Chapitre 0 : Rappels sur les équations différentielles et les champs de vecteurs

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I un interval de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k.

Remarque : dans ce cours si on omet de préciser la régularité on supposera que $k = \infty$.

Le problème de Cauchy associé est

$$(\star)_{(t_0, x_0)} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que dès que $k \geq 1$ $\forall t_0 \in I$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le problème $(\star)_{t_0, x_0}$ admet une unique solution x définie sur un interval $I_{max}^{t_0, x_0} \subset I$

⚠ L'interval $I_{max}^{t_0, x_0}$ dépend généralement de t_0 et x_0. Il existe des problèmes de Cauchy tels que la taille de $I_{max}^{t_0, x_0}$ est aussi petite que l'on veut. Par exemple déterminer $I_{max}^{t_0, x_0}$ pour $f(t, x) = x^2$. ⚠

Terminology : lorsque le problème de Cauchy ne dépend pas du temps, $(\star)$ est dit autonome. Dans ce cas la fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est appelée un champs de vecteurs

Rem : un champs de vecteurs semble n'être rien d'autre qu'une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. Cependant le $\mathbb{R}^n$ image doit compris comme espace vectoriel (là où vivent les dérivées) alors que le U de départ est un espace topologique.

§1- Flot d'un champs de vecteurs

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un champs de vecteur (C^k).

Soit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ et $\varepsilon > 0$ t.q. $\forall x_0 \in \mathcal{U}'$ le problème $(*)_{(0,x_0)}$ admet une solution sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ que l'on note x_{x_0}

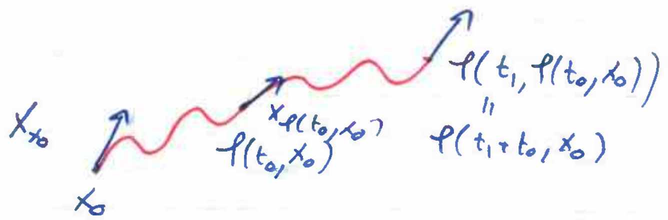
<u>Def</u> : L'application $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ est appelée le <u>flot</u> (local) de f.

$$t, x_0 \to x_{x_0}(t)$$

<u>Notation</u> : On risque d'abandonner la notation f pour un champs de vecteurs et préférer $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

<u>Remarque</u> : il existe plusieurs définitions/point de vue équivalent (c.f. plus tard + cours de géométrie diff.) vous êtes invités à vérifier à chaque fois que ces définitions sont équivalentes

Notons que $\varphi(t_1, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(t_1 + t_0, x_0)$ (par définition du flot et unicité de la solution



et $\varphi(0, x) = x$.

Donc en notant $\varphi_t : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$, $x \to \varphi(t, x)$ on trouve $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ et donc $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = Id$

$\to$ L'application φ_t est donc inversible sur son image. On se pose la question de régularité de celle-ci.

Régularité du flot

Si ces théorèmes n'ont pas été vu auparavant on les admet. On trouvera une preuve dans la plupart des livres sur les equations differentielles.

Thm 1: Si X est un champ de vecteur de classe C^k sur $\mathcal{U}$ alors $\varphi : I \times \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ est de classe C^k.

Combiné à la discussion précédente on obtient que pour tout $t \in I$ l'application $\varphi_t : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ est un difféomorphisme sur sa image.

Critère de globalité

Il existe de nombreux résultats sur le temps de vie d'une solution à une équation différentielle. Dans ce cours nous utiliserons à plusieurs reprise le théorème suivant

Thm 2: Soit $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un champs de vecteur de classe au moins C^1. Si x est une solution du problème de Cauchy associé à X défini sur un interval maximal $]t_-, t_+[$.

Si $t_+ \neq \infty$ alors $\forall K \subset \mathcal{U}$ compact $\exists\, t_0$ t.q. $\forall t > t_0$ $x(t) \notin K$

§2 - Champs de vecteurs et dérivations

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et X un champs de vecteurs C^∞. Soit $x \in \mathcal{U}$ on rappelle que

$$df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ est une application linéaire}$$

On défini la fonction $X \cdot f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ par $X\cdot f(x) = df_x(X(x))$

<u>Thm 3</u> : L'application $\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \to & C^\infty(U) \\ f & \to & X\cdot f \end{array}$ est linéaire

et satisfait $X(fg) = f\cdot X(g) + X(f)\cdot g$ (Leibniz)

· De plus elle caractérise X.

On peut donc penser aux champs de vecteurs comme les applications linéaires satisfaisant Leibniz.

