qui ne sont pas satisfaisantes en états transitoires (ε compris entre 10^{-1} et 10^{-3} ici). Pour $\varepsilon = 1$, un ordre d'environ 1 est obtenu, ce qui était attendu pour cette condition initiale régulière. Pour ε inférieur à 10^{-3} l'erreur semble converger vers zéro avec un ordre qui tend vers 1, comme le schéma limite (PS_{lim}).

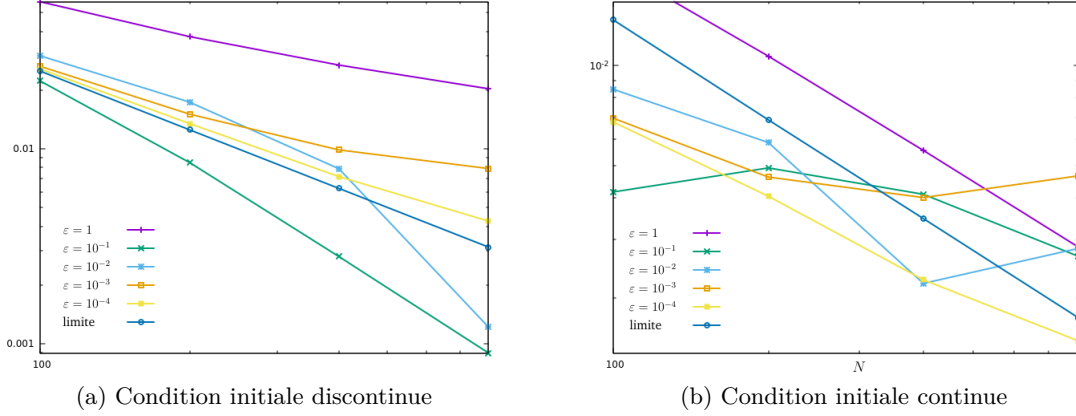
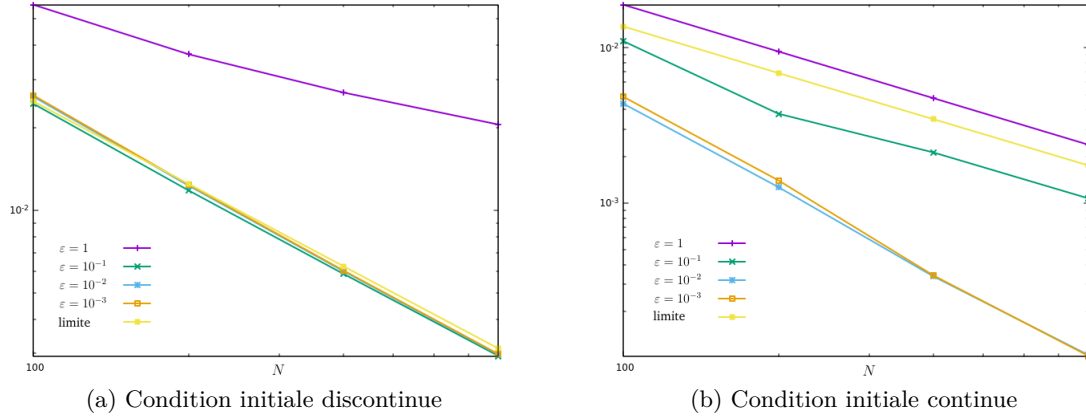


FIGURE 6.10: Erreurs calculées par (6.14) et (6.18) pour les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{lim}).

Sur la Figure 6.11, le comportement de l'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$, calculée avec la formule (6.18), des solutions approchées par le schéma (PS_{FWB}^ε) pour, toujours, différentes valeurs de ε est représenté. Ici encore, l'erreur pour le schéma limite (PS_{lim}) est tracée. Cette fois, la convergence des tracés vers cette courbe d'erreur n'est pas attendue puisque le schéma (PS_{lim}) n'est pas, a priori, la limite du schéma (PS_{FWB}^ε). Concernant les résultats avec la condition initiale discontinue (6.10), une convergence très rapide des tracés d'erreur vers le tracé limite, quand ε tend vers zéro, est toutefois observé. Pour $\varepsilon = 1$, l'ordre du schéma est d'environ 0.4, ce qui est encore une fois acceptable pour une condition initiale discontinue. Pour la condition initiale continue, les résultats sont satisfaisants pour ce schéma (PS_{FWB}^ε). En effet, il n'est pas observé, cette fois, de courbe d'erreur anormale en état transitoire. Pour $\varepsilon = 1$, une convergence en Δx est obtenue, donc d'ordre 1, ce qui est attendu. De plus, quand ε tend vers zéro, l'ordre de convergence tend vers 2, ce qui est mieux que l'ordre du schéma limite (PS_{lim}). Cela donne ainsi une première information sur la limite du schéma (PS_{FWB}^ε), inconnue.


 FIGURE 6.11: Erreurs calculées par (6.18) et (6.14) pour les schémas (PS_{FWB}^ε) et (PS_{lim}) .

6.2 Le modèle M1

Ce système, présenté dans le Chapitre 2, s'écrit de la manière suivante après changement d'échelle du temps et de σ par le paramètre ε :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E + \partial_x F = 0, \\ \varepsilon \partial_t F + \partial_x \left(c^2 E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) \right) = -\frac{c\sigma}{\varepsilon} F, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

Dans tous les résultats exposés dans la suite, le coefficient c , correspondant à la vitesse de la lumière adimensionnée, ainsi que le paramètre d'opacité σ , sont pris égaux à 1.

La limite de diffusion de ce problème, pour ε qui tend vers zéro, correspond à l'équation de la chaleur suivante :

$$\partial_t \bar{E} - \frac{c}{3\sigma} \partial_{xx} \bar{E} = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (6.20)$$

Les différents schémas pour le modèle M1 (6.19) proposés dans ces travaux sont tout d'abord rappelés. Le premier schéma est donné dans le Chapitre 4 par (4.39). Il s'écrit :

$$\begin{cases} E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{c \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n), \\ F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{c^2 \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{c \Delta t \alpha^\varepsilon}{2\varepsilon \Delta x} (F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n) - \frac{c\sigma \Delta t \alpha^\varepsilon}{\varepsilon^2} F_i^n, \end{cases} \quad (M1_{AP}^\varepsilon)$$

où $\phi_i^n = \chi(\frac{F_i^n}{cE_i^n})$. Le paramètre α^ε est défini par :

$$\alpha^\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + 3\sigma \Delta x}.$$

Le second schéma pour (6.19), introduit dans le Chapitre 5, est donné par (5.129) et est réécrit ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left(\frac{E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_i^n \phi_i^n}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} - \frac{E_i^n \phi_i^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1}^n}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\phi_{i-1}^n}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} (F_i^n - F_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{c\sigma\Delta t}{c\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n} \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n} \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ F_i^{n+1} = F_i^n + \frac{c\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c^2\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (E_{i+1}^n \phi_{i+1}^n - E_{i-1}^n \phi_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c\sigma\Delta t}{2\varepsilon^2} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n). \end{array} \right. \quad (M1_{FWB}^\varepsilon)$$

Les flux radiatifs aux interfaces $(\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n)_i$ sont définis par :

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \text{sign}(F_{i+1}^n + F_i^n) \sqrt{\frac{1}{2} \left((F_{i+1}^n)^2 + (F_i^n)^2 \right)}.$$

Ce schéma a été conçu de façon à préserver tous les états stationnaires et un résultat de préservation d'asymptotique est également proposé dans le Théorème 5.4.3.

6.2.1 Préservation des états stationnaires par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$

Avant de s'intéresser à la préservation de l'asymptotique par les deux schémas développés $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$, la préservation des états stationnaires par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ est vérifiée numériquement. Les tests proposés ici sont également effectués sur le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ même si celui-ci ne préserve, a priori, pas les états stationnaires. Il faut tout d'abord déterminer une condition initiale stationnaire, c'est-à-dire une solution $W = {}^t(E, F)$ du problème stationnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x F = 0, \\ \partial_x c E \chi \left(\frac{F}{cE} \right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

La condition initiale $W_0 = {}^t(E_0, F_0)$ suivante peut être proposée :

$$F_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad E_0(x) = \frac{-(3\frac{\sigma^2}{c^2\varepsilon^2}(x-10)^2 + 4)}{c(5\frac{\sigma}{c\varepsilon}(x-10) + 2\sqrt{4\frac{\sigma^2}{c^2\varepsilon^2}(x-10)^2 - 3})}, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (6.22)$$

Encore selon [69, 70], les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ sont également testés avec la condition initiale perturbée $\tilde{W}_0 = {}^t(\tilde{E}_0, \tilde{F}_0)$ obtenue à partir de W_0 comme suit :

$$\tilde{F}_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{E}_0 = E_0(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x \in (-0.1, 0.1)}, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (6.23)$$

L'allure des énergies radiatives données par (6.22) et (6.23) est représentée sur la Figure 6.12.

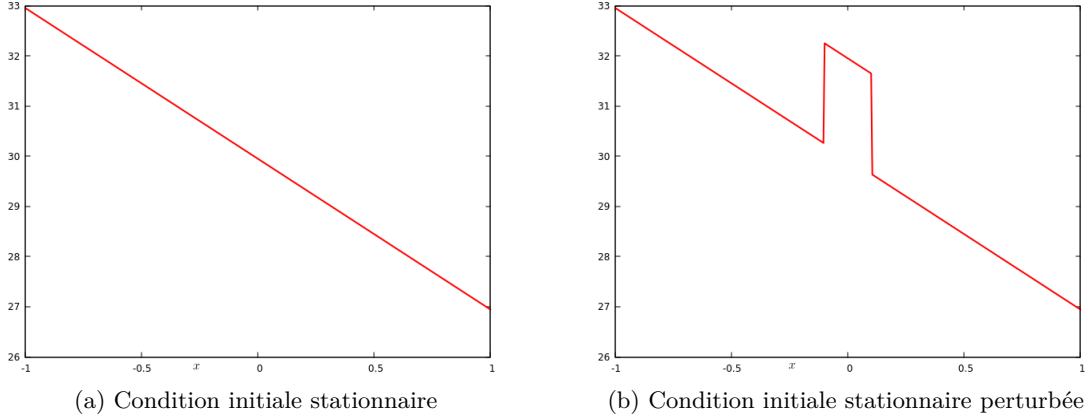


FIGURE 6.12: Énergies radiatives des conditions initiales pour $N = 400$.

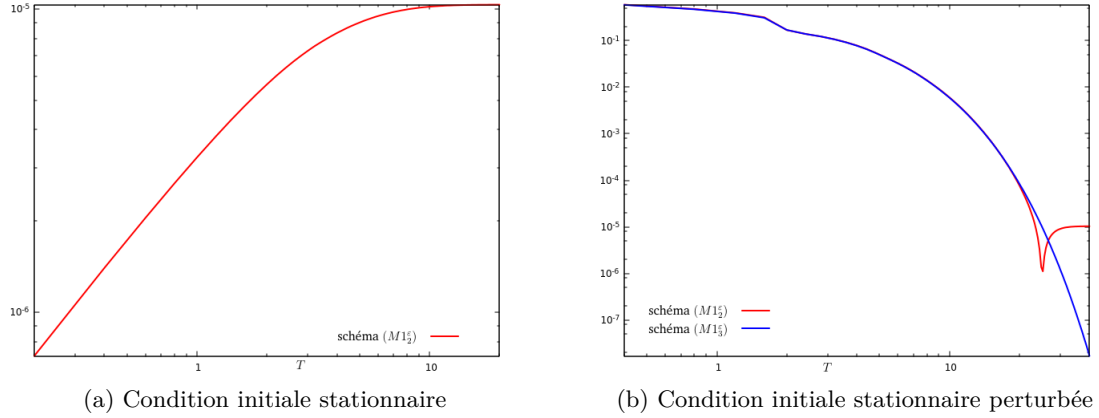
Par construction, le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ est censé préserver les états stationnaires. L'approximation obtenue avec la condition initiale W_0 donnée par (6.22) ne devrait donc pas être modifiée au cours du temps tandis que celle obtenue avec la condition initiale $\tilde{W}_0$ donnée par (6.23) devrait retourner à l'équilibre W_0 . En revanche, il n'y a pas de raison que le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ vérifie ces propriétés.

L'erreur entre l'approximation (W_i^n) , calculée au temps T par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ ou $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ avec N mailles, et la solution stationnaire W_0 donnée par (6.22), est calculée en norme L^2 à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{E}_N(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left((E_i^n - E_0(x_i))^2 + (F_i^n - F_0(x_i))^2 \right) \Delta x}. \quad (6.24)$$

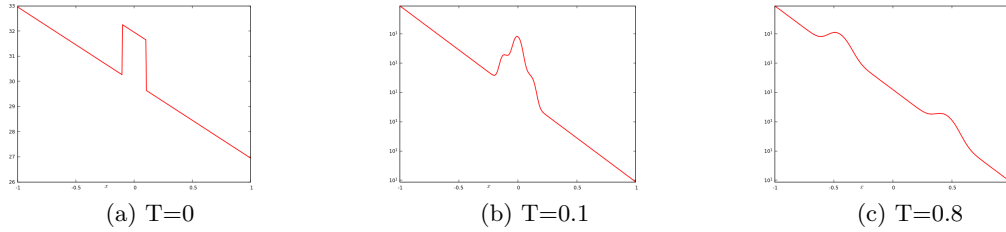
Sur la Figure 6.13, l'erreur en échelle logarithmique pour chacun des schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ et chacune des conditions initiales (6.22) et (6.23) est tracée en fonction du temps T . Les conditions au bord utilisées sont les conditions de Dirichlet non homogènes données par (6.9).

Les mêmes remarques que pour le p -système peuvent être faites ici. L'erreur pour le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ n'est pas tracée sur la Figure 6.13 (a) car elle reste égale au zéro machine en tout temps. Cela correspond au résultat attendu. En revanche, comme pour le p -système, les approximations données par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ s'écartent de l'état station-

FIGURE 6.13: Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

naire. Le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ ne préserve donc pas les états stationnaires, ce qui était prévisible.

Le comportement au cours du temps, tracé en échelle logarithmique, de l'erreur entre les discrétisations données par les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$, avec la condition initiale perturbée (6.23), et l'état stationnaire W_0 donné par (6.22) est représenté sur le graphe (b) de la Figure 6.13. Les approximations calculées par $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ retournent donc bien vers l'équilibre W_0 . L'élimination de la perturbation est représentée sur la Figure 6.14. En revanche, l'erreur pour les discrétisations données par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ se stabilise

FIGURE 6.14: Énergie radiative obtenue par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

à environ 10^{-5} . Les discrétisations ne retournent donc pas à l'état stationnaire W_0 . Cela met bien en évidence la préservation des états stationnaires par $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ mais pas par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$.

