Chapitre 1 : Equations Hamiltoniennes.

Dans tout ce chapitre les ouverts U sont dans $\mathbb{R}^{2n}$ et on écrit les coordonnées $(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)$.

§1- Définitions et premiers résultats

Soit $H : U \to \mathbb{R}$ une fonction (C^∞).

Def 1 : Le champs de vecteur Hamiltonien associé à H est

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial}{\partial q_n} - \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} - \cdots - \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial}{\partial p_n}$$

On l'écrit de manière plus concise

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$

Ex : Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction (potentielle) on construit $H(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots p_n^2) - V(q_1 \cdots q_n)$ et on trouve

$$X_H = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \cdots + p_n \frac{\partial}{\partial q_n} - \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} - \cdots - \frac{\partial V}{\partial q_n}\frac{\partial}{\partial p_n}$$

$\gamma(t)$ est une solution du problème de Cy associé si
$\overset{\shortparallel}{(q(t), p(t))}$ $\quad q_i'(t) = p_i(t)$ et $(p_1'(t), \ldots, p_n'(t)) = -\text{grad}\, V(q_1(t) \ldots q_n(t))$

c'est à dire que l'accélération des q_i est donné par $-\text{grad}\, V$ $\leadsto$ ce sont les équations de la mécanique classique.

On remarque le premier résultat :

Thm 2 : Soit X^H le champ Hamiltonien associé à une fonction $H : U \to \mathbb{R}$. Alors $X^H \cdot H = 0$

Dem : On calcule simplement

$$X^H \cdot H(q_0 p_0) = (dH)_{(q_0, p_0)} \left(\sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

$$= \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \boxed{\text{3}}$$

Donc H est constante le long des courbes integrales de X^H.

Un corollaire du théorème 2 du chapitre précédent est

Cor 3 : Si H est propre alors le flot de X^H est défini pour tout temps.

§2- Invariant de Poincaré

Soit $H : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Soit X^H le champs Hamiltonien associé et $\varphi_t^H : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ son flot (local). Le théorème suivant (qui remonte à Poincaré) est la motivation principale de la définition de variété symplectique :

Thm 3 : Soit x, y deux variables quelconque parmis $(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)$ alors si $\varphi_t^H(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = (a_1^t, \dots, a_n^t, b_1^t, \dots b_n^t)$ la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x} \frac{\partial b_i}{\partial y} - \frac{\partial b_i}{\partial x} \frac{\partial a_i}{\partial y} \right)$$ ne dépend pas de $t \in I$.

Dem : Tout d'abord on rappelle que par définition

$$\frac{da_i^t}{dt}(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(a_1^t(q,p), \dots, b_n^t(q,p))$$

et donc que $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x} \frac{da_i^t}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} a_i^t = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \frac{\partial a_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial b_j}{\partial x}$

De même on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{db_i^t}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} b_i^t = \sum_{j=1}^{n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial a_j}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \frac{\partial b_j}{\partial x}$$

On veut vérifier $\frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x}\frac{\partial b_i}{\partial y} - \frac{\partial b_i}{\partial x}\frac{\partial a_i}{\partial y}\right) = 0$ ☆

Or $\frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x}\frac{\partial b_i}{\partial y} - \frac{\partial b_i}{\partial x}\frac{\partial a_i}{\partial y}\right) = +\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x}\right)\frac{\partial b_i}{\partial y} + \frac{\partial a_i}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial b_i}{\partial y}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x}\right)\frac{\partial a_i}{\partial y} + \frac{\partial b_i}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial a_i}{\partial y}\right)$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\cancel{\frac{\partial a_j}{\partial x}}\frac{\partial b_i}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\cancel{\frac{\partial b_j}{\partial x}\frac{\partial b_i}{\partial y}} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\cancel{\frac{\partial a_j}{\partial y}}\frac{\partial a_i}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\cancel{\frac{\partial b_j}{\partial y}}\frac{\partial a_i}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\cancel{\frac{\partial a_j}{\partial x}}\frac{\partial a_i}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\cancel{\frac{\partial b_j}{\partial x}}\frac{\partial a_i}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\cancel{\frac{\partial a_j}{\partial y}}\frac{\partial b_i}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\cancel{\frac{\partial b_j}{\partial y}\frac{\partial b_i}{\partial x}} = 0$$