<u>Dem</u>: On ~~comme~~ se donne une application

$$D : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \text{ t.q.}$$

$$D(\lambda\cdot f + g) = \lambda D(f) + D(g) \text{ et } D(f\cdot g) = D(f)\cdot g + f\cdot D(g)$$

et on veut montrer qu'il existe un champs de vecteur

$$X : U \to \mathbb{R}^n \text{ t.q. } D(f) = X\cdot f.$$

Remarquons tout d'abord que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$D(\lambda) = \lambda\cdot D(1). \text{ On}$$

$$D(1) = D(1\cdot 1) = 1\cdot D(1) + D(1)\cdot 1$$
$$= 2D(1)$$

Donc $D(1) = 0 \Rightarrow D(\lambda) = 0$

Par ailleurs un résultat d'Hadamard donne, étant donné $f \in C^\infty(U)$, des fonctions $f_{j,x}$ ~~(x)~~

t.q. $$f(y) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j)\, f_{j,x}(y)$$

et $$f_{j,x}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Ce qui donne $$D(f)(y) = D(f(x))(y) + \sum D(y_j - x_j)(y)\, f_{j,x}(y)$$
$$+ \sum (y_j - x_j)\cdot D(f_{j,x})(y)$$

et donc $$D(f)(x) = \sum D(y_j - x_j)(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Si on pose

$$X(x) = \big(D(y_1 - x_1)(x), \dots, D(y_n - x_n)(x)\big)$$

on obtient bien

$$D(f)(x) = df_x(X(x))$$

On laisse la vérification de la régularité de X en exercice $\boxed{2}$

<u>Notation</u> : à la vue de ce qui précède on écrit

$X(x) = (a_1(x), \dots a_n(x))$ par

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad . \quad \text{En effet } X \cdot f = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

cette notation nous permet désormais de distinguer les fonctions des champs de vecteurs de manière typographique.

Considérons maintenant une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$X \cdot f = 0$$

Soit φ_t le flot (locale) de X alors

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(f \circ \varphi_t(x)\big) = df_x\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x)\Big)$$

$$= df_x(X(x)) = X \cdot f(x) = 0$$

et $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} f \circ \varphi_t(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f \circ \varphi_t(\varphi_{t_0}(x)) = 0$

Donc f est constante le long des trajectoires de X.

Une telle fonction f est appelée une <u>intégrale première</u> (ou quantité conservée) du champs de vecteurs.

<u>Rem</u> : Le théorème 2 a pour corollaire que si X admet une intégrale première f propre alors son flot est défini pour tout temps.

§3- Actions de difféomorphismes (changement de coordonnées)

Soit $\psi : U \to U'$ un difféomorphisme. Un champs de vecteur X sur U devient un champ de vecteur $\psi_* X$ qui est X vu sur U'

$$\begin{array}{ccc} U & & U' \\ X(\psi^{-1}(q)) & \xrightarrow{\psi} & \psi_* X(q) \\ \psi^{-1}(q) & & q \end{array}$$

défini par $\psi_* X(q) = d\psi_{\psi^{-1}(q)}\left(X(\psi^{-1}(q))\right)$

<u>Rem</u> : · il faut bien faire attention aux points d'application ! Si on regarde le point q de U', il correspond au point $\psi^{-1}(q)$ dans U.

· Parfois on trouve la notation $\psi^* X := (\psi^{-1})_* X$

On peut regarder ce que donne la dérivation associée à $\psi_* X$. On calcul pour $f : U' \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi_* X \cdot f(q) &= df_q(\psi_* X(q)) \\ &= df_q\left(d\psi_{\psi^{-1}(q)} X(\psi^{-1}(q))\right) \\ &= d(f\circ\psi)_{\psi^{-1}(q)}\left(X(\psi^{-1}(q))\right) \\ &= X\cdot(f\circ\psi)(\psi^{-1}(q)) \end{aligned}$$

et donc $\psi_* X \cdot f = (X\cdot(f\circ\psi))\circ\psi^{-1}$

⚠ point d'application ⚠

Naturellement le flot de $\psi_* X$ est celui de X conjugué par ψ :

<u>Thm 4</u> : $\varphi^t_{\psi_* X} = \psi \circ \varphi^t_X \circ \psi^{-1}$

Dem : Il suffit de vérifier que $\forall p \in \mathcal{U}'$

$\psi \circ \varphi_X^t \circ \psi^{-1}(p)$ est solution du problème de CY associé à $\psi_* X$. Or

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \psi \circ \varphi_X^t \circ \psi^{-1}(p) = d\psi_{\varphi_X^t(\psi^{-1}(p))}\left(X(\varphi_X^t \circ \psi^{-1}(p))\right)$$

$$= \psi_* X(\psi \circ \varphi_X^t \circ \psi^{-1}(p))$$

$\boxtimes$

Corollaire 5 : Si $\psi : \mathcal{U} \tilde{\to} \mathcal{U}$ est tel que $\psi_* X = X$ alors

$$\varphi_X^t \circ \psi = \psi \circ \varphi_X^t$$

Dans ce cas ψ est en général appelé une symétrie infinitésimale de X

§4 - Dérivée de Lie et crochet de Lie :

On introduit la notion suivante :

Def : Soit X, Y deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$.