6.2.2 Préservation de l'asymptotique

À présent, la préservation de l'asymptotique par les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ est mise en évidence. En effet, il a été démontré dans le Théorème 4.4.2 que la discrétisation de l'énergie radiative donnée par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ converge vers celle issue du schéma

(4.42), qui discrétise l'équation de diffusion (6.20). Ce schéma limite est rappelé :

$$\bar{E}_i^{n+1} = \bar{E}_i^n + \frac{c\Delta t}{3\sigma\Delta x^2} (\bar{E}_{i+1}^n - 2\bar{E}_i^n + \bar{E}_{i-1}^n). \quad (M1_{lim})$$

De plus, le Théorème 5.4.3 propose un résultat de préservation de l'asymptotique par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$, dont la limite n'est pas connue. Seule sa consistance avec l'équation de diffusion (6.20) est satisfaite. Cependant, la mise en évidence de la convergence peut tout de même être effectuée en comparant les approximations données par $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ avec les approximations de la limite de diffusion (6.20) données par $(M1_{lim})$.

Afin d'illustrer numériquement cette propriété, les deux conditions initiales suivantes, définies sur le domaine spatial $(-5, 5)$ discrétisé en N mailles, sont considérées.

- Condition initiale discontinue :

$$E_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } F_0(x) = 0. \quad (6.25)$$

- Condition initiale continue :

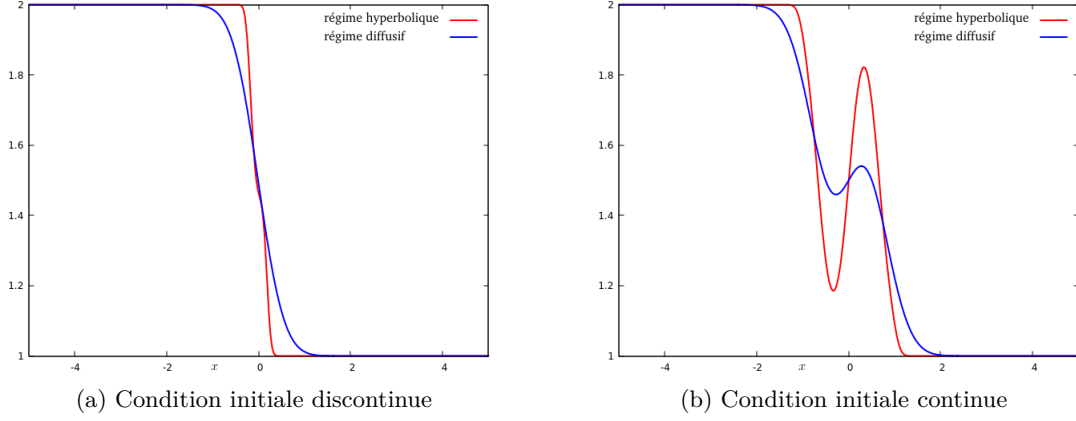
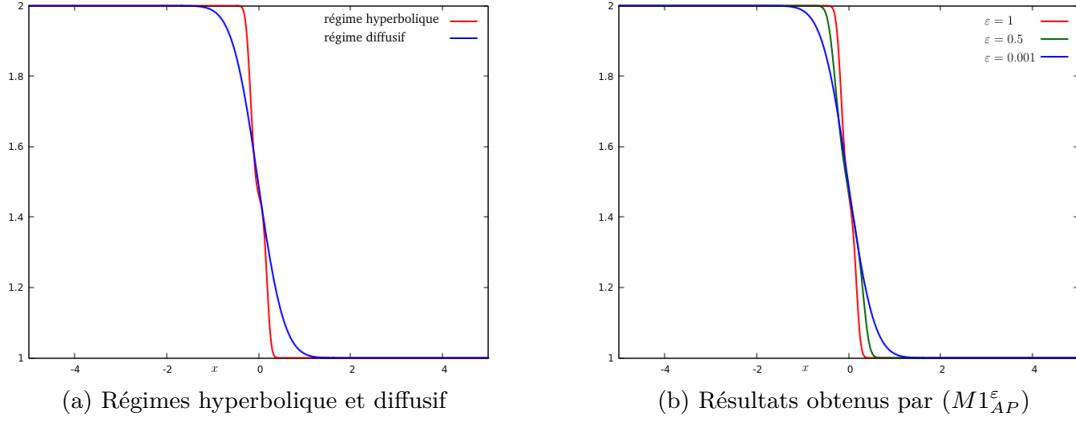
$$E_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} \left(3 + \sin \left(\frac{3\pi x}{2} \right) \right) & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } F_0(x) = 0. \quad (6.26)$$

Ce sont les mêmes conditions initiales que pour le p -système et elles sont représentées sur la Figure 6.4.

À partir de maintenant, le temps final T est fixé à 0.3. Ici encore les conditions de bord utilisées sont de flux nul (6.12). Le régime hyperbolique, obtenu à l'aide d'une discrétisation HLL du problème hyperbolique homogène, et le régime diffusif, obtenu avec le schéma $(M1_{lim})$, sont représentés sur la Figure 6.15. D'après les résultats théoriques de préservation de l'asymptotique, les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ devraient donner des résultats similaires à la courbe rouge, le régime hyperbolique, quand ε est proche de 1, et à des résultats similaires à la bleue, le régime de diffusion, lorsque ε se rapproche de zéro.

Sur les Figures 6.16 et 6.17, une illustration de la convergence du schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ vers le schéma limite $(M1_{lim})$ est proposée pour chacune des conditions initiales (6.25) et (6.26). Les régimes hyperbolique et diffusif sont à chaque fois rappelés sur la figure de gauche tandis que sur la figure de droite sont tracées les énergies radiatives obtenues par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ avec différentes valeurs de ε . Les graphiques analogues obtenus avec le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ ne sont pas présentés car ils sont quasiment identiques à ceux des Figures 6.16 et 6.17.

Sur la Figure 6.18 sont représentées, en échelle logarithmique, les courbes d'erreur en fonction de ε pour le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$. Elles sont obtenues en considérant la norme

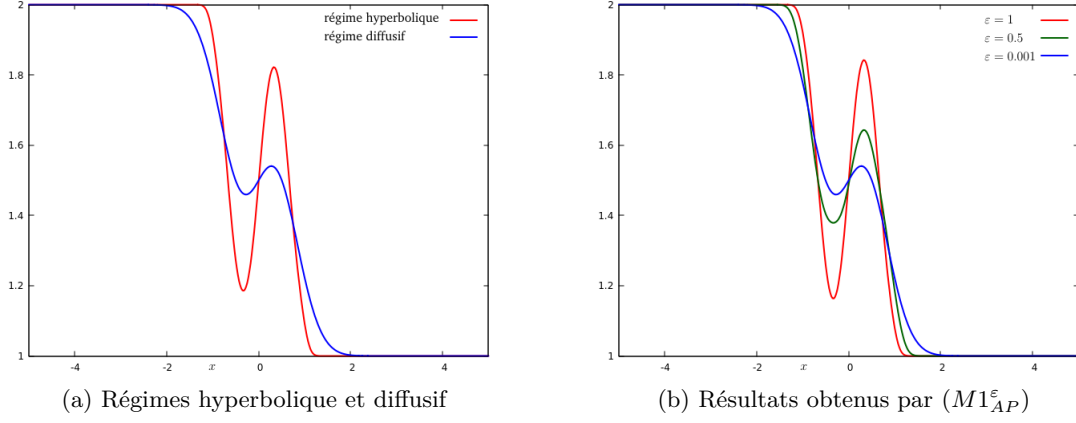
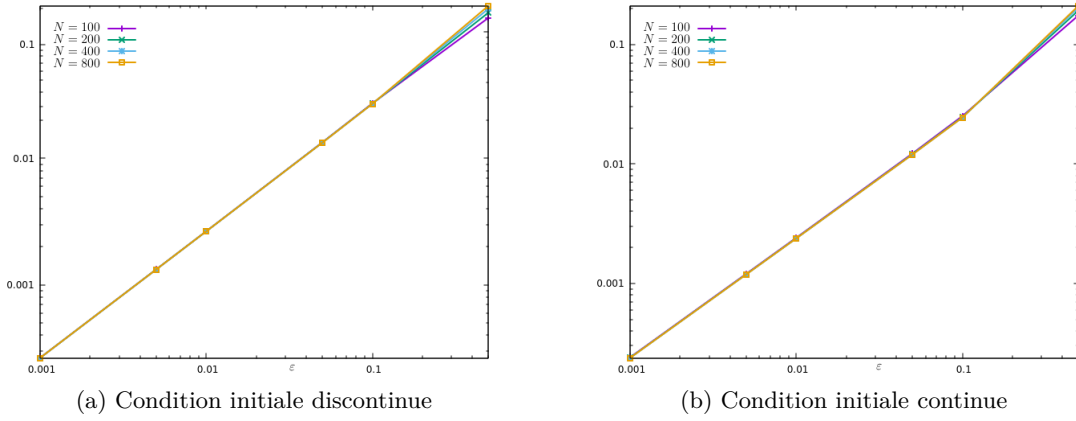
FIGURE 6.15: Énergies radiatives des différents régimes pour $N = 400$.FIGURE 6.16: Énergies radiatives pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.

L^2 discrète de la différence entre la discrétisation de l'énergie radiative issue du schéma $(M1^{\varepsilon}_{AP})$ ou $(M1^{\varepsilon}_{FWB})$, notée $(E^n_i)_i$, et celle issue du schéma limite $(M1_{lim})$, notée $(\bar{E}^n_i)_i$. Les erreurs sont donc calculées par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_N(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |E^n_i - \bar{E}^n_i|^2 \Delta x}. \quad (6.27)$$

Pour les deux conditions initiales considérées, l'erreur tend vers zéro. Cependant, contrairement au cas du p -système, aucun ressaut n'est observé et la convergence semble ne pas dépendre du nombre de mailles N ni de la condition initiale choisie.

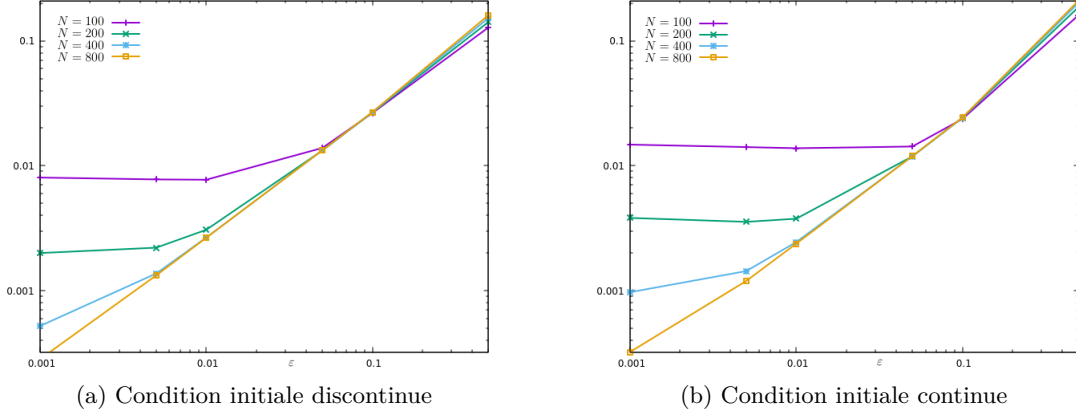
Sur la Figure 6.19 sont représentées, en échelle logarithmique, les courbes d'erreur en fonction de ε pour le schéma $(M1^{\varepsilon}_{FWB})$ comparé au schéma limite $(M1_{lim})$ (qui n'est pas la limite de $(M1^{\varepsilon}_{FWB})$). Elles sont obtenues par la même formule (6.27) avec $(E^n_i)_i$ la


 FIGURE 6.17: Énergies radiatives pour $N = 400$ et la condition initiale continue.

 FIGURE 6.18: Erreur calculée par (6.27) pour le schéma $(M1^{\varepsilon}_{AP})$.

discretisation de l'énergie radiative donnée par le schéma $(M1^{\varepsilon}_{FWB})$. Comme pour le p -système, une convergence puis un palier, d'autant plus bas que N est grand, sont observés. C'est un résultat prévisible puisqu'il est montré dans le Théorème 5.4.3 que, à la limite, le schéma $(M1^{\varepsilon}_{FWB})$ est consistant avec la limite diffusif (6.20). L'erreur entre cette limite et le schéma $(M1_{lim})$ diminue donc avec Δx .

6.2.3 Ordre des schémas en espace

Une étude des ordres de convergence en espace des différents schémas est maintenant proposée. Pour ce faire, les discrétisations obtenues avec N mailles sont comparées avec celles obtenues avec $2N$ mailles. Il est alors nécessaire de distinguer les quantités discrètes provenant d'une discrétisation avec N mailles de celles provenant d'une discrétisation avec $2N$ mailles. Toutes les quantités pour lesquelles c'est nécessaire sont alors indicées par (N) ou $(2N)$. En particulier, les pas d'espace $\Delta x^{(N)}$ et $\Delta x^{(2N)}$ vérifient $\Delta x^{(N)} = 2\Delta x^{(2N)}$ et les

FIGURE 6.19: Erreur calculée par (6.27) pour le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$.

centres des mailles $(x_i^{(N)})_{i=1,N}$ et $(x_i^{(2N)})_{i=1,2N}$ vérifient $x_i^{(N)} = x_{2i}^{(2N)}$. Le temps final T est toujours pris égal à 0.3.

