# Chapitre IV : Structure de contact sur $\mathbb{R}^3$

On se concentre sur $(\mathbb{R}^3, \operatorname{Ker}(dz - y\,dx))$

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2_{xz}$$
$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2_{xy}$$

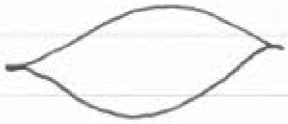
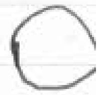
$\Lambda : S^1 \xhookrightarrow{\text{leg}} \mathbb{R}^3$ est appelé un noeud legendri

$\Pi(\Lambda)$ front d'onde, on retrouve $y$ par $y = \frac{d}{d}$


$\pi(\Lambda)$ projection lagrangienne, on retrouve

$z$ par $z(\theta) = z(0) + \int_0^\theta y(\theta)x'(\theta)\,d$

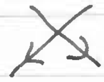
Ex : $\Lambda(\theta) = (\cos\theta, -3\sin\theta\cos\theta, \sin^3\theta)$

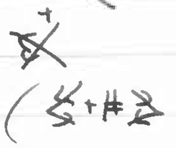
$\Pi(\Lambda) =$  $\pi(\Lambda) =$ 

$H_2(\mathbb{R}^3, \Lambda) \simeq H_1(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}$
orientation de $\Lambda$

$n : H_2(\mathbb{R}^3, \Lambda) \leftrightarrow r(\Lambda) \in \mathbb{Z}$ nb de
$tb(\Lambda) \in \mathbb{Z}$ nb le -
$-$T

**Thm :** Soit $\Lambda$ un noeud legendrien ~~ata~~ avec d'ade generique alors

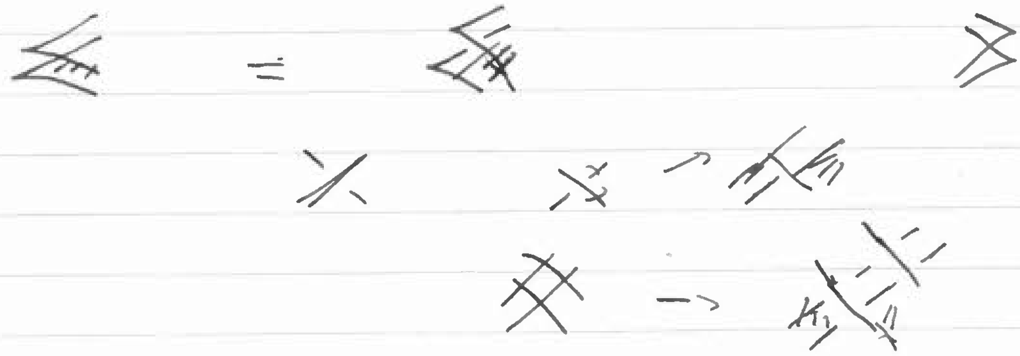
$tb(\Lambda) = \#$  $- \#$  $- \frac{1}{2} \#$ cus

$r(\Lambda) = \frac{1}{2}\big(\#($  $) - \#$  $\big)$

**Dem :** $r(\Lambda)$ compte $\frac{1}{2} \#$ $T(\Lambda)$ colinéaire à $\frac{\partial}{\partial y}$

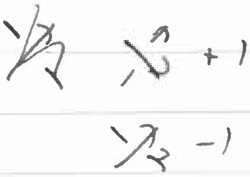
i.e. cusp

oui



Dans projection lagrangienne

$r(\Lambda) = \text{winding}(\pi(\Lambda))$

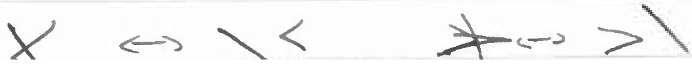
$tb(\Lambda) = w(\pi(\Lambda))$ 

**Thm** (Arnold-Swiatkowski)

$\Lambda \overset{leg}{\sim} \Lambda' \iff \pi(\Lambda)$ et $\pi(\Lambda')$ diffèrent par succession d'isotopies du pl

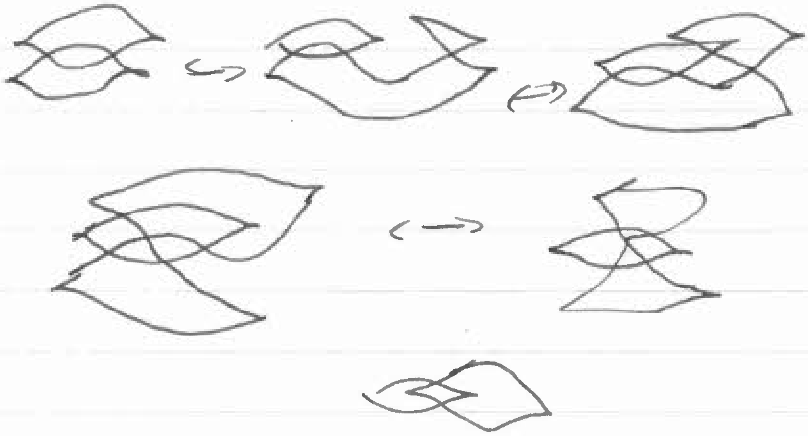
+ le mouvement de Reidemeister suiv

I 

II  III 

Ex : ①

②



Th (Bennequin)

Dans $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz - y\,dx))$

$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ legendrien et $\Sigma$ surface t.q. $\partial\Sigma = \Lambda$

alors $tb(\Lambda) + |r(\Lambda)| \leq -\chi(\Sigma) = 2g(\Sigma) - 1$

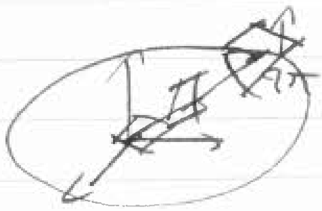
~~et~~

En particulier si $\Lambda_0$ est t.q. $\Lambda_0 = \partial D$, $D$ disque

$$tb(\Lambda_0) \leq -1$$

Considérons $\xi_{OT} = \ker(\cos r\, dz - r\sin r\, d\theta)$

où $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad \xi_{d_{OT}} = $ co



$\Lambda_0$

$\Lambda_0 = \{ r = 2\pi,\ z = 0 \}$ est le $\partial$ de $\{ r \leq$

et $tb(\Lambda_0) = 0$

$\Rightarrow \quad \xi_{OT} \neq \xi$

Déf : $\cdot$ $(Y, \xi)$ est vrillée si $\exists \Lambda \overset{\text{leg}}{\hookrightarrow} Y$ $\quad \Lambda = \partial$

et $tb(\Lambda$

$\cdot$ $(Y,\xi)$ est tendue si $(Y,\xi)$ pas vrillé

Thm (Eliashberg)

① $\forall \eta$ distribution coorientée sur $(Y, \cancel{\ })$ $\exists \xi$ co

vrillée t.q. $\xi \sim \eta$

② $\xi, \xi'$ vrillée et $\xi \overset{\text{homotope}}{\sim} \xi'$ $\quad (Y,\xi) \overset{\text{contact}}{\simeq}$