Chapitre VI - Familles génératrices

- T^*Q est reduction de $T^*(Q \times \mathbb{R}^N)$
 par la sous variété coisotrope
 $\tilde{Q} = T^*(Q) \times \mathbb{R}^N_0$

- $F : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonction
 $\Gamma(dF) \overset{\text{lag}}{\subset} T^*(Q \times \mathbb{R}^N)$

Supposons $\Gamma(dF) \pitchfork \tilde{Q}$ alors $\Gamma(dF)_{\widehat{\tilde{Q}}}$ est une lagrangienne (immergée !) de T^*Q

On la note L_F et F est appelée une famille g
pour L_F.

Notons $C_F = \pi(\Gamma(dF) \cap \tilde{Q}) = \{(q_0, \eta_0) \mid \frac{\partial F}{\partial \eta}$
$\pi : T^*(Q \times \mathbb{R}^N) \to Q \times \mathbb{R}^N$

Alors $C_F \to T^*Q$
$(q_0, \eta_0) \to (q_0, \frac{\partial F}{\partial q}(q_0, \eta_0))$ est une param
de L_F

<u>Thm 1</u> $C_F^* \, p\,dq = df$ où $f = F|_{C_F}$
i.e. L_F est exacte

<u>Dm</u> : ξ dual de η $\quad \Gamma(dF) : Q \times \mathbb{R}^N \to T^*(Q$
$\Gamma(dF)^*(p\,dq + \xi\,d\eta) = dF$

sur C_F $\xi = 0$

Comme C_F est exacte elle se relève à

$\Lambda_F \underset{T}{\subset} J^1(Q)$

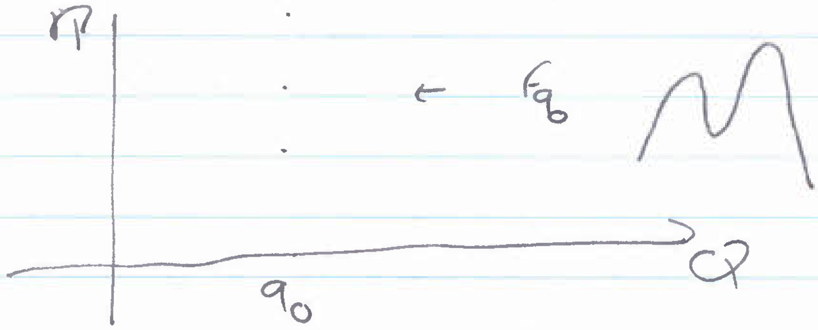
génériquement

$F : Q \times \mathbb{R}^N$

$$\Lambda_F = \left\{ (q_0, df_q(q_0), F(q_0)) \,\middle|\, \exists \eta_0 \in \mathbb{R}^N \ \frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_{(q_0,\eta_0)} \right.$$

c.a.d le front d'onde de Λ_F est construit de
suivante:

au dessus de $q_0 \in Q$ on mets les
cri
de $f_{q_0} =$



Ex:

① $F(q,\eta) = \frac{\eta^3}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(1-q^2)\eta$

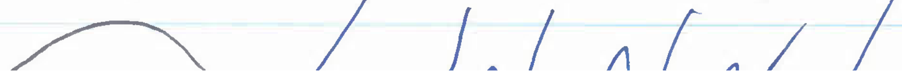
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \eta^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(1-q^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \iff q \in [-1,1] \quad \eta = \pm\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}($$

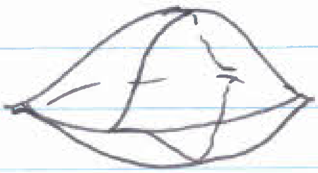
$$F(q,\eta) = \pm \frac{1}{2}(1-q^2)^{3/2} \mp \frac{3}{2}(1-q^2)$$