Pour l'étude de l'ordre du schéma limite $(M1_{lim})$, la discrétisation de l'énergie radiative obtenue avec N mailles est notée $(\bar{E}_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(\bar{E}_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. L'erreur $\mathcal{E}(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\bar{E}_{2i}^{(2N),n} - \bar{E}_i^{(N),n}|^2 \Delta x^{(N)}}. \quad (6.28)$$

Concernant l'étude d'ordre des schémas hyperboliques $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{FWB}^\varepsilon)$, la discrétisation obtenue avec N mailles est notée $(W_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(W_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. Les composantes de ces vecteurs sont définies comme suit :

$$W_i^{(N),n} = {}^t \left((E_i^{(N),n}), (F_i^{(N),n}) \right).$$

L'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(|E_{2i}^{(2N),n} - E_i^{(N),n}|^2 + |F_{2i}^{(2N),n} - F_i^{(N),n}|^2 \right) \Delta x^{(N)}}. \quad (6.29)$$

Sur la Figure 6.20, le comportement de l'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$, calculée avec la formule (6.29), des solutions approchées par le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$ pour différentes valeurs de ε est représenté. Ces erreurs sont tracées en échelle logarithmique. L'erreur pour l'approximation donnée par le schéma limite $(M1_{lim})$, calculée avec la formule (6.28), est également représentée sur la Figure 6.20. La pente de cette droite est d'environ -1 pour la conditions initiale discontinue (6.25) et -2 pour la condition initiale continue (6.26). Ce schéma limite est donc d'ordre 2 en espace. C'est un résultat connu puisque ce schéma correspond à une

discrétisation aux différences finies classique d'une équation de la chaleur. Concernant le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$, avec la condition initiale discontinue (6.25), une convergence des tracés d'erreur vers le tracé de l'erreur limite, quand ε tend vers zéro, est observée. De plus, pour $\varepsilon = 1$, l'ordre du schéma est d'environ 0.3, ce qui est faible, mais acceptable pour une condition initiale discontinue. Puis, plus ε se rapproche de zéro et plus la courbe d'erreur se rapproche de celle du schéma limite, d'ordre 1. Pour la condition initiale continue, la convergence des courbes d'erreurs, d'ordre 1 pour $\varepsilon = 1$, vers l'erreur limite, d'ordre 2 est également observée. Ici, les états transitoires ne semblent pas avoir d'impact sur les erreurs.

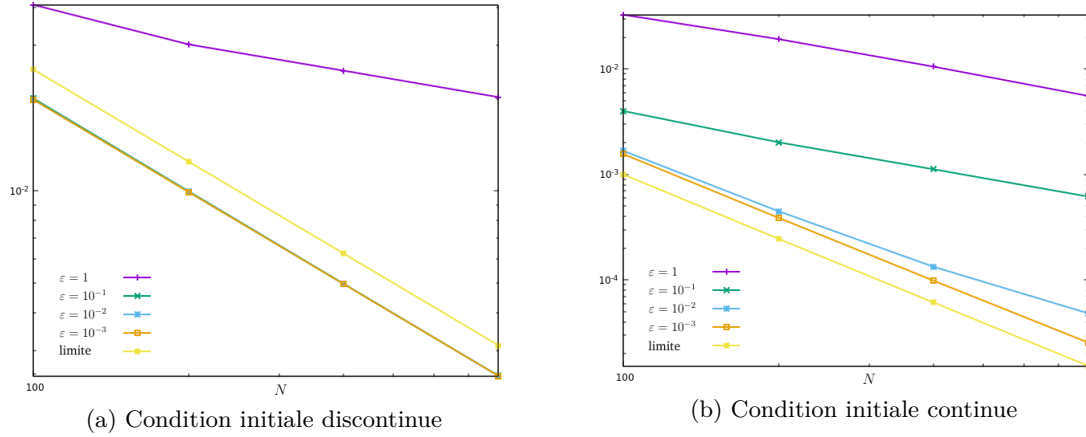
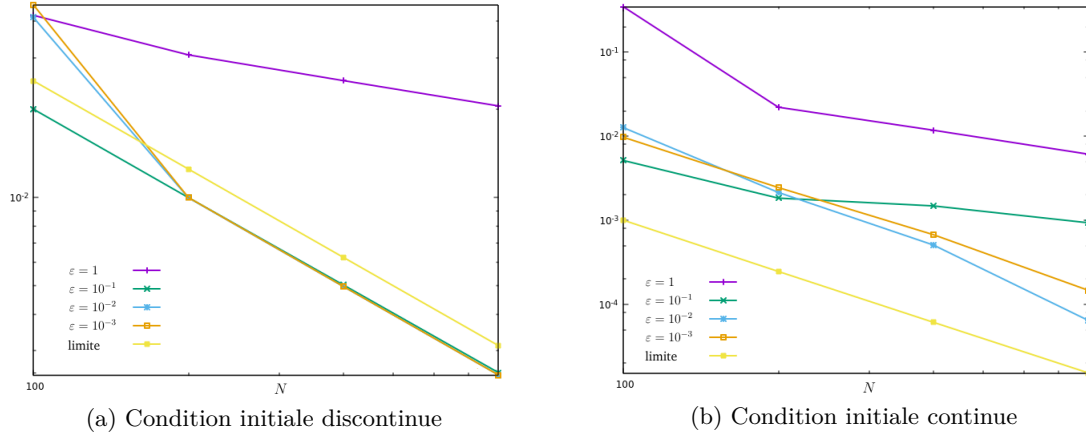


FIGURE 6.20: Erreurs calculées par (6.29) et (6.28) pour les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{lim})$.

Sur la Figure 6.21, le comportement de l'erreur, calculée avec la formule (6.29), des solutions approchées par le second schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ pour, toujours, différentes valeurs de ε est représenté. Ici encore, l'erreur pour le schéma limite $(M1_{lim})$ est tracée. Cette fois, la convergence des tracés vers cette courbe d'erreur n'est cette fois pas attendue puisque le schéma $(M1_{lim})$ n'est, a priori, pas la limite du schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$. Concernant les résultats avec la condition initiale discontinue (6.25), une convergence très rapide des tracés d'erreur vers le tracé limite, quand ε tend vers zéro, est toutefois observée. Pour $\varepsilon = 1$, l'ordre du schéma est d'environ 0.35, ce qui n'est pas très bon mais toutefois acceptable pour une condition initiale discontinue. Pour la condition initiale continue, les résultats sont moins satisfaisants que ceux dans le cas du p -système, tracés sur la Figure 6.11. En effet, même si la courbe d'erreur semble converger vers le tracé limite, d'ordre 2, la convergence est moins bonne (d'ordre 0.6 environ) pour $\varepsilon = 0.1$. Les états transitoires doivent encore une fois jouer un rôle dans ces erreurs.


 FIGURE 6.21: Erreurs calculées par (6.29) et (6.28) pour les schémas $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ et $(M1_{lim})$.

6.3 Les équations de Saint-Venant

Ce système hyperbolique, présenté dans le Chapitre 2, s'écrit de la manière suivante après changement d'échelle du temps et de la friction par le paramètre ε :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \varepsilon \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = -\frac{k}{\varepsilon^2} q |q| h^{-\eta}, \end{cases} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (6.30)$$

Le coefficient de friction k fixé égal à 1 dans la suite tandis que la gravité g est fixée à 9.81.

La limite de diffusion de ce modèle, pour ε qui tend vers zéro, correspond à l'équation très non linéaire suivante :

$$\partial_t \bar{h} + \partial_x \left(-\text{sign}(\partial_x \bar{h}) \sqrt{\frac{\bar{h}^\eta}{k} \left| \partial_x \left(\frac{g \bar{h}^2}{2} \right) \right|} \right) = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (6.31)$$

Les deux schémas explicites à comparer sont rappelés. Le premier, donné dans le Cha-

pitre 4, est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^n - q_i^n) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g}{2} (h_{i+1}^n)^2 - \frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} - \frac{g}{2} (h_i^n)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} + \frac{g}{2} (h_i^n)^2 - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} - \frac{g}{2} (h_{i-1}^n)^2 \right) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{k \Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^n |q_i^n| (h_i^n)^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (SV_{AP\varepsilon})$$

où les pentes utilisées $(\lambda_{i+\frac{1}{2}})_i$ sont données par :

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \max \left(\frac{|q_i^n|}{h_i^n} + \sqrt{gh_i^n}, \frac{|q_{i+1}^n|}{h_{i+1}^n} + \sqrt{gh_{i+1}^n} \right). \quad (6.32)$$

Le paramètre α^ε est défini comme suit :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon = \frac{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}\varepsilon}{2\lambda_{i+\frac{1}{2}}\varepsilon + \left(k + \bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta x},$$

où le coefficient $\bar{k}$, permettant au schéma $(SV_{AP\varepsilon})$ de préserver l'asymptotique, est donné par :

$$\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} = 2\lambda_{i+\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{\frac{|h_{i+1}^n - h_i^n|}{\left((h_{i+1}^n)^\eta + (h_i^n)^\eta \right) \Delta x (h_{i+1}^n + h_i^n)}} - k.$$

Le second schéma, conçu pour préserver tous les états stationnaires de (6.30), est donné

par (5.69) dans le Chapitre 5 et il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^n - h_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^n - h_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) \\ \quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n |\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n| \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{-1} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \overline{q_{i-\frac{1}{2}}}^n |\overline{q_{i-\frac{1}{2}}}^n| \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{-1} \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) \right) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\frac{(q_{i+1}^n)^2}{h_{i+1}^n} + \frac{g(h_{i+1}^n)^2}{2} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} - \frac{g(h_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n |\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n| \overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n + \overline{q_{i-\frac{1}{2}}}^n |\overline{q_{i-\frac{1}{2}}}^n| \overline{h_{i-\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n \right), \end{array} \right. \quad (SV_{FWB}^\varepsilon)$$

où les pentes $(\lambda_{i+\frac{1}{2}})_i$ sont données par (6.32). Les débits aux interfaces $\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n$ sont définis par :

$$\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n = \text{sign}(q_{i+1}^n + q_i^n) \sqrt{\frac{1}{2} \left((q_{i+1}^n)^2 + (q_i^n)^2 \right)},$$

tandis que les hauteurs d'eau aux interfaces $\overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n$ s'écrivent :

$$\overline{h_{i+\frac{1}{2}}^{-\eta}}^n = \frac{((h_{i+1}^n)^2 - (h_i^n)^2)(\eta + 2)}{2((h_{i+1}^n)^{\eta+2} - (h_i^n)^{\eta+2})} - \frac{\varepsilon^2}{k\Delta x} \text{sign}\left(\overline{q_{i+\frac{1}{2}}}^n\right) \left(\frac{1}{h_{i+1}^n} - \frac{1}{h_i^n} + \frac{((h_{i+1}^n)^2 - (h_i^n)^2)(\eta + 2)((h_{i+1}^n)^{\eta-1} - (h_i^n)^{\eta-1})}{2((h_{i+1}^n)^{\eta+2} - (h_i^n)^{\eta+2})(\eta - 1)} \right).$$

Le dernier schéma pour les équations de Saint-Venant (6.30) est donné dans le Chapitre 4 par (4.91). Il est maintenant rappelé et des explications sur son implémentation sont proposées.

6.3.1 Implication du schéma ($SV_{AP\varepsilon}$)

Quelques détails concernant l'implication du schéma ($SV_{AP\varepsilon}$) sont maintenant donnés. Son expression, donnée dans le Chapitre 4 par (4.91), est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}) \right), \\ q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \lambda_{i-\frac{1}{2}} (q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) \right) \\ \quad - \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^\varepsilon \right) q_i^{n+1} |q_i^{n+1}| (h_i^{n+1})^{-\eta}, \end{array} \right. \quad (SV_{AP}^\varepsilon \text{ imp})$$

où les pentes $\lambda_{i+\frac{1}{2}}$ sont définies explicitement par (6.32). Le paramètre α^ε est donné par :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^\varepsilon = \alpha^\varepsilon(h_i^{n+1}, h_{i+1}^{n+1}),$$

avec

$$\alpha^\varepsilon(h_L, h_R) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \lambda \sqrt{\frac{k}{g} \sqrt{\frac{|h_R - h_L| \Delta x}{(h_R^\eta + h_L^\eta)(h_R + h_L)}}}},$$

et où les pentes λ sont toujours les pentes explicites (6.32).

Le schéma limite, consistant avec la limite diffusive des équations de Saint-Venant (6.31), est donné par (4.90) et s'écrit :

$$\bar{h}_i^{n+1} = \bar{h}_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} \left(f(\bar{h}_i^{n+1}, \bar{h}_{i+1}^{n+1}) - f(\bar{h}_{i-1}^{n+1}, \bar{h}_i^{n+1}) \right), \quad (SV_{lim}^{imp})$$

où la fonction f est définie par :

$$f(h_L, h_R) = \text{sign}(h_R - h_L) \sqrt{(h_R^\eta + h_L^\eta) \left| \frac{h_R^2 - h_L^2}{\Delta x} \right|}. \quad (6.33)$$

Quelques précisions sur l'implémentation de ce schéma limite sont d'abord proposées. En posant $\bar{h}^n = {}^t(\bar{h}_1^n, \dots, \bar{h}_N^n) \in \mathbb{R}^N$, alors le vecteur $\bar{h}^{n+1}$ est obtenu en résolvant le système non linéaire suivant :

$$G^n(h^{n+1}) = 0,$$

avec $G^n(u) = {}^t(G_1^n(u), \dots, G_N^n(u)) \in \mathbb{R}^N$. Les fonctions scalaires G_i^n , dépendantes de $\bar{h}^n$, sont définies comme suit pour $i \in \{2, \dots, N-1\}$:

$$G_i^n(u) = u_i - \bar{h}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} (f(u_i, u_{i+1}) - f(u_{i-1}, u_i)).$$

En utilisant les conditions de flux nul au bord (6.12), G_1^n et G_N^n sont définies de la façon suivante :

$$G_1^n(u) = u_1 - \bar{h}_1^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} f(u_1, u_2),$$

$$\text{et } G_N^n(u) = u_N - \bar{h}_N^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} f(u_{N-1}, u_N).$$

La méthode de Newton pour rechercher un zéro de la fonction ci-dessus s'écrit :

$$\begin{cases} u^0 = \bar{h}^n, \\ \nabla G^n(u^k) (u^{k+1} - u^k) = -G^n(u^k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\nabla G^n(u)$ désigne la jacobienne de la fonction G en u . L'élément de cette matrice à la ligne i et à la colonne j correspond à $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(u)$. Cependant l'application f , intervenant dans F , n'est pas différentiable sur l'ensemble

$$\{(h_L, h_R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, h_R = h_L\},$$

c'est-à-dire en hauteur d'eau constante. Une méthode pour pallier à ce défaut a été proposée dans [79] pour le p -laplacien avec $p < 2$. L'auteur propose d'effectuer une troncature à l'aide d'un paramètre $C \gg 1$. Cela donne dans le cas présent :

$$\begin{aligned} \partial_{h_L} f(h_L, h_R) &= \max \left(\frac{\eta h_L^{\eta-1} (h_R^2 - h_L^2) - 2h_L (h_R^\eta + h_L^\eta)}{2\sqrt{\Delta x} (h_R^\eta + h_L^\eta) |h_R^2 - h_L^2|}, -C \right), \\ \partial_{h_R} f(h_L, h_R) &= \min \left(\frac{\eta h_R^{\eta-1} (h_R^2 - h_L^2) + 2h_R (h_R^\eta + h_L^\eta)}{2\sqrt{\Delta x} (h_R^\eta + h_L^\eta) |h_R^2 - h_L^2|}, C \right). \end{aligned}$$

Une autre technique consiste à utiliser une méthode de la sécante pour approcher les dérivées partielles de G^n , à l'aide d'un coefficient $\delta \ll 1$:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} G_i(u) \simeq \frac{G_i(u_1, \dots, u_j + \delta, \dots, u_N) - G_i(u)}{\delta}, \quad (6.34)$$

puis d'itérer de la façon modifiée suivante par l'ajout d'un facteur $1/2$:

$$\begin{cases} u^0 = h^n, \\ \nabla G^n(u^k) (u^{k+1} - u^k) = -\frac{1}{2} G^n(u^k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.35)$$

Ce facteur s'explique par le fait que la non différentiabilité de la fonction G^n est due à la présence de la fonction racine carrée dans f . Celle-ci n'est pas différentiable en zéro mais y est, en revanche, $\frac{1}{2}$ -höldérienne. La proposition suivante concerne justement l'algorithme de Newton modifié pour les fonctions hölderiennes à une variable réelle.