On défini la dérivée de Lie de Y le long de X par

$$\mathcal{L}_X Y(p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_*^{-t} Y(p)$$

c'est un champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$.

On remarque facilement

- $\mathcal{L}_X(\lambda Y_0 + Y_1) = \lambda \mathcal{L}_X Y_0 + \mathcal{L}_X Y_1$
- $\mathcal{L}_X f \cdot Y = (X \cdot f) Y + f \mathcal{L}_X Y$

D'autre propriétés découleront de la comparaison entre la dérivée de Lie et le crochet de Lie que nous définissons maintenant.

Def : Soit X, Y deux champs de vecteurs.
On définit $[X,Y] : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ par

$$[X,Y]\cdot f = X(Y\cdot f) - Y\cdot(X\cdot f)$$

C'est un champs de vecteurs :

$$[X,Y]\cdot(f\cdot g) = X((Y\cdot f)\cdot g) + X(f\cdot(Y\cdot g)) - Y\cdot((X\cdot f)\cdot g) - Y(f\cdot(Xg))$$

$$= X\cdot(Y\cdot f)\cdot g + (Y\cdot f)\cdot\cancel{(X\cdot g)} + \cancel{(Xf)(Yg)} + f\, X(Y(g))$$

$$- Y(Xf)\cdot g - \cancel{X\cdot f\, Yg} - \cancel{(Yf)(Xg)} - f\, Y(X g)$$

$$= ([X,Y]\cdot f)g + f[X,Y]\cdot g$$

On trouve facilement :

$$\begin{cases} [X,fY] = (X\cdot f)\cdot Y + f[X,Y] \\ [X,Y] = -[Y,X] \\ [X, \lambda Y_0 + Y_1] = \lambda[X,Y_0] + [X,Y_1] \end{cases}$$

Ces deux opérations sont en fait les mêmes

Thm 6 : $\forall$ X, Y champs de vecteurs on a

$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$$

Dem : On commence par calculer

$$[X,Y]\cdot f(q) = X(Y\cdot f)(q) - Y\cdot(X\cdot f)(q)$$

$$= d(Y\cdot f)_q(X(q)) - d(X\cdot f)_q(Y(q))$$

en considérant X et Y comme des fonctions $U \to \mathbb{R}^n$ on trouve

$$d(X\cdot f)_q(H) = d^2 f_q(H,X) + df_q(dX_q(H))$$

et donc

$$[X,Y]\cdot f(q) = df_q\left[dY_q(X(q)) - dX_q(Y(q))\right]$$

D'un autre côté

$$\mathcal{L}_X Y(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\varphi_X^{-t})_{\varphi_X^t(q)} \left(Y(\varphi_X^t(q))\right)$$

$$= d\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_X^{-t}(\cancel{\varphi_X^t(q)})\right)(Y(q)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\varphi_X^t(q)) \quad + d_2\,Id(\cancel{X},Y)^{0}$$

$$= -dX_q(Y(q)) + dY_q(X(q))$$

qui appliqué à une fonction f donne le résultat □

Dans le même esprit que le Corollaire 5 on trouve :

<u>Thm 7</u>: Soit X, Y deux champs de vecteurs t.q. $[X,Y]=0$ alors $\forall s,t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_s^X \circ \varphi_t^Y = \varphi_t^Y \circ \varphi_s^X \quad (\text{« les flots commutent »})$$

<u>Dem</u>: c'est un calcul similaire à ce qui a déjà été fait.

La propriété $\mathcal{L}_X Y = 0$ donne $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_X^{-t})_* Y = 0$

On calcule $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\varphi_X^{-t})_* Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_X^{-t_0}\circ\varphi_X^{t})_* Y$

$$= (\varphi_X^{-t_0})_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_X^t)_* Y\right) = 0$$

Donc $(\varphi_X^{-t})_* Y$ est constant le long de t.

Or en $t=0$ $\varphi_X^{-t} = Id \Rightarrow (\varphi_X^{-t})_* Y = Y$

et donc le Corollaire 5 permet de conclure

□

§ 5- Remarque sur le cas non-autonome

Un problème de Cauchy classique

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Devient un champs de vecteur sur $\mathcal{U} \times I$ en écrivant

$$(*)' = \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ \dot{t} = 1 \\ \cancel{x(t)}\ (x_0, t_0) \text{ condition initiale} \end{cases}$$

Le champs de vecteur associé est donc

$$\bar{X} = \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(q, t) \to (X(q), 1)$$

On peut prendre tout les résultat pour $\bar{X}$ et en déduire des résultats pour $(*)$.

On parle parfois de $f(t,x)$ comme étant un champs de vecteur dépendant du temps, il induit une <u>isotopie</u> φ^t donnée par : $\varphi^t(q)$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi^t(q) = f(t_0, \varphi^{t_0}(q)) \\ \varphi^0(q) = q \end{cases}$$

⚠ On n'a plus $\varphi^{t_1+t_2} = \varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2}$ ⚠