$$= \mp (1-q^2)^{3/2}$$

on posant $q = \cos t$ $\quad F(q,\eta) = \sin^3 t$



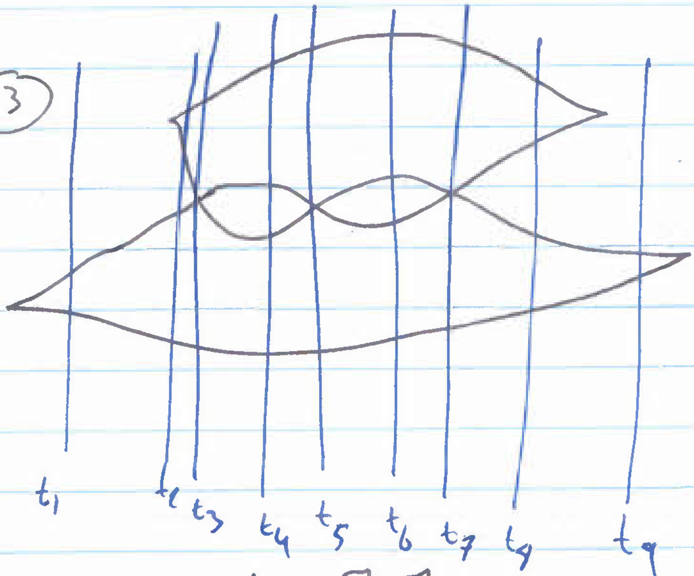
(2) $F(q,\eta) = \frac{\eta^3}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(1-|q|^2)\,\eta \quad q \in \mathbb{R}^n$



$L_F \subset T^*\mathbb{R}^n$

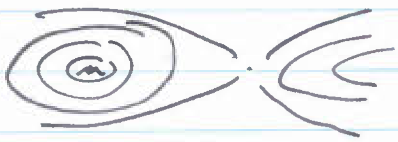
sphère de W

(3)

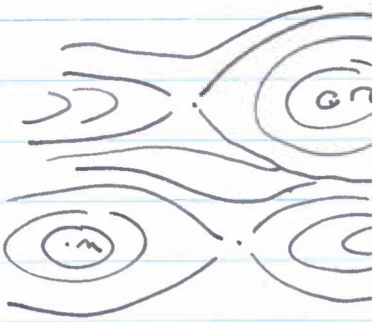


m = min   M = Max

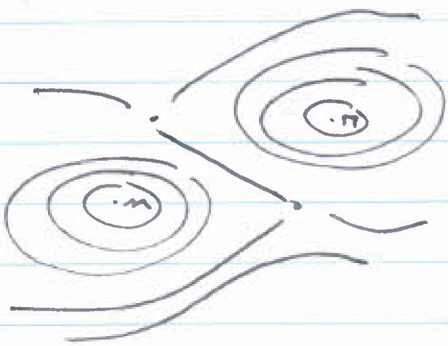
t_1 :



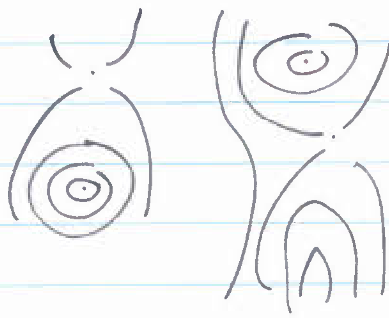
t_2 :
t_6



t_3 :
t_5 :
t_7



t_4 :
t_8



t_9 :

f est dite quadratique à l'infini si

$$f|_{(Q\times\mathbb{R}^N)\setminus K} = q(\xi) \quad \text{où } q \text{ forme qua}$$

non dégénérée

K compacte

Thm 2 (Chekanov)

Si $\Lambda \subset J^1(Q)$ admet une famille génératrice quadratique à l'∞ et $\{\Lambda_t\}$ isotopie legendrienne $\Lambda_0 = \Lambda \Rightarrow \Lambda_1$ admet une famille génératrice

Rem

1) La version pour $L \subset T^*Q$ et isotopie hamiltonienne est due à Sikorav.
Elle prouve $L \sim Q_0$ $\quad L \cap Q_0 = \text{Stab-Morse}(Q)$

2) Il y a une version pour f linéaire à l'∞

3) La taille de $\mathbb{R}^N$ varie le long de l'isotopie

ex :

§2 - Le théorème de Chekanov

$f: Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite quadratique à l'infini
si $\exists\, h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quad. non. dég. t.q.
$f(q,\eta) - h(\eta)$ est à support compact