Proposition 6.3.1. *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\})$ avec $\bar{x} \in \mathbb{R}$ l'unique zéro de f telle que f est*

$\frac{1}{\alpha}$ -höldérienne, $\alpha > 1$, c'est-à-dire que la fonction $\varphi := f^\alpha$ appartient à l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$. Alors s'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que la fonction φ vérifie :

$$|\varphi'(x)| > m \quad \text{et} \quad |\varphi''(x)| < M, \quad (6.36)$$

pour tout x dans un voisinage V de $\bar{x}$, alors la suite définie par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\alpha} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \mathbf{1}_{x_k \neq \bar{x}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.37)$$

converge vers $\bar{x}$ pour tout $x_0 \in V \setminus \{\bar{x}\}$.

Démonstration. Il suffit d'observer que, sous les conditions (6.36), la méthode de Newton définie pour la fonction φ converge vers $\bar{x}$ pour x_0 dans un voisinage de $\bar{x}$ et que cet algorithme est strictement identique à (6.37) tant que $\bar{x}$ n'est pas atteint. En effet, sous les hypothèses (6.36), la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in V, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (6.38)$$

converge vers $\bar{x}$ au moins pour $V \subset [\bar{x} - \frac{m}{M}, \bar{x} + \frac{m}{M}]$. De plus, si $x_k \neq \bar{x}$ alors :

$$\varphi'(x_k) = \alpha f(x_k)^{\alpha-1} f'(x_k),$$

et l'itéré x_{k+1} donné par (6.38) est bien défini par (6.37). $\square$

L'algorithme (6.35) nécessite l'inversion d'une matrice tridiagonale. L'utilisation d'une méthode de décomposition LU adaptée à ce type de matrice, qui permet de gagner en temps de calcul, peut être proposée. Soit $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale d'éléments $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$. Alors sa décomposition LU est donnée par les matrices $L, U \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ définies comme suit, pour tout $i, j = 1, \dots, N$:

$$l_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ \frac{a_{i,i-1}}{\alpha_{i-1}} & \text{si } j = i - 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i, \\ a_{i,i+1} & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.39)$$

où la suite α_k est définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{1,1}, \\ \alpha_k = a_{k,k} - \frac{a_{k-1,k} a_{k,k-1}}{\alpha_{k-1}}, \quad \forall k = 2, \dots, N. \end{cases}$$

Il faut toutefois mentionner que, pour que la jacobienne approchée soit inversible, une restriction sur le pas de temps est nécessaire. En effet, il suffit qu'elle soit à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire, que l'expression suivante soit vérifiée pour tout $i =$

$1, \dots, N :$

$$\begin{aligned} & \left| \delta - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} (f(u_i + \delta, u_{i+1}) - f(u_i, u_{i+1}) - f(u_{i-1}, u_i + \delta) + f(u_{i-1}, u_i)) \right| \\ & \geq \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} (|f(u_i, u_{i+1} + \delta) - f(u_i, u_{i+1})| + |f(u_{i-1} + \delta, u_i) - f(u_{i-1}, u_i)|). \end{aligned}$$

En pratique, cette condition est bien moins restrictive que celle nécessaire à l'utilisation du schéma limite explicite. Pour l'implémenter, un pas de temps adaptatif est utilisé. Il fonctionne de la façon suivante. Le pas de temps de départ est fixé de manière arbitraire (en pratique, une condition CFL hyperbolique est utilisée) puis l'algorithme de Newton (6.35) est utilisé. L'algorithme s'arrête dès que le critère d'arrêt est atteint ou alors s'il dépasse un certain nombre d'itérations. Si c'est ce second critère qui a forcé l'arrêt de l'algorithme, le pas de temps est divisé par 10 et la procédure est réeffectuée.

Concernant l'implémentation du schéma $(SV_{AP}^{\varepsilon} \text{ imp})$, le système non linéaire à résoudre est le suivant :

$$H^n(u^{n+1}) = 0, \quad (6.40)$$

avec $u^{n+1} = {}^t(h_1^{n+1}, \dots, h_N^{n+1}, q_1^{n+1}, \dots, q_N^{n+1}) \in \mathbb{R}^{2N}$ et

$H^n(u) = {}^t(H_1^{1,n}(u), \dots, H_N^{1,n}(u), H_1^{2,n}(u), H_N^{2,n}(u)) \in \mathbb{R}^{2N}$ où les $H_i^{k,n}$, dépendants de $(h_i^n)_i$ et $(q_i^n)_i$, sont définis comme suit pour $i \in \{2, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} H_i^{1,n}(u) = & u_i - h_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (\alpha^\varepsilon(u_i, u_{i+1})(u_{i+N+2} - u_{i+N+1}) \\ & + \alpha^\varepsilon(u_{i-1}, u_i)(u_{i+N+1} - u_{i+N})) \\ & - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha^\varepsilon(u_i, u_{i+1})\lambda_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) \right. \\ & \left. - \alpha^\varepsilon(u_{i-1}, u_i)\lambda_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_i^{2,n}(u) = & u_{i+N+1} - q_i^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} (\alpha^\varepsilon(u_i, u_{i+1})(u_{i+1} - u_i) \\ & + \alpha^\varepsilon(u_{i-1}, u_i)(u_i - u_{i-1})) \\ & - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left(\alpha^\varepsilon(u_i, u_{i+1})\lambda_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+N+2} - u_{i+N+1}) \right. \\ & \left. - \alpha^\varepsilon(u_{i-1}, u_i)\lambda_{i-\frac{1}{2}}(u_{i+N+1} - u_{i+N}) \right) \\ & + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} (\alpha^\varepsilon(u_i, u_{i+1}) + \alpha^\varepsilon(u_{i-1}, u_i)) u_{i+N+1} |u_{i+N+1}| u_i^{-\eta}. \end{aligned}$$

Les termes de bord, toujours calculés avec les conditions de flux nul (6.12), s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_1^{1,n}(u) &= u_1 - h_1^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_1, u_2) (u_{N+2} - u_{N+1}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_1, u_2) \lambda_{\frac{1}{2}} (u_2 - u_1), \\ H_N^{1,n}(u) &= u_N - h_N^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_{N-1}, u_N) (u_{2N} - u_{2N-1}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_{N-1}, u_N) \lambda_{N-\frac{1}{2}} (u_N - u_{N-1}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_1^{2,n}(u) &= u_N - q_1^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_1, u_2) (u_2 - u_1) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_1, u_2) \lambda_{i+\frac{1}{2}} (u_{N+2} - u_{N+1}) \\ &\quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} (\alpha^\varepsilon(u_1, u_2) + 1) u_{N+1} |u_{N+1}| u_1^{-\eta}, \\ H_N^{2,n}(u) &= u_{2N} - q_N^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_{N-1}, u_N) (u_N - u_{N-1}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \alpha^\varepsilon(u_{N-1}, u_N) \lambda_{N-\frac{1}{2}} (u_{2N} - u_{2N-1}) \\ &\quad + \frac{k\Delta t}{2\varepsilon^3} (1 + \alpha^\varepsilon(u_{N-1}, u_N)) u_{2N} |u_{2N}| u_N^{-\eta}. \end{aligned}$$

Les pentes $(\lambda_{i\pm\frac{1}{2}})_i$ sont explicites et dépendent de $({}^t(h_i^n, q_i^n))_i$. L'algorithme de Newton pour approcher la solution de (6.40) s'écrit :

$$\begin{cases} u^0 = h^n, \\ \nabla H^n(u^k) (u^{k+1} - u^k) = -H^n(u^k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour la même raison de non différentiabilité de H^n en hauteur d'eau constante que pour l'implication du schéma limite, l'alternative suivante est préférée :

$$\begin{cases} u^0 = h^n, \\ \nabla H^n(u^k) (u^{k+1} - u^k) = -\frac{1}{2} H^n(u^k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec une approximation des dérivées partielles de la forme (6.34). La jacobienne ∇H^n est alors approchée par une matrice $M \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$ tridiagonale par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) \text{ tridiagonales.}$$

Le système linéaire $Mx = b$, avec $x, b \in \mathbb{R}^{2N}$ se réécrit alors :

$$\begin{cases} M_1 x_1 + M_2 x_2 = b_1, \\ M_3 x_1 + M_4 x_2 = b_2, \end{cases} \quad (6.41)$$

où $x_1, x_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x = {}^t(x_1, x_2)$ et $b = {}^t(b_1, b_2)$. La matrice M_4 peut être supposée inversible, ce qui est raisonnable sous condition sur Δt . En effet, comme pour la matrice intervenant dans le schéma limite, M_4 est à diagonale strictement dominante sous une condition de petitesse sur Δt (dépendante de ε malheureusement). Le système (6.41) se réécrit alors comme suit :

$$\begin{cases} (M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3) x_1 = b_1 - M_2 M_4^{-1} b_2, \\ x_2 = M_4^{-1} (b_2 - M_3 x_1), \end{cases}$$

Il suffit alors d'utiliser une décomposition LU ou un algorithme itératif pour inverser la matrice $M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3$, qui est de taille $N \times N$ et non $2N \times 2N$ comme l'est M . Concernant l'inversion de M_4 , sa tridiagonalité permet d'utiliser la décomposition donnée par (6.39).

Cette méthode de Newton converge assez rapidement mais, malgré un gain de temps de calcul, elle reste très lourde. C'est pourquoi dans les résultats qui suivent, une méthode de point fixe est utilisée sur la fonction $\tilde{H}^n(u) = u - H^n(u)$. Les résultats obtenus par cette méthode sont pratiquement identiques à ceux issus de la méthode de Newton.

6.3.2 Préservation des états stationnaires par le schéma (SV_{FWB}^ε)

Avant de s'intéresser à la préservation de l'asymptotique par les schémas (SV_{AP}^ε) , $(SV_{AP}^\varepsilon \text{ imp})$ et (SV_{FWB}^ε) , la préservation des états stationnaires par le schéma (SV_{FWB}^ε) est illustrée graphiquement. Les tests proposés ici sont également effectués sur le schéma (SV_{AP}^ε) même si celui-ci ne préserve, a priori, pas les états stationnaires. Il faut tout d'abord déterminer une condition initiale stationnaire, c'est-à-dire une solution $W = {}^t(h, q)$ du problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_x q = 0, \\ \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = -\frac{k}{\varepsilon^2} q |q| h^{-\eta}. \end{cases} \quad (6.42)$$

Le débit d'eau q est nécessairement constant et est noté q_0 . Concernant la hauteur d'eau, la recherche d'une solution stationnaire assez régulière est proposée. Ainsi, la seconde équation de (6.42) peut se réécrire comme suit :

$$-\frac{q_0^2}{\eta - 1} \partial_x h^{\eta-1} + \frac{g}{\eta + 2} \partial_x h^{\eta+2} = -\frac{k}{\varepsilon^2} q_0 |q_0|.$$

Après intégration de l'équation ci-dessus entre x_0 et x , la hauteur d'eau h est alors telle que :

$$-\frac{q_0^2}{\eta-1} \left(h^{\eta-1} - h_0^{\eta-1} \right) + \frac{g}{\eta+2} \left(h^{\eta+2} - h_0^{\eta+2} \right) = -\frac{k}{\varepsilon^2} q_0 |q_0| (x - x_0),$$

où h_0 désigne l'évaluation de h en x_0 . La fonction ξ est alors définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \xi(h; x, h_0, q_0, x_0) = & -\frac{q_0^2}{\eta-1} \left(h^{\eta-1} - h_0^{\eta-1} \right) + \frac{g}{\eta+2} \left(h^{\eta+2} - h_0^{\eta+2} \right) \\ & + \frac{k}{\varepsilon^2} q_0 |q_0| (x - x_0), \end{aligned}$$

Une étude de cette fonction est proposée dans [70] où les auteurs ont démontré l'existence de zéro, une ou deux solutions à l'équation

$$\xi(h; x, h_0, q_0, x_0) = 0, \quad (6.43)$$

selon les valeurs de x , h_0 , q_0 et x_0 . Considérons le cas où (6.43) admet deux solutions. La plus grande de ces solutions, appelée solution subcritique, est approchée à l'aide d'un algorithme de Newton sur la fonction ξ . Le domaine spatial considéré, $(0.75, 0.9)$, est subdivisé en $N = 400$ mailles de taille constante Δx . Soit $h_0 = 0.25$, $q_0 = -\sqrt{g}/8$ et $x_0 = 0.75 - \Delta x$. La solution stationnaire est approchée avec une précision de 10^{-20} par la méthode de Newton. Cette condition initiale, notée $W_0 = {}^t(h_0, q_0)$, est représentée sur le graphe (a) de la Figure 6.22. Sur le graphe (b) est tracée la hauteur d'eau perturbée $\tilde{h}_0$ donnée par la condition initiale $\tilde{W}_0 = {}^t(\tilde{h}_0, \tilde{q}_0)$ suivante :

$$\tilde{q}_0(x) = q_0(x) \quad \text{et} \quad \tilde{h}_0(x) = h_0(x) - 0.03 \mathbf{1}_{0.81 < x < 0.85}. \quad (6.44)$$

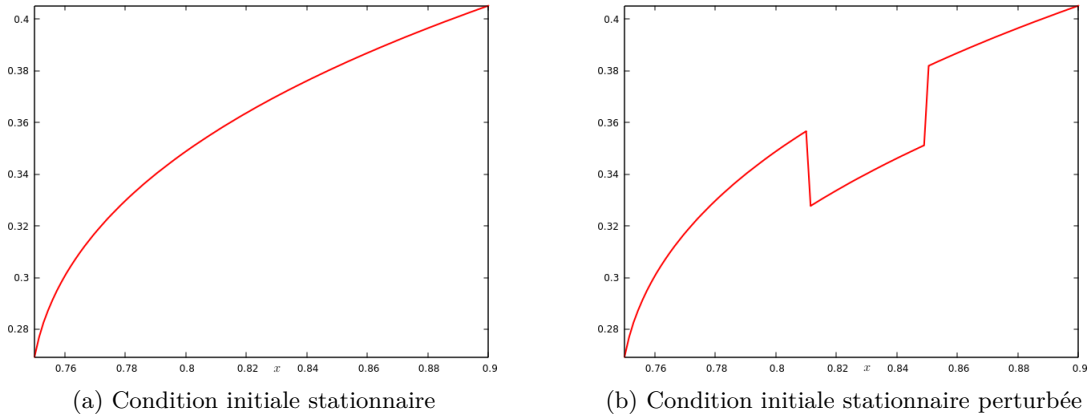


FIGURE 6.22: Hauteurs d'eau des conditions initiales pour $N = 400$.

