Département de Mathématiques
Université de Nantes

Feuille 1:
Champs de vecteurs.

Exercice 1 :
Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$ donné par $X(q) = q^2$. Pour $q_0 \in \mathbb{R}$ donnez la courbe intégrale de X passant par q_0. Quel est son intervalle de définition maximal ?
Soit $\varepsilon > 0$,le flot de X est-il défini sur $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$? Sur quel intervalle le flot de X est-il défini si on le restreint à (a, b)?

Exercice 2 :
Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$. Soit ϕ_t le flot (local) de X. Montrer que pour tout t l'application ϕ_t est croissante.

Exercice 3 :
Soit $X_t, Y_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $t \in I$ deux champs de vecteurs dépendant du temps. On note ϕ_t et ψ_t les isotopies (locales) induites par X_t et Y_t respectivement (c'est-à-dire que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\phi_t(q) = X_{t_0}(\phi_{t_0}(q))$ et $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\psi_t(q) = Y_{t_0}(\phi_{t_0}(q))$).

1. Montrer que $\phi_t \circ \psi_t$ est induite par $X_t + (\phi_t)_*(Y_t)$.
2. Montrer que $(\phi_t)^{-1}$ est induite par $-(\phi_t^{-1})_* X_t$
3. Soit χ_t l'isotopie induite par X_{1-t}. Montrer que $\chi_1 = \phi_1^{-1}$.

Exercice 4 :
Soit X et Y les champs de vecteurs sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0)|t \geq 0\}$ définis par $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ et $Y(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. On considère le difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathcal{U}$ donné par $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Calculer $(\phi^{-1})_* X$ et $(\phi^{-1})_* Y$.
2. En déduire une intégrale première évidente pour Y.
3. Calculer $[X, Y]$.

Exercice 5 :
Soit X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Soit $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ un difféomorphisme. Montrer que

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y].$$

Exercice 6 : Indentité de Jacobi.
Prouver l'indentité: pour tout champ de vecteurs X, Y, Z sur un ouvert $\mathcal{U}$ on a

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

.

Exercice 7 :
Soit $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$, $U = x\frac{\partial}{\partial x}$ et $V = y\frac{\partial}{\partial x}$. Calculer $[X, Y]$, $[X, U]$, $[X, V]$, $[Y, U]$, $[Y, V]$ et $[U, V]$.

Exercice 8 :
Soit $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ montrer que

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exercice 9 :
Pour une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ on note X_A le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ donné par $X_A(v) = Av$. Pour $A, B \in Gl_n(\mathbb{R})$ calculer $[X_A, X_B]$.