On dit alors que Λ_f admet une f.g.q.i

On utilisera plusieurs fois (sans démonstration) le suivant

Thm 2: (Théret)

~~Soit Λ_f~~ Soit $f: Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. ~~la fonc~~
$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quad. non. dég. t.q.
$g = f - h$ satisfait $\|\frac{\partial g}{\partial \eta}\| < \infty$ alors
Λ_f admet une f.g.q.i qui coïncide avec f sur un compact choisit K

~~Aujourd'hui~~ On va esquisser une preuve de

Thm 3: (Chekanov)
Si $\Lambda \subset J^1(Q)$ admet une f.g.q.i et $\{\Lambda_t\}$ est une isotopie legendrienne t.q. $\Lambda_0 = \Lambda$ alors Λ_1 admet une f.g.q.i

Comme $\phi_t: T^*Q \xrightarrow{\text{ham}} T^*Q$ se relève à $\tilde{\phi}_t: J^1(Q) \to$
contactomorphisme $\Rightarrow$
Thm (Sikorav): $\phi_t(\Lambda_0) \subset T^*Q$ admet une f.g.q.i

· La preuve originale utilise le thm de Sikorav sur
$S(\Lambda) \subset \mathbb{R}\times T^*Q \simeq T^*(Q\times\mathbb{R}_+)$
↑ exercice.

· Une autre preuve est donnée par Chaperon et ici on verra une preuve dûe à Ferrand qui interprète une formule de Chaperon.

· Sur $\mathcal{L}(T^*M) = \{\gamma=(q,p) \mid p(0)=0\} \xrightarrow{\pi} T(1)$ A_H engendre ϕ_H(0-section)

<u>Rem</u>: $F : Q\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ génératrice pour $L_F \subset$
alors $\{dF = 0\} \longleftrightarrow \{L_F \cap \{0\text{-section}\}\}$
$\left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = (0,0)$

thm $\Rightarrow$ ϕ_t(0-section) $\cap$ (0-section) $\geq$ Stab$(Q) := \{$m
f

$\phi_t($ $)\cap$(0-section) $\geq \sum b_i(Q)$

⚠ La taille de $\mathbb{R}^N$ varie entre Λ_0 et Λ_1

<u>ex</u>

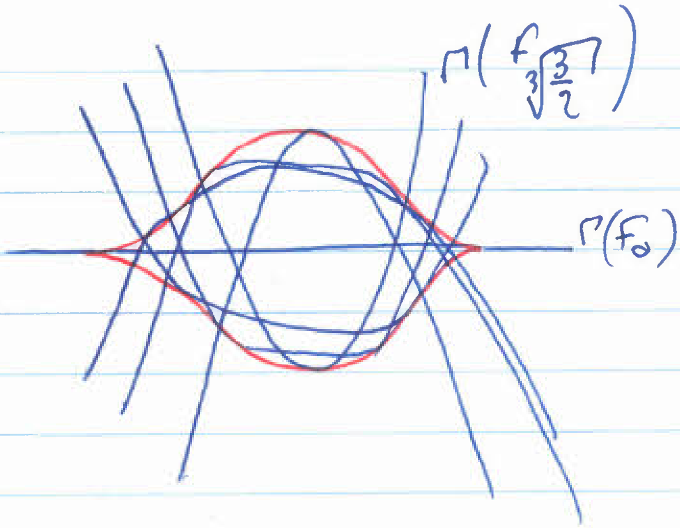
§3 - <u>Cas où $Q = \mathbb{R}^n$</u>

On a vu que $\pi(\Lambda_F) = \bigcup_\eta \{$ val crit de $q \to F($

En pensant à ΛF comme famille de f° $F_\eta : Q \to$
qu'obtient-on?
soit $(q, F(q,\eta)) \subset \pi(\Lambda_F) \cap \Gamma(F_\eta)$
alors par définition $T\pi(\Lambda_F) = T\Gamma($
$\left(1, \text{"}\frac{\partial F}{\partial q}\text{"}\right)$ $\left(1, \text{"}\frac{\partial F}{\partial q}\right.$

$\Rightarrow$ Λ_F est "l'enveloppe" de la famille
$\{F_\eta : Q \to \mathbb{R}\}$ $\eta \in \mathbb{R}^N$