Par construction, le schéma (SV_{FWB}^ε) est censé préserver les états stationnaires. L'approximation obtenue avec la condition initiale W_0 ne devrait donc pas être modifiée au

cours du temps et, selon [70], celle obtenue avec la condition initiale $\widetilde{W}_0$ devrait retourner à l'équilibre W_0 . En revanche, ici encore, ce comportement n'est pas attendu pour le schéma $(SV_{AP\varepsilon})$.

L'erreur entre l'approximation (W_i^n) , calculée au temps T par le schéma $(SV_{AP\varepsilon})$ ou (SV_{FWB}^ε) avec N mailles, et la solution stationnaire W_0 , est calculée en norme L^2 à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{E}_N(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left((h_i^n - h_0(x_i))^2 + (q_i^n - q_0(x_i))^2 \right) \Delta x}. \quad (6.45)$$

Sur la Figure 6.23, l'erreur en échelle logarithmique pour chacun des schémas $(SV_{AP\varepsilon})$ et (SV_{FWB}^ε) munis des conditions au bord données par (6.9), et chacune des conditions initiales W_0 et $\widetilde{W}_0$ est tracée en fonction du temps T .

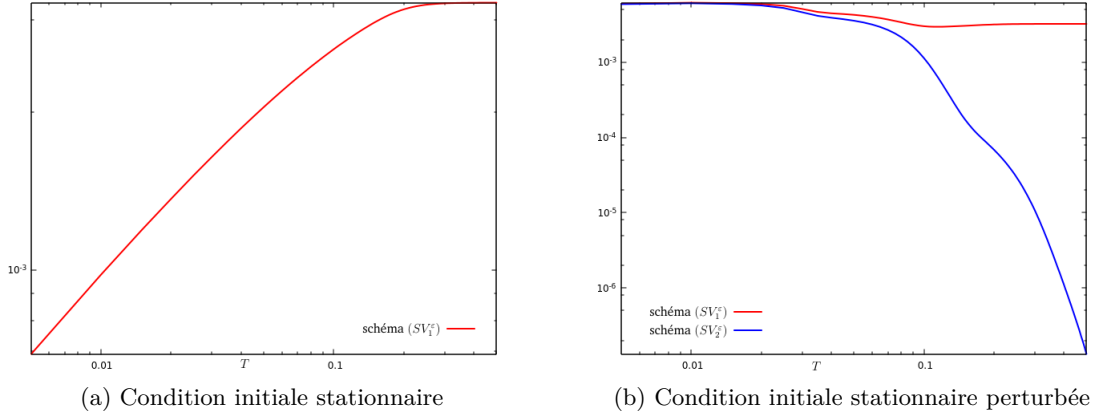


FIGURE 6.23: Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

Encore une fois, les mêmes remarques que pour les deux modèles précédents peuvent être données. L'erreur obtenue par (6.45) pour le schéma (SV_{FWB}^ε) avec la condition initiale stationnaire n'est pas tracée sur la Figure 6.23 (a) car elle reste au niveau du zéro machine, comme prévu. En revanche, les approximations données par le schéma $(SV_{AP\varepsilon})$ s'écartent de l'état stationnaire. Celui-ci ne préserve donc, encore une fois, pas les états stationnaires. Sur le graphe (b) de la Figure 6.23, le comportement au cours du temps de l'erreur pour les deux schémas avec la condition initiale perturbée est représentée. Les approximations calculées par (SV_{FWB}^ε) convergent bien vers W_0 . L'élimination de la perturbation est représentée sur la Figure 6.24.

En revanche, l'erreur pour les discrétisations données par le schéma $(SV_{AP\varepsilon})$ se stabilisent à environ 5.10^{-3} . Les discrétisations ne retournent donc pas à l'équilibre W_0 . Cela met bien en évidence la préservation des états stationnaires par (SV_{FWB}^ε) mais pas par $(SV_{AP\varepsilon})$. Les résultats pouvant être obtenus avec le schéma implicite $(SV_{AP\varepsilon}^{imp})$ sont complètement analogues à ceux pour le schéma explicite $(SV_{AP\varepsilon})$ et le schéma ne préserve pas non plus les états stationnaires.

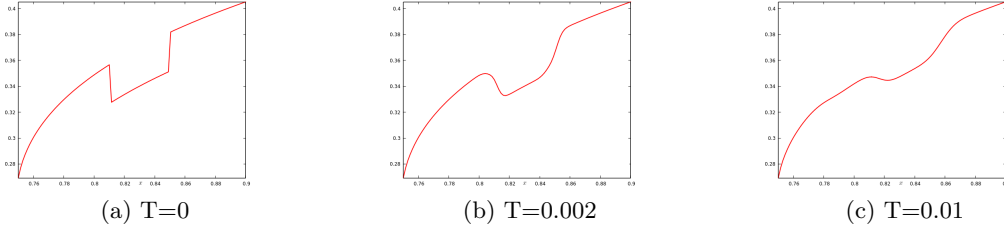


FIGURE 6.24: Hauteur d'eau obtenue par le schéma (SV_{FWB}^ε) pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.

6.3.3 Préservation de l'asymptotique

À présent, la préservation de l'asymptotique par les schémas (SV_{AP}^ε) , (SV_{FWB}^ε) et $(SV_{AP}^\varepsilon)_{imp}$ est mise en évidence. En effet, il a été démontré dans le Théorème 4.5.2 que la discrétisation de la hauteur d'eau donnée par le schéma explicite (SV_{AP}^ε) converge vers celle donnée par le schéma (4.76), qui discrétise l'équation de diffusion (6.31) de façon explicite. Ce schéma limite est rappelé :

$$\bar{h}_i^{n+1} = \bar{h}_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sqrt{\frac{g}{k}} \left(f(\bar{h}_i^n, \bar{h}_{i+1}^n) - f(\bar{h}_{i-1}^n, \bar{h}_i^n) \right), \quad (SV_{lim})$$

où la fonction f est définie par (6.33).

De plus, le Théorème 5.4.1 propose un résultat de préservation de l'asymptotique par le schéma (SV_{FWB}^ε) , dont la limite n'est pas connue. Seule sa consistance avec l'équation de diffusion (6.31) est satisfaite. Cependant, la mise en évidence de la convergence peut tout de même être effectuée en comparant les approximations données par (SV_{FWB}^ε) avec les approximations de la limite de diffusion (6.31) données par le schéma limite explicite (SV_{lim}) .

Enfin, le Théorème 4.5.3 donne un résultat de convergence asymptotique du schéma implicite $(SV_{AP}^\varepsilon)_{imp}$ vers le schéma limite implicite (SV_{lim}^{imp}) .

Afin d'illustrer numériquement cette propriété, les deux conditions initiales suivantes, définies sur le domaine spatial $(-5, 5)$ discrétisé en N mailles, sont considérées.

- Condition initiale discontinue :

$$h_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } q_0(x) = 0. \quad (6.46)$$

- Condition initiale continue :

$$h_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} \left(3 + \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right) & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } q_0(x) = 0. \quad (6.47)$$

Ce sont les mêmes conditions initiales que pour le p -système et le modèle M1 et elles sont représentées sur la Figure 6.4.

À partir de maintenant, le temps final T est fixé à 0.01. Ici encore les conditions de bord utilisées sont de flux nul (6.12). Le régime hyperbolique, obtenu à l'aide d'une discrétisation HLL du problème hyperbolique homogène, et le régime diffusif, obtenu avec le schéma limite explicite (SV_{lim}), sont représentés sur la Figure 6.25. D'après les résultats théoriques de préservation de l'asymptotique, les schémas ($SV_{AP\varepsilon}$), (SV_{FWB}^ε) et ($SV_{AP\ imp}^\varepsilon$) devraient donner des résultats similaires à la courbe rouge, le régime hyperbolique, quand ε est proche de 1, et à des résultats similaires à la bleue, le régime de diffusion, lorsque ε se rapproche de zéro.

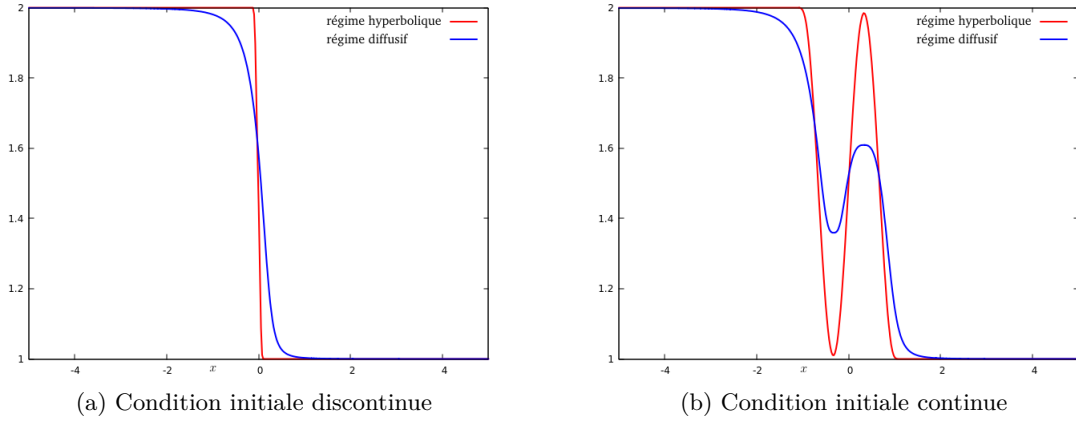
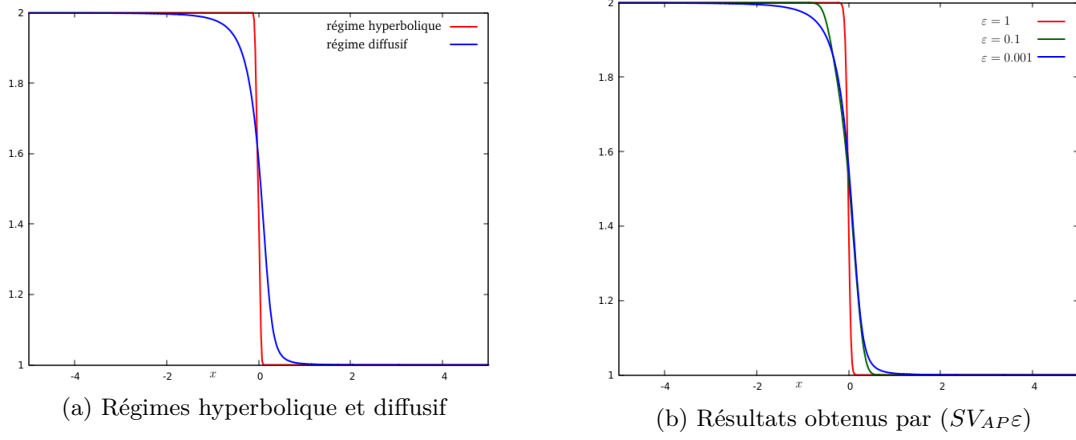
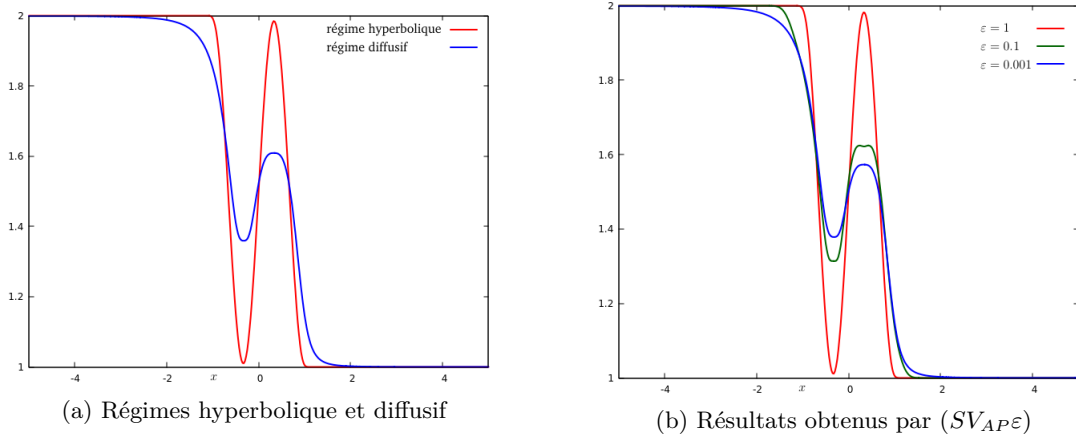


FIGURE 6.25: Hauteurs d'eau des différents régimes pour $N = 400$.

Sur les Figures 6.26 et 6.27, une illustration de la convergence du schéma ($SV_{AP\varepsilon}$) vers le schéma limite explicite (SV_{lim}) est proposée pour chacune des conditions initiales (6.46) et (6.47). Les régimes hyperbolique et diffusif sont à chaque fois rappelés sur la figure de gauche tandis que sur la figure de droite sont tracées les hauteurs d'eau obtenues par le schéma ($SV_{AP\varepsilon}$) avec différentes valeurs de ε . Les graphiques analogues obtenus avec les schémas (SV_{FWB}^ε) et ($SV_{AP\ imp}^\varepsilon$) ne sont pas proposés car ils sont quasiment identiques à ceux des Figures 6.26 et 6.27.