$\boxed{2}$

On introduit la quantité

$$\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{où } \pi_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$$
$$V, W \longrightarrow \sum \det(\pi_i(V), \pi_i(W)) \qquad (q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \to (q_i, p_i)$$
$$= \sum_i (v_i w_i' - v_i' w_i)$$

Alors le théorème 3 implique

$$\omega_0(V, W) = \omega_0\left(d\varphi^t_{(q,p)}(V), d\varphi^t_{(q,p)}(W)\right) \ \forall (q,p) \in \mathcal{U}.$$

En effet cette quantité est linéaire en chaque variable et le théorème 3 donne le résultat sur la base canonique $\left\langle \frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial}{\partial p_n} \right\rangle$

<u>Remarque 4</u> : • Soit $V = v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial q_n} + w_1' \frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + v_n' \frac{\partial}{\partial p_n}$

alors $\omega_0(\cancel{V, X^H} X^H V) = \sum w_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + v_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = dH(V)$

• Si V et V' sont tel que $\omega_0(V, W) = \omega_0(V', W) \, \forall W$ alors $V = V'$

Au chapitre 3 nous étudierons plus en profondeur les aspects linéaires de cette quantité ω_0.

§ 3 - Transformations symplectiques

Def 5 : Soit $\mathcal{U}', \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ deux ouverts et $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$.

ψ est dit symplectique si $\forall (q,p) \in \mathcal{U}$ et $V, W \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\omega_0 (d\psi_{(q,p)} V, d\psi_{(q,p)} W) = \omega_0 (V, W).$$

On a donc vu que le flot d'un champs de vecteurs hamiltonien était symplectique. On définit

Def 6 : Soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ un difféomorphisme. φ est dit hamiltonien si il existe $H : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ telle que l'isotopie φ^t définit par le champs non autonome X^{H_t} ($H_t(q,p) = H(t,q,p)$) est telle que

$$\varphi^1 = \varphi.$$

Le m calcul que précédemment donne

Thm 7 : Un difféomorphisme hamiltonien est symplectique

Rem. Nous étudierons plus en profondeur la différence entre difféomorphisme symplectique et hamiltoniens.

Les transformations symplectiques changent les champs de vecteurs hamiltoniens de manière cohérentes :

Thm 8 : Soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ une transformation symplectique. Soit $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. alors

$$\varphi_* X_H = X_{H \circ \varphi^{-1}}$$

Dem : On a $\omega_0 (\varphi_* X_H(q), V) = \omega_0 (d\varphi_{\varphi^{-1}(q)} X_H(\varphi^{-1}(q)), V)$

$= \omega_0 (X_H(\varphi^{-1}(q)), d\varphi^{-1}_q (V)) = dH_{\varphi^{-1}(q)} d\varphi^{-1}_q (V)$

et $\cancel{\omega_0 (X_{H\circ\varphi^{-1}}, V)} = d(H \circ \varphi^{-1})_q (V) = \omega_0 (X_{H\circ\varphi^{-1}}(q), V)$

La remarque 4. permet de conclure $\square$

Cela nous permet de prouver:

Thm 9 : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors
$Symp(\mathcal{U}) = \{ f : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \mid f$ est symplectique$\}$ est un groupe.

$Ham(\mathcal{U}) = \{ f : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \mid f$ est hamiltonien$\}$ est un sous groupe normal de $Symp(\mathcal{U})$.

Dem: L'énoncé pour $symp(\mathcal{U})$ est évident.
Pour $Ham(\mathcal{U})$ on procède comme suit.
Soit $f, \psi \in Ham(\mathcal{U})$. Alors $\exists \{f_t\}$ et $\{\psi_t\}$ deux isotopies hamiltoniennes engendrées par H_t et G_t respectivement.