Ex :



$f(q,\eta) = \frac{\eta^3}{3} + (\frac{3}{2})$

Lemme 1 : Soit Λ_f engendrée par $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ alors Λ_f est engendrée par $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N'} \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall\ \eta' \in \mathbb{R}^{N'}$ $\tilde{f}_\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est affine

Dem : Posons $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(q, \eta, x, y) \to F(y,\eta) - \langle x,$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta}(q,\eta,x,y) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(y,\eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(q,\eta,x,y) = q - y$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(q,\eta,x,y) = \frac{\partial f}{\partial q}(y,\eta) + x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = y \\ \frac{\partial C}{\partial \eta}(y,\eta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q}(y,\eta) = -x \end{cases}$$

et en ces point

$F(q,\eta,x,y) = f(q,$

$\frac{\partial F}{\partial q}(q,\eta,x,y) = \frac{\partial f}{\partial q}(y,$

Rem : $\widehat{F}$ n'est pas q.i. mais satisfait les hyp de thm 2

$\Big(|y| > 0 \qquad \widehat{F} \sim \qquad Q_1(q, v, x, y) = \frac{\cancel{f(x,v)}}{Q(x,v)} + x\cdot(q-y)$

Lemme 2 : Soit $\phi : J^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{contacto}} J^1(\mathbb{R}^n)$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ une famille generatrice t.q.
$\forall \eta \in \mathbb{R}^N \quad \pi \circ \phi(j^1 F_\eta))$ est lisse (donc est le graphe de $G_\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) alors G est famil generatrice pour $\phi(\Lambda_F)$

Dem : On note $\phi(q, p, z) = \Big(Q(q, p, z), P(q, p, z$

$\exists\, g(q, p, z) > 0 \qquad dz - PdQ = g(dz - pdq)$

Par hypothèse G est t.q.

$$\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F_\eta(q)\right) \xrightarrow{\phi} \left(Q, P, G_\eta(Q)\right)$$

$\Rightarrow G\Big(Q(q, p, z), \eta \Big) = Z(q, p, z) \quad si \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad z = f($

$\Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial \eta}$ sur $Q\left(q, \frac{\partial f}{\partial q}(q,\eta), f(q,\eta)\right)$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$= P\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial \eta} + g\frac{\partial f}{\partial \eta} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \eta} = P\frac{\partial Q}{\partial \eta} + g$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial \eta}(Q,\eta) = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial F}{\partial q}(q,\eta) = 0$$

et $G(Q,\eta) = \cancel{F(q,\eta)}\ Z(q,p,z)$

sur Λ_F $\Phi(q,p,z) = (Q, P, G(Q,\eta))$ $\boxed{}$

Thm 4 :
Si $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ q.i. engendre Λ_F et $\Lambda_1 \sim \Lambda_F$
Λ_F est engendré par une fonc. g. q.i.

Dem : $\Lambda_t = \phi_t(\Lambda_F)$ pour ϕ_t contact-morph

en décomposant ϕ_t on peut supposer $\|\phi_1\|_{C^1}$ petit

p fixé $\Rightarrow$ $(q,z) \to (Q,Z)$ est difféo

$\cancel{dZ - PdQ = g(dz - pdq)}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Z}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} + P\right) \cdot g$$

Un petit difféo envoie graphe f° affine ($\Rightarrow p$ fixé) sur graphe de fonction

Lemme 2 $\Rightarrow$ $\phi_1(\Lambda_0)$ engendrée par G

§4 - Cas générale

On prend $Q \subset \mathbb{R}^n$ un plongement

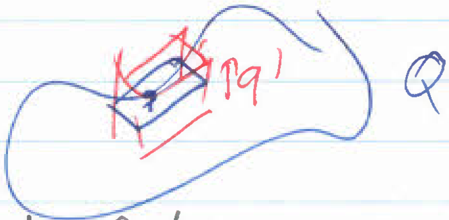
On note $p : J^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ la projection

et $J^1_Q(\mathbb{R}^n) = p^{-1}(Q) = \left\{ (q,p,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} q \in Q \\ p \in T_q^*\mathbb{R}^n \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Soit $P : J^1_Q(\mathbb{R}^n) \to J^1(Q)$