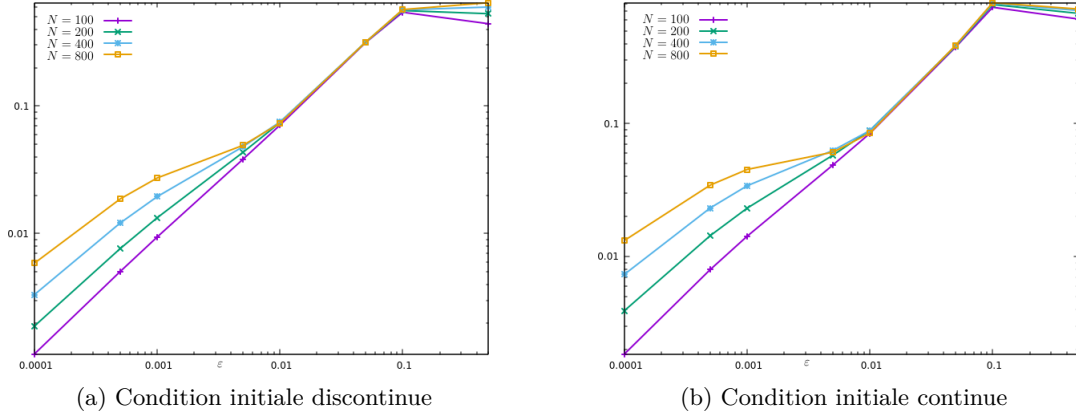
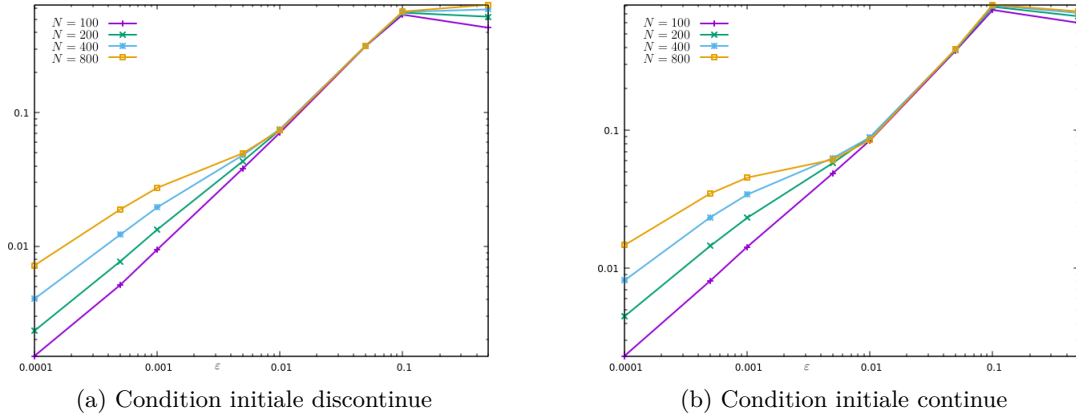
Sur la Figure 6.28 sont représentées, en échelle logarithmique, les courbes d'erreur en fonction de ε pour le schéma explicite ($SV_{AP\varepsilon}$). De la même façon, sur la Figure 6.29 sont représentées les courbes d'erreur pour le schéma implicite ($SV_{AP\ imp}^\varepsilon$). Elles sont toutes obtenues en considérant la norme L^2 discrète de la différence entre la discrétisation de la hauteur d'eau issue de ($SV_{AP\varepsilon}$) ou ($SV_{AP\ imp}^\varepsilon$), notée $(h_i^n)_i$, et celle issue du schéma limite explicite (SV_{lim}) ou implicite (SV_{lim}^{imp}), notée $(\bar{h}_i^n)_i$. Les erreurs sont donc calculées par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_N(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |h_i^n - \bar{h}_i^n|^2 \Delta x}. \quad (6.48)$$


 FIGURE 6.26: Hauteurs d'eau données pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.

 FIGURE 6.27: Hauteurs d'eau données pour $N = 400$ et la condition initiale continue.

Les observations qui peuvent être faites sur ces résultats sont très similaires à celles données pour le p -système, que ce soit pour le schéma explicite que pour le schéma implicite. Pour les deux conditions initiales, l'erreur converge vers zéro quand ε tend vers zéro. Cependant, comme dans le cas du p -système, un ressaut autour de $\varepsilon = 0.1$ est observé. Ici encore, celui-ci est d'autant plus important que le nombre de mailles est élevé.

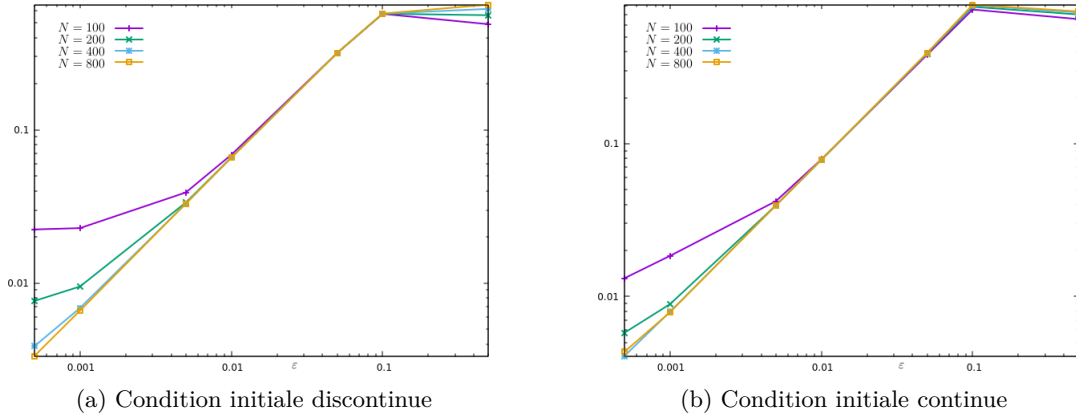
Enfin, sur la Figure 6.30 sont représentées, en échelle logarithmique, les courbes d'erreur en fonction de ε pour le schéma (SV_{FWB}^ε) comparé au schéma limite explicite (SV_{lim}) (qui n'est pas la limite de (SV_{FWB}^ε)). Elles sont également obtenues par la formule (6.48). Comme pour le p -système et le modèle M1, une convergence puis un palier, d'autant plus bas que N est grand, sont observés. Ce résultat est moins visible que pour les autres modèles avec les valeurs de ε utilisées. Il faudrait tester le schéma avec des valeurs de ε plus faibles pour mettre mieux en évidence ce phénomène. Ici encore c'est un résultat prévi-


 FIGURE 6.28: Erreur calculée par (6.48) pour le schéma explicite (SV_{AP}^ϵ).

 FIGURE 6.29: Erreur calculée par (6.48) pour le schéma implicite ($SV_{AP}^{\epsilon_{imp}}$).

sible puisqu'il est montré dans le Théorème 5.4.1 que, à la limite, le schéma (SV_{FWB}^ϵ) est consistant avec la limite diffusive (6.31). L'erreur entre cette limite et le schéma (SV_{lim}) est ainsi dépendante en Δx et donc de plus en plus petite quand N augmente.

6.3.4 Ordre des schémas en espace

Une étude des ordres de convergence en espace des différents schémas est maintenant proposée. Pour ce faire, les discrétisations obtenues avec N mailles sont comparées avec celles obtenues avec $2N$ mailles. Il est alors nécessaire de distinguer les quantités discrètes provenant d'une discrétisation avec N mailles de celles provenant d'une discrétisation avec $2N$ mailles. Toutes les quantités pour lesquelles c'est nécessaire sont alors indicées par (N) ou $(2N)$. En particulier, les pas d'espace $\Delta x^{(N)}$ et $\Delta x^{(2N)}$ vérifient $\Delta x^{(N)} = 2\Delta x^{(2N)}$ et les centres des mailles $(x_i^{(N)})_{i=1,N}$ et $(x_i^{(2N)})_{i=1,2N}$ vérifient $x_i^{(N)} = x_{2i}^{(2N)}$. Le temps final T est toujours pris égal à 0.01.


 FIGURE 6.30: Erreur calculée par (6.48) pour le schéma (SV_{FWB}^ε) .

Pour l'étude d'ordre des schémas limites (SV_{lim}) et (SV_{lim}^{imp}) , la discrétisation de l'énergie radiative obtenue avec N mailles est notée $(\bar{h}_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(\bar{h}_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. L'erreur $\mathcal{E}(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\bar{h}_{2i}^{(2N),n} - \bar{h}_i^{(N),n}|^2 \Delta x^{(N)}}. \quad (6.49)$$

Concernant l'étude d'ordre des schémas hyperboliques $(SV_{AP\varepsilon})$ et (SV_{FWB}^ε) , la discrétisation obtenue avec N mailles est notée $(W_i^{(N),n})_{i=1,N}^{n \in \mathbb{N}}$ et celle obtenue avec $2N$ mailles est notée $(W_i^{(2N),n})_{i=1,2N}^{n \in \mathbb{N}}$. Les composantes de ces vecteurs sont définies comme suit :

$$W_i^{(N),n} = {}^t \left((h_i^{(N),n}), (q_i^{(N),n}) \right).$$

L'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$ pour N mailles est alors calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(|h_{2i}^{(2N),n} - h_i^{(N),n}|^2 + |q_{2i}^{(2N),n} - q_i^{(N),n}|^2 \right) \Delta x^{(N)}}. \quad (6.50)$$

Sur la Figure 6.31, le comportement de l'erreur $\mathcal{E}_\varepsilon(N)$, calculée avec la formule (6.50), des solutions approchées par le schéma $(SV_{AP\varepsilon})$ pour différentes valeurs de ε est représenté. Ces erreurs sont tracées en échelle logarithmique. Les erreurs pour les approximations données par les schémas limites (SV_{lim}) et (SV_{lim}^{imp}) , calculées avec la formule (6.49) et également représentées sur la Figure 6.31, sont très similaires. Les pentes de ces droites sont d'environ -1 pour la condition initiale discontinue (6.46) et -2 pour la condition initiale continue (6.47). Ces schémas limites sont donc d'ordre 2 en espace. En revanche, pour les deux conditions initiales, les résultats d'erreur obtenus avec le schéma explicite $(SV_{AP\varepsilon})$ ne sont pas convaincants. Pour $\varepsilon = 1$, la convergence en espace est d'ordre 1 mais dès que ε diminue, les courbes perdent leur monotonie. Ce phénomène est plus visible en-

core avec la condition initiale régulière. En observant les courbes obtenues avec $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, une convergence des erreurs vers zéro à partir d'un nombre de mailles d'autant plus grand que ε est petit peut se conjecturer. Les résultats obtenus avec le schéma implicite ($SV_{AP}^{\varepsilon imp}$) sont similaires à ceux présentés dans la Figure 6.31. Cependant, pour des raisons de temps de calcul important, ils ne sont pas exposés ici.

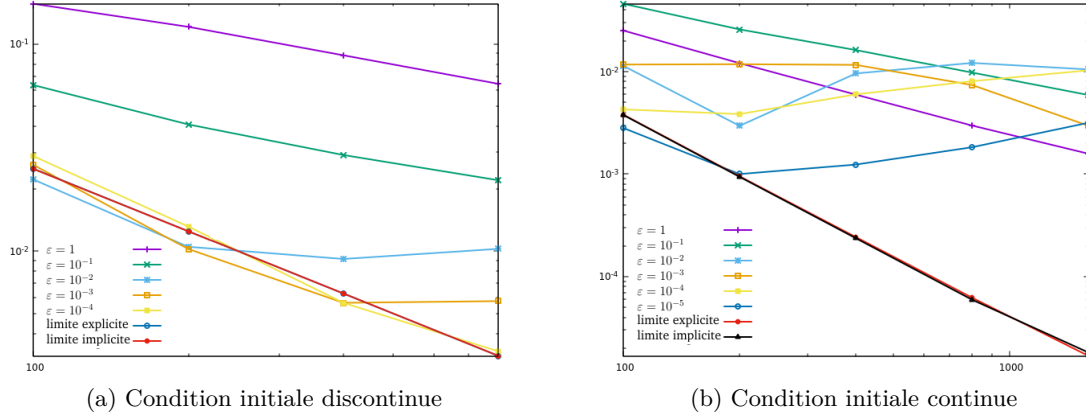


FIGURE 6.31: Erreurs calculées par (6.49) et (6.50) pour les schémas (SV_{AP}^{ε}), (SV_{lim}) et (SV_{lim}^{imp}).

Sur la Figure 6.32, le comportement de l'erreur $\mathcal{E}_{\varepsilon}(N)$, calculée avec la formule (6.50), des solutions approchées par le second schéma (SV_{FWB}^{ε}) pour, toujours, différentes valeurs de ε est représenté. La courbe de l'erreur pour le schéma limite explicite (SV_{lim}), obtenue par la formule (6.28), est également représentée sur chaque graphe. En revanche, ici, la convergence des tracés vers cette courbe d'erreur limite n'est pas attendue puisque le schéma (SV_{lim}) n'est, a priori, pas la limite du schéma (SV_{FWB}^{ε}). Concernant les résul-

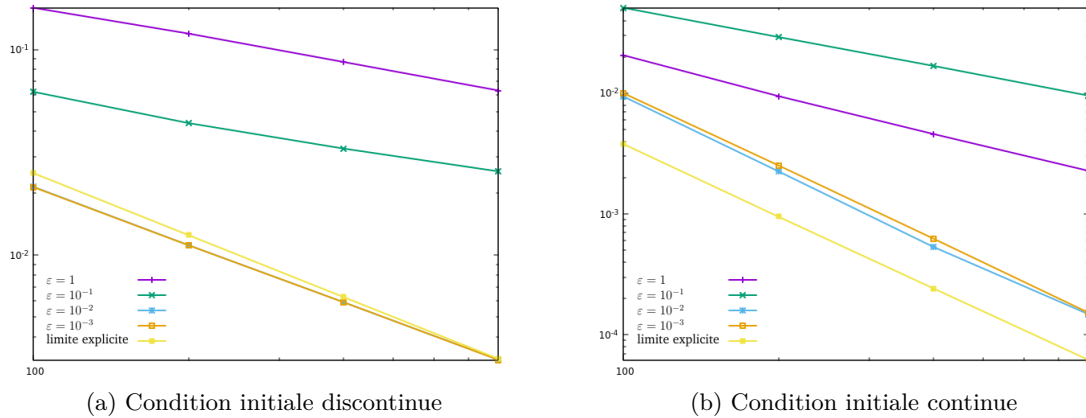


FIGURE 6.32: Erreurs calculées par (6.49) et (6.50) pour les schémas (SV_{FWB}^{ε}) et (SV_{lim}).

tats avec la condition initiale discontinue (6.46), une convergence très rapide des tracés d'erreur vers le tracé de l'erreur limite est observée quand ε tend vers zéro. De plus, pour

la condition initiale continue, les tracés semblent également converger vers une erreur d'ordre 2, ce qui donne une première information sur la limite du schéma (SV_{FWB}^ε).