défini par le duale de $i : T_qQ \to T_q\mathbb{R}^n$

Si $(q,\hat{q})$ coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$ tq. q coord sur



alors $\alpha_{\mathbb{R}^n} = dz - p\,dq - \hat{p}\,d\hat{q}$ qui se restreint à sur $J^1_Q(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ $\Sigma \subset J^1(\mathbb{R}^n)$ leg $\pitchfork J^1_Q(\mathbb{R}^n)$

alors $P(\Sigma \cap J^1_Q(\mathbb{R}^n))$ leg ds $J^1(Q)$

Def: Un contactomorphisme $\phi : J^1(Q)$ est compati avec $\Phi : J^1(\mathbb{R}^n)$ si

1) $\Phi(J^1_Q(\mathbb{R}^n)) = J^1_Q(\mathbb{R}^n)$

2) le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} J^1_Q(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\Phi|_{J^1_Q(\mathbb{R}^n)}"'] & J^1(Q) \arrow[d, "\phi"] \\ J^1_Q(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "P"] & J^1(Q) \end{tikzcd}$$

Lemme 3 : Soit $\{\phi_t\} \subset \mathrm{Cont}(J^1(Q))$ t.q. $\phi_0 = $

alors $\exists \{\Phi_t\} \subset \mathrm{Cont}(J^1(\mathbb{R}^n))$ t.q.
$\forall t \in [0,1]$ ϕ_t et Φ_t sont compatible e

Dem : Soit $H_t : J^1(Q) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ l'hamilton
contact associé à $\{\phi_t\}$

$$\left(H(q_0, t_0) = \alpha\Big(\underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \phi_t(q_0)}_{V_t}\Big) \right)$$

Soit $\widehat{H}_t : J^1(\mathbb{R}^n) \times [0,1]$ qui au voisinage de
est donné par
$\widehat{H}_t(q, \hat{q}, p, \hat{p}, z) = H_t($
+ supporté autour de $J^1_Q(\mathbb{R}$

Soit $\widehat{V}_t$ associé à $\widehat{H}_t$ alors
$\begin{cases} \widehat{V}_t \text{ tangent à } J^1_Q(\mathbb{R}^n) \\ P(\widehat{V}_t) = V_t \end{cases}$

car
- $\alpha(\widehat{V}_t) = \widehat{H}_t$
- $\widehat{V}_t = \widehat{H}_t \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{W}_t$ $\quad \widehat{W}_t \in \ker \alpha$
t.q. $\widehat{W}_t \lrcorner\, d\alpha = -d\widehat{H}_t +$

flot de $\widehat{V}_t$ donne Φ_t

Lemme 4 : $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ engendre $\widehat{\Lambda}_F \subset J^1$
alors $F|_{Q \times \mathbb{R}^N}$ engendre $P(\widehat{\Lambda}_F \cap J^1_Q(\mathbb{R}^n))$ ssi
$\widehat{\Lambda}_F \pitchfork J^1_Q(\mathbb{R}^n)$

Dem : Exercice $\Gamma(dF) \pitchfork W$

$\Leftrightarrow$ sur $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$ $\left(\begin{matrix} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial m} \\ \partial^2 F \end{matrix} \right)$ a rg max

Preuve de thm 3

$f : Q \times \mathbb{R}^N$ generatrice pour Λ_0.

soit $\{\phi_t\}$ t.q. $\phi_1(\Lambda_0) = \Lambda_1$

Soit $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ une extension de fonctions

$\Lambda_0 \pitchfork \mathcal{J}'_Q(\mathbb{R}^n)$

et $\{\Phi_t\} \subset \mathrm{Cont}(\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n))$ donné par le le

Thm 4 $\Rightarrow$ $\exists\, \tilde{f}_1$ engendrant $\Phi_1(\tilde{\Lambda}_0)$ ($\pitchfork \mathcal{J}$

par

Lemme 4 $\Rightarrow$ $\tilde{f}_1 \big|_{Q \times \mathbb{R}^N}$ engendre Λ_1 $\boxtimes$