Conclusion et perspectives

Partie I :

Dans la première partie de ce manuscrit, un résultat de convergence asymptotique numérique pour le p -système avec terme source d'amortissement a été démontré rigoureusement. Il constitue l'extension des travaux de [6, 60], dans lesquels les cas continu et semi-discret sont traités. La méthode utilisée est l'extension au cadre discret de la technique dite d'entropie relative, qui permet de manipuler des quantités se comportant comme des normes d'erreur. Le schéma utilisé est issu de la méthode de discrétisation implicite-explicite introduite dans [56]. Ce résultat est notable car le taux de convergence vers les discrétisations limites s'exprime explicitement et est en accord avec celui obtenu dans les cadres continu et semi-discret. Les outils utilisés dans la preuve de ce résultat sont très techniques et, à cause de la discrétisation temporelle, le nombre de termes de viscosité à traiter est bien plus grand que dans le cadre continu ou semi-discret.

Une perspective intéressante pour ces travaux serait d'appliquer la méthode à d'autres systèmes, comme par exemple ceux proposés dans [56, 60]. Un système assez simple qui peut être choisi est celui des équations d'Euler mono-dimensionnelles avec friction, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{\rho} + p(\rho) \right) = -\sigma u, \end{cases}$$

où $\rho > 0$ est la densité du gaz et u sa vitesse. Le paramètre σ désigne la friction et la fonction de pression p est croissante. Lattanzio et Tzavaras ont montré dans [60], encore à l'aide de l'entropie relative, que les solutions de ces équations, en temps long et friction forte, convergent vers celles du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_x p(\rho) = -\sigma u. \end{cases}$$

Le taux de convergence obtenu dans [60] est, comme pour le p -système, en ε^4 . La technique peut alors être étendue, au cadre semi-discret d'abord, puis ensuite au cadre entièrement discrétisé. Cette extension est bien entendu plus difficile que celle présentée dans ce manuscrit pour le p -système. En effet, ici, la seconde composante de la fonction de flux dépend des deux variables u et ρ alors que pour le p -système, elle dépendait uniquement

du volume spécifique (analogue à ρ ici).

Partie II :

La seconde partie de ce manuscrit est consacrée au développement de méthodes de construction de schémas préservant l'asymptotique. Chacune d'entre elles est appliquée aux trois modèles suivants : le p -système avec terme source d'amortissement, les équations de Saint-Venant avec friction de Manning et le modèle M1 avec terme source d'opacité de scattering. Pour les deux méthodes, la préservation de la limite de diffusion est démontrée à l'aide de développements de Chapman-Enskog.

La première méthode développée, introduite dans [13], consiste à utiliser une discrétisation HLL munie d'une correction visqueuse fixée pour capturer l'asymptotique correcte à la limite. Un avantage de cette méthode est que la discrétisation limite est déterminée en amont. La deuxième méthode, introduite dans [70] pour les équations de Saint-Venant, peut également être vue comme une discrétisation HLL perturbée. Cependant, celle-ci est construite afin de préserver tous les états stationnaires et non la limite de diffusion. La préservation de l'asymptotique est néanmoins également acquise pour cette seconde classe de schémas. La discrétisation limite n'est en revanche pas connue ici.

Les deux méthodes sont comparées dans le Chapitre 6 de ces travaux. La préservation des états stationnaires par les schémas issus de la deuxième technique est validée pour chacun des trois modèles étudiés. Concernant la préservation de l'asymptotique, elle est validée pour toutes les discrétisations construites mais la convergence n'est pas la même selon la méthode utilisée et le modèle sur lequel elle est appliquée. En particulier, un phénomène étonnant est constaté pour les discrétisations issues de la première méthode, développée dans le Chapitre 4. En effet, pour le p -système et les équations de Saint-Venant, la convergence en ε des approximations données par le schéma hyperbolique vers celles données par le schéma limite possède une allure surprenante pour certaines valeurs de ε . De plus, plus le nombre de cellules utilisé dans la discrétisation est grand et plus ce phénomène est visible. Il faut préciser que cette anomalie est présente pour la discrétisation du p -système alors que, pour ce modèle, il n'est pas nécessaire d'ajouter de paramètre additionnel pour obtenir une discrétisation correcte de la limite de diffusion. L'hypothèse proposée pour expliquer ce phénomène, qui semble inhérent à la discrétisation HLL perturbée sans ajout de paramètre additionnel (qui ne préserve donc pas forcément la limite de diffusion), est que les schémas obtenus par cette méthode ne discrétisent pas correctement les états transitoires. Il faut également préciser que, pour le modèle M1, ce problème n'apparaît pas. Un autre constat concernant cette méthode est relatif à l'ordre de convergence en espace. En effet, lorsque ε diminue, une mauvaise convergence en Δx est observée pour les discrétisations du p -système et des équations de Saint-Venant. Ici encore, cela n'apparaît pas pour le modèle M1 où l'ordre correspond à ce qui peut être attendu. En effet, les discrétisations obtenues par le schéma dans le régime hyperbolique (ε de l'ordre de 1) satisfont un ordre en espace d'environ 1, tandis que dans le régime diffusif (ε proche de zéro), l'ordre se rapproche de 2. Cet ordre est bien celui du schéma limite puisque celui-ci

correspond à une discrétisation aux différences finies classique d'une équation de la chaleur. Enfin, concernant la stabilité des schémas présentés dans cette seconde partie, elle est systématiquement restreinte par une condition CFL hyperbolique dépendante du paramètre asymptotique ε et il faut noter que cette condition est légèrement plus restrictive pour la méthode qui préserve les états stationnaires que pour la méthode de perturbation HLL visqueuse.

Pour conclure sur cette partie, c'est sur la seconde méthode développée que se dirige ma préférence. En effet, pour celle-ci, la convergence asymptotique correspond à ce que l'on pouvait attendre. Les ordres de convergence en espace sont satisfaisants et surtout, les discrétisations obtenues préservent l'asymptotique alors que ce n'est pas le but dans lequel elles ont été construites. Les résultats proposés dans ce manuscrit semblent donc montrer qu'une discrétisation adéquate du terme source pour préserver tous les états stationnaires permet également de préserver l'asymptotique de diffusion.

Les perspectives émergeant de ces travaux peuvent être, en premier lieu, de comprendre le rôle que jouent les états transitoires dans la convergence asymptotique mais également dans la convergence en espace pour la première méthode de discrétisation proposée. Il peut également être intéressant de généraliser cette méthode pour des changements d'échelle du terme source en $1/\varepsilon^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et pas seulement en $1/\varepsilon$ comme cela a été fait dans [13]. Enfin, un résultat important reposerait sur la construction d'une procédure générique pour la seconde méthode présentée, pour développer des schémas préservant tous les états stationnaires. En effet, en utilisant à chaque fois la même technique mais au cas par cas, des schémas préservant tous les états stationnaires ont pu être construits pour chacun des trois problèmes étudiés. Pour ces trois modèles, les discrétisations obtenues préservent également l'asymptotique diffusive, c'est pourquoi nous pensons qu'une méthode générique peut être développée.

Bibliographie

- [1] B. ANDREIANOV, F. BOYER et F. HUBERT, « Finite volume schemes for the p -Laplacian on Cartesian meshes », in : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 38.6 (2004), p. 931–959, ISSN : 0764-583X.
- [2] E. AUDIT et al., « A radiation-hydrodynamics scheme valid from the transport to the diffusion limit », in : *arXiv Astrophysics e-prints* (juin 2002), eprint : [astro-ph/0206281](#).
- [3] E. AUDUSSE et al., « A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 25.6 (2004), p. 2050–2065, ISSN : 1064-8275.
- [4] J. W. BARRETT et W. B. LIU, « Finite element approximation of the p -Laplacian », in : *Math. Comp.* 61.204 (1993), p. 523–537, ISSN : 0025-5718.
- [5] A. BERMUDEZ et M. E. VAZQUEZ, « Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms », in : *Comput. & Fluids* 23.8 (1994), p. 1049–1071, ISSN : 0045-7930.
- [6] C. BERTHON, M. BESSEMOULIN-CHATARD et H. MATHIS, « Numerical convergence rate for a diffusive limit of hyperbolic systems : p -system with damping », in : *SMAI J. Comput. Math.* 2 (2016), p. 99–119, ISSN : 2426-8399.
- [7] C. BERTHON et C. CHALONS, « A fully well-balanced, positive and entropy-satisfying Godunov-type method for the shallow-water equations », in : *Math. Comp.* 85.299 (2016), p. 1281–1307, ISSN : 0025-5718.
- [8] C. BERTHON, P. CHARRIER et B. DUBROCA, « An asymptotic preserving relaxation scheme for a moment model of radiative transfer », in : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344.7 (2007), p. 467–472, ISSN : 1631-073X.
- [9] C. BERTHON, P. CHARRIER et B. DUBROCA, « An HLLC scheme to solve the M_1 model of radiative transfer in two space dimensions », in : *J. Sci. Comput.* 31.3 (2007), p. 347–389, ISSN : 0885-7474.
- [10] C. BERTHON, A. CRESTETTO et F. FOUCHER, « A well-balanced finite volume scheme for a mixed hyperbolic/parabolic system to model chemotaxis », in : *J. Sci. Comput.* 67.2 (2016), p. 618–643, ISSN : 0885-7474.
- [11] C. BERTHON et F. FOUCHER, « Efficient well-balanced hydrostatic upwind schemes for shallow-water equations », in : *J. Comput. Phys.* 231.15 (2012), p. 4993–5015, ISSN : 0021-9991.

-
- [12] C. BERTHON, P. G. LEFLOCH et R. TURPAULT, « Late-time/stiff-relaxation asymptotic-preserving approximations of hyperbolic equations », in : *Math. Comp.* 82.282 (2013), p. 831–860, ISSN : 0025-5718.
 - [13] C. BERTHON et R. TURPAULT, « Asymptotic preserving HLL schemes », in : *Numer. Methods Partial Differential Equations* 27.6 (2011), p. 1396–1422, ISSN : 0749-159X.
 - [14] S. BIANCHINI, B. HANOZET et R. NATALINI, « Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy », in : *Comm. Pure Appl. Math.* 60.11 (2007), p. 1559–1622, ISSN : 0010-3640.
 - [15] F. BOUCHUT, H. OUNAÏSSA et B. PERTHAME, « Upwinding of the source term at interfaces for Euler equations with high friction », in : *Comput. Math. Appl.* 53.3-4 (2007), p. 361–375, ISSN : 0898-1221.
 - [16] C. BUET et S. CORDIER, « An asymptotic preserving scheme for hydrodynamics radiative transfer models : numerics for radiative transfer », in : *Numer. Math.* 108.2 (2007), p. 199–221, ISSN : 0029-599X.
 - [17] C. BUET et S. CORDIER, « Asymptotic preserving scheme and numerical methods for radiative hydrodynamic models », in : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338.12 (2004), p. 951–956, ISSN : 1631-073X.
 - [18] C. BUET et B. DESPRES, « Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics », in : *J. Comput. Phys.* 215.2 (2006), p. 717–740, ISSN : 0021-9991.
 - [19] C. CANCÈS, H. MATHIS et N. SEGUIN, « Relative entropy for the finite volume approximation of strong solutions to systems of conservation laws », in : *HAL* (2016).
 - [20] C. CHALONS, M. GIRARDIN et S. KOKH, « Large time step and asymptotic preserving numerical schemes for the gas dynamics equations with source terms », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 35.6 (2013), A2874–A2902, ISSN : 1064-8275.
 - [21] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative transfer*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
 - [22] S. CHAPMAN et T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1939.
 - [23] P. CHARRIER et al., « Modèles à vitesses discrètes pour le calcul d'écoulements hors équilibre cinétique », in : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 326.11 (1998), p. 1347–1352, ISSN : 0764-4442.
 - [24] F. COQUEL et E. GODLEWSKI, « Asymptotic preserving scheme for Euler system with large friction », in : *J. Sci. Comput.* 48.1-3 (2011), p. 164–172, ISSN : 0885-7474.
 - [25] J.-F. COULOMBEL et T. GOUDON, « The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations », in : *Trans. Amer. Math. Soc.* 359.2 (2007), p. 637–648, ISSN : 0002-9947.
 - [26] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY, « On the partial difference equations of mathematical physics », in : *IBM J. Res. Develop.* 11 (1967), p. 215–234, ISSN : 0018-8646.
 - [27] C. M. DAFERMOS, « The second law of thermodynamics and stability », in : *Arch. Rational Mech. Anal.* 70.2 (1979), p. 167–179, ISSN : 0003-9527.

- [28] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, t. 325, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2000, ISBN : 3-540-64914-X.
- [29] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Third, t. 325, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2010, ISBN : 978-3-642-04047-4.
- [30] A. B. DE SAINT-VENANT, « Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit », in : *Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1871), p. 147–237.
- [31] A. I. DELIS et T. KATSAOUNIS, « Relaxation schemes for the shallow water equations », in : *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 41.7 (2003), p. 695–719, ISSN : 0271-2091.
- [32] R. J. DIPERNA, « Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws », in : *Indiana Univ. Math. J.* 28.1 (1979), p. 137–188, ISSN : 0022-2518.
- [33] B. DUBROCA et J.-L. FEUGEAS, « Étude théorique et numérique d'une hiérarchie de modèles aux moments pour le transfert radiatif », in : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 329.10 (1999), p. 915–920, ISSN : 0764-4442.
- [34] A. DURAN et al., « Asymptotic preserving scheme for the shallow water equations with source terms on unstructured meshes », in : *J. Comput. Phys.* 287 (2015), p. 184–206, ISSN : 0021-9991.
- [35] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN, « Finite volume methods », in : *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, p. 713–1020.
- [36] E. FEIREISL et al., « Unconditional convergence and error estimates for bounded numerical solutions of the barotropic Navier-Stokes system », in : *Numer. Methods Partial Differential Equations* 33.4 (2017), p. 1208–1223, ISSN : 0749-159X.
- [37] G. GALLICE, « Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact », in : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331.2 (2000), p. 149–152, ISSN : 0764-4442.
- [38] G. GALLICE, « Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source », in : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334.8 (2002), p. 713–716, ISSN : 1631-073X.
- [39] T. GALLOUËT, D. MALTESE et A. NOVOTNÝ, « Discrete relative entropy for the compressible Stokes system », in : *Finite volumes for complex applications VII. Methods and theoretical aspects*, t. 77, Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2014, p. 383–392.
- [40] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, t. 118, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996, ISBN : 0-387-94529-6.
- [41] S. K. GODUNOV, « A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics », in : *Mat. Sb. (N.S.)* 47 (89) (1959), p. 271–306.

-
- [42] F. GOLSE, C. D. LEVERMORE et L. SAINT-RAYMOND, « La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques », in : *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 1999–2000*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2000, Exp. No. XIX, 23.
 - [43] L. GOSSE, « A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms », in : *Comput. Math. Appl.* 39.9-10 (2000), p. 135–159, ISSN : 0898-1221.
 - [44] L. GOSSE, « Asymptotic-preserving and well-balanced schemes for the 1D Cattaneo model of chemotaxis movement in both hyperbolic and diffusive regimes », in : *J. Math. Anal. Appl.* 388.2 (2012), p. 964–983, ISSN : 0022-247X.
 - [45] L. GOSSE et G. TOSCANI, « An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations », in : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334.4 (2002), p. 337–342, ISSN : 1631-073X.
 - [46] L. GOSSE et G. TOSCANI, « Identification of asymptotic decay to self-similarity for one-dimensional filtration equations », in : *SIAM J. Numer. Anal.* 43.6 (2006), p. 2590–2606, ISSN : 0036-1429.
 - [47] L. GOSSE et N. VAUCHELET, « Numerical high-field limits in two-stream kinetic models and 1D aggregation equations », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 38.1 (2016), A412–A434, ISSN : 1064-8275.
 - [48] J. M. GREENBERG et A. Y. LEROUX, « A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations », in : *SIAM J. Numer. Anal.* 33.1 (1996), p. 1–16, ISSN : 0036-1429.
 - [49] J. M. GREENBERG et W. ALT, « Stability results for a diffusion equation with functional drift approximating a chemotaxis model », in : *Trans. Amer. Math. Soc.* 300.1 (1987), p. 235–258, ISSN : 0002-9947.
 - [50] B. HANOUZET et R. NATALINI, « Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy », in : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 169.2 (2003), p. 89–117, ISSN : 0003-9527.
 - [51] A. HARTEN, P. D. LAX et B. van LEER, « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws », in : *SIAM Rev.* 25.1 (1983), p. 35–61, ISSN : 0036-1445.
 - [52] D. HORSTMANN, « From 1970 until present : the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. II », in : *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 106.2 (2004), p. 51–69, ISSN : 0012-0456.
 - [53] L. HSIAO et T.-P. LIU, « Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping », in : *Comm. Math. Phys.* 143.3 (1992), p. 599–605, ISSN : 0010-3616.
 - [54] S. JIN, « Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 21.2 (1999), p. 441–454, ISSN : 1064-8275.
 - [55] S. JIN et C. D. LEVERMORE, « Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms », in : *J. Comput. Phys.* 126.2 (1996), p. 449–467, ISSN : 0021-9991.

- [56] S. JIN, L. PARESCHI et G. TOSCANI, « Diffusive relaxation schemes for multiscale discrete-velocity kinetic equations », in : *SIAM J. Numer. Anal.* 35.6 (1998), p. 2405–2439, ISSN : 0036-1429.
- [57] V. JOVANOVIĆ et C. ROHDE, « Error estimates for finite volume approximations of classical solutions for nonlinear systems of hyperbolic balance laws », in : *SIAM J. Numer. Anal.* 43.6 (2006), p. 2423–2449, ISSN : 0036-1429.
- [58] R. KÄPPELI et S. MISHRA, « Well-balanced schemes for the Euler equations with gravitation », in : *J. Comput. Phys.* 259 (2014), p. 199–219, ISSN : 0021-9991.
- [59] C. KLINGENBERG, G. PUPPO et M. SEMPLICE, « Arbitrary order finite volume well-balanced schemes for the Euler equations with gravity », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 41.2 (2019), A695–A721, ISSN : 1064-8275.
- [60] C. LATTANZIO et A. E. TZAVARAS, « Relative entropy in diffusive relaxation », in : *SIAM J. Math. Anal.* 45.3 (2013), p. 1563–1584, ISSN : 0036-1410.
- [61] R. J. LEVEQUE, « Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm », in : *J. Comput. Phys.* 146.1 (1998), p. 346–365, ISSN : 0021-9991.
- [62] R. J. LEVEQUE, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, ISBN : 0-521-81087-6 ; 0-521-00924-3.
- [63] R. MANNING, « On the flow of water in open channels and pipes », in : *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland* 20 (1890), p. 161–207.
- [64] P. MARCATI et A. MILANI, « The one-dimensional Darcy’s law as the limit of a compressible Euler flow », in : *J. Differential Equations* 84.1 (1990), p. 129–147, ISSN : 0022-0396.
- [65] F. MARCHE, C. BERTHON et R. TURPAULT, « An efficient scheme on wet/dry transitions for shallow water equations with friction », in : *Computers and Fluids* 48.1 (sept. 2011), p. 192–201.
- [66] H. MATHIS et N. THERME, « Numerical Convergence for a Diffusive Limit of the Goldstein–Taylor System on Bounded Domain », in : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects : FVCA 8, Lille, France, June 2017*, sous la dir. de C. CANCÈS et P. OMNES, Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 225–233, ISBN : 978-3-319-57397-7.
- [67] A. MATSUMURA, « On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations », in : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 12.1 (1976/77), p. 169–189, ISSN : 0034-5318.
- [68] M. MEI, « Best asymptotic profile for hyperbolic p -system with damping », in : *SIAM J. Math. Anal.* 42.1 (2010), p. 1–23, ISSN : 0036-1410.
- [69] V. MICHEL-DANSAC et al., « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography », in : *Comput. Math. Appl.* 72.3 (2016), p. 568–593, ISSN : 0898-1221.

-
- [70] V. MICHEL-DANSAC et al., « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography or Manning friction », in : *J. Comput. Phys.* 335 (2017), p. 115–154, ISSN : 0021-9991.
- [71] D. MIHALAS et B. W. MIHALAS, *Foundations of radiation hydrodynamics*, Oxford University Press, New York, 1984, ISBN : 0-19-503437-6.
- [72] G. NALDI et L. PARESCHI, « Numerical schemes for kinetic equations in diffusive regimes », in : *Appl. Math. Lett.* 11.2 (1998), p. 29–35, ISSN : 0893-9659.
- [73] G. NALDI et L. PARESCHI, « Numerical schemes for hyperbolic systems of conservation laws with stiff diffusive relaxation », in : *SIAM J. Numer. Anal.* 37.4 (2000), p. 1246–1270, ISSN : 0036-1429.
- [74] R. NATALINI, M. RIBOT et M. TWAROGOWSKA, « A numerical comparison between degenerate parabolic and quasilinear hyperbolic models of cell movements under chemotaxis », in : *J. Sci. Comput.* 63.3 (2015), p. 654–677, ISSN : 0885-7474.
- [75] K. NISHIHARA, « Convergence rates to nonlinear diffusion waves for solutions of system of hyperbolic conservation laws with damping », in : *J. Differential Equations* 131.2 (1996), p. 171–188, ISSN : 0022-0396.
- [76] K. NISHIHARA, W. WANG et T. YANG, « L_p -convergence rate to nonlinear diffusion waves for p -system with damping », in : *J. Differential Equations* 161.1 (2000), p. 191–218, ISSN : 0022-0396.
- [77] S. NOELLE et al., « Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows », in : *J. Comput. Phys.* 213.2 (2006), p. 474–499, ISSN : 0021-9991.
- [78] B. PERTHAME et C. SIMEONI, « A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term », in : *Calcolo* 38.4 (2001), p. 201–231, ISSN : 0008-0624.
- [79] N. PETON, « Étude et simulation d’un modèle stratigraphique advecto-diffusif non-linéaire avec frontières mobiles », thèse de doct., Université Paris-Saclay, 2018.
- [80] L. SAINT-RAYMOND, « Hydrodynamic limits : some improvements of the relative entropy method », in : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26.3 (2009), p. 705–744, ISSN : 0294-1449.
- [81] C. SARAZIN-DESBOIS, « Méthodes numériques pour des systèmes hyperboliques avec terme source provenant de physiques complexes autour du rayonnement », thèse de doct., Université de Nantes, 2013.
- [82] E. F. TORO, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Third, A practical introduction, Springer-Verlag, Berlin, 2009, ISBN : 978-3-540-25202-3.
- [83] A. E. TZAVARAS, « Relative entropy in hyperbolic relaxation », in : *Commun. Math. Sci.* 3.2 (2005), p. 119–132, ISSN : 1539-6746.

Table des figures

1.1	Illustration de la préservation de l'asymptotique.	12
3.1	Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec $C_{CFL} = 0.4$ et $\gamma = 1.4$	76
3.2	Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec la condition initiale discontinue et $\gamma = 1.4$	77
3.3	Intégrale en espace de l'entropie relative ϕ_ε^{N+1} en fonction de ε en échelle logarithmique avec la condition initiale discontinue et $C_{CFL} = 0.4$	77
3.4	Discretisation spatiale.	79
3.5	Illustration du problème de Riemann.	80
3.6	Juxtaposition d'ondes.	81
3.7	Solveur type Godunov.	82
3.8	Illustration du schéma issu d'un solveur de Riemann approché dans le cas de deux ondes.	83
3.9	Solveur HLL.	85
4.1	Solveur HLL perturbé	89
5.1	Solveur à deux états intermédiaires.	115
5.2	Schéma type-Godunov obtenu par le solveur de Riemann approché.	116
6.1	Volumes spécifiques des conditions initiales pour $N = 400$	154
6.2	Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$	155
6.3	Volume spécifique obtenu par le schéma (PS_{FWB}^ε) pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$	155
6.4	Volumes spécifiques des conditions initiales (6.10) et (6.11) pour $N = 400$	156
6.5	Volumes spécifiques des différents régimes pour $N = 400$	157
6.6	Volumes spécifiques pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.	157
6.7	Volumes spécifiques pour $N = 400$ et la condition initiale continue.	158
6.8	Erreur calculée par (6.13) pour le schéma (PS_{AP}^ε)	158
6.9	Erreur calculée par (6.13) pour le schéma (PS_{FWB}^ε)	159
6.10	Erreurs calculées par (6.14) et (6.18) pour les schémas (PS_{AP}^ε) et (PS_{lim})	161
6.11	Erreurs calculées par (6.18) et (6.14) pour les schémas (PS_{FWB}^ε) et (PS_{lim})	162
6.12	Énergies radiatives des conditions initiales pour $N = 400$	164
6.13	Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$	165

6.14	Énergie radiative obtenue par le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.	165
6.15	Énergies radiatives des différents régimes pour $N = 400$.	167
6.16	Énergies radiatives pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.	167
6.17	Énergies radiatives pour $N = 400$ et la condition initiale continue.	168
6.18	Erreur calculée par (6.27) pour le schéma $(M1_{AP}^\varepsilon)$.	168
6.19	Erreur calculée par (6.27) pour le schéma $(M1_{FWB}^\varepsilon)$.	169
6.20	Erreurs calculées par (6.29) et (6.28) pour les schémas $(M1_{AP}^\varepsilon)$ et $(M1_{lim})$.	170
6.21	Erreurs calculées par (6.29) et (6.28) pour les schémas $(M1_{FWB}^\varepsilon)$ et $(M1_{lim})$.	171
6.22	Hauteurs d'eau des conditions initiales pour $N = 400$.	180
6.23	Erreur en échelle logarithmique pour $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.	181
6.24	Hauteur d'eau obtenue par le schéma (SV_{FWB}^ε) pour la condition initiale perturbée avec $N = 400$ et $\varepsilon = 1$.	182
6.25	Hauteurs d'eau des différents régimes pour $N = 400$.	183
6.26	Hauteurs d'eau données pour $N = 400$ et la condition initiale discontinue.	184
6.27	Hauteurs d'eau données pour $N = 400$ et la condition initiale continue.	184
6.28	Erreur calculée par (6.48) pour le schéma explicite $(SV_{AP\varepsilon})$.	185
6.29	Erreur calculée par (6.48) pour le schéma implicite $(SV_{AP}^\varepsilon_{imp})$.	185
6.30	Erreur calculée par (6.48) pour le schéma (SV_{FWB}^ε) .	186
6.31	Erreurs calculées par (6.49) et (6.50) pour les schémas $(SV_{AP\varepsilon})$, (SV_{lim}) et (SV_{lim}^{imp}) .	187
6.32	Erreurs calculées par (6.49) et (6.50) pour les schémas (SV_{FWB}^ε) et (SV_{lim}) .	187

Titre : Développement et analyse de schémas numériques préservant les régimes asymptotiques de diffusion linéaire et non linéaire

Mot clés : schémas volumes finis, schémas préservant l'asymptotique, lois de conservation avec terme source, équations de Saint-Venant, schémas équilibres.

Résumé : Le but de cette thèse est de construire et analyser des schémas numériques capables de discrétiser les solutions de systèmes de lois de conservation hyperboliques avec terme source. La propriété principale recherchée dans ces travaux est la préservation de l'asymptotique, c'est-à-dire que les schémas développés doivent rester précis en régime de diffusion, à savoir en temps long et terme source raide. Ce manuscrit est divisé en deux parties. La première est consacrée à la présentation d'un résultat de convergence numérique rigoureux pour un schéma discrétisant les solutions du p -système. Le taux de convergence ainsi obtenu est exprimé explicitement et est en accord avec les résultats déjà connus dans les cadres continu et semi-discret. La seconde partie de ce manuscrit est dédiée au développement de schémas préservant l'asymptotique, pour lequel deux méthodes sont proposées. La première constitue une généralisation du schéma HLL perturbé proposé par Berthon et Turpault afin de traiter les termes sources de forme quadratique tandis que la deuxième méthode de construction exposée permet de préserver à la fois tous les états stationnaires et la limite de diffusion.

Title : Development and analysis of numerical schemes asymptotic preserving in linear and nonlinear diffusion regimes

Keywords : finite volume schemes, asymptotic preserving schemes, conservation laws with source term, shallow-water equations, well-balanced schemes.

Abstract : The aim of this work is to build and analyse schemes able to discretize the solutions of hyperbolic systems of conservation laws endowed with a source term. The main property required here is the preservation of the asymptotic behaviour, in other words the schemes must stay accurate in the diffusive regime, namely the long time and stiff source term regime. This manuscript is divided in two parts. The first one is dedicated to the presentation of a rigorous numerical convergence result for a scheme discretizing the solutions of the p -system. The convergence rate obtained is explicitly exhibited and coincides with the results obtained in the continuous and semi-discrete frameworks. The second part is devoted to the development of asymptotic preserving schemes and two methods are proposed. The first one is a generalization of the perturbed HLL method introduced by Berthon and Turpault in order to treat source terms of quadratic form and the second one is able to preserve both all the steady states and the diffusive limit.