On note X_{H_t} et X_{G_t} les champs de vecteurs associés.
Alors l'exercice de la feuille 1 donne que l'isotopie $\{f_t \circ \psi_t\}$ est engendrée par $X_{H_t} + (f_t)_* X_{G_t}$.

$$\text{Or } \omega_0 (X_{H_t} + (f_t)_* X_{G_t}, V) = \omega(X_{H_t}, V) + \omega((f_t)_* X_{G_t}, V)$$
$$= dH_t(V) + d(G \circ f_t^{-1})(V)$$
$$= \omega_0(X_{H_t + G_t \circ f_t^{-1}}, V).$$

Donc $\{f_t \circ \psi_t\}$ est engendrée par la fonction $H_t + G_t \circ f_t^{-1}$ et donc $f \circ \psi$ est hamiltonien.
De même $\{f_t^{-1}\}$ est engendrée par $-(f_t^{-1})_* X_{H_t}$

$$\text{Or } \omega_0 (-(f_t^{-1})_* X_{H_t}, V) = -d(H_t \circ f_t)(V)$$
$$= \omega_0(- X_{H_t \circ f_t}, V)$$

et donc $\{f_t^{-1}\}$ est engendrée par $-H_t \circ f_t$ et donc $f^{-1} \in Ham(\mathcal{U})$.
Pour la normalité de $Ham(\mathcal{U})$ on se donne $f \in Ham(\mathcal{U})$ engendré par H_t et $\psi \in Symp(\mathcal{U})$

L'isotopie $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ satisfait

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}(q) = d\psi_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}}\left(X_{H_{t_0}}(\varphi_{t_0}(\psi^{-1}(q)))\right)$$

et $\omega_0\left(d\psi_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)}\left(X_{H_{t_0}}(\varphi_{t_0}(\psi^{-1}(q))\right), V\right)$

$$= \omega_0\left(X_{H_{t_0}}(\varphi_{t_0}(\psi^{-1}(q))), (d\psi_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)})^{-1}(V)\right)$$

ψ symplectique

$$= (dH_{t_0})_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)}\left(d\psi_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)}\right)^{-1}(V) = (dH_{t_0})_{\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)}(d\psi^{-1})_{\psi\circ\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}}(V)$$

$$= d(H_{t_0}\circ\psi^{-1})_{\psi\circ\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)}(V)$$

$$= \omega_0\left(X_{H_{t_0}\circ\psi^{-1}}(\psi\circ\varphi_{t_0}\circ\psi^{-1}(q)), V\right)$$ et donc $\{\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}\}$

est engendrée par $X_{H_t\circ\psi^{-1}}$ et donc $\psi\circ\varphi\circ\psi^{-1} \in \mathrm{Ham}(M)$ $\square$

§3 - Examples:

ⓐ "Transformé de Legendre"

$$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$(q_1, \dots q_n, p_1 \cdots p_n) \longrightarrow (-p_1, \dots, -p_n, q_1, \dots q_n)$$

est Hamiltonienne engendré par

$$H(q_1, \dots q_n, p_1 \cdots p_n) = -(q_1^2 + \dots + q_n^2 + p_1^2 + \cdots p_n^2)$$

En effet on trouve

$$X_H = \sum \left(-p_i \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

et donc $\varphi_H^t(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = (\cos t\, q_1 - \sin t\, p_1, \dots, \cos t\, q_n - \sin t\, p_n,$
$\sin t\, q_1 + \cos t\, p_1, \dots, \sin t\, q_n + \cos t\, p_n)$

$$\varphi_H^{\frac{\pi}{2}} = \varphi.$$

(b) "Symplectification de difféomorphismes"

Soit $f : \mathcal{U} \in \mathbb{R}^n \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$.

On définit $\tilde{f} : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$

$(q, v) \to (f(q), (df^{-1}_{f(q)})^T v)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ((df_q)^{-1})^T$

On calcul

$$d\tilde{f}_{q,v}((w_0, w_1)) = (d\tilde{f}_q(w_0), (d_2 f^{-1}(df_q w_0))^T v + (df^{-1}_{f(q)})^T w_1)$$

et donc

$\omega_0(d\tilde{f}_{q,v}(w_0, w_1), d\tilde{f}_{q,v}(w_0', w_1'))$

$= \langle (d_2 f^{-1} df_q w_0')^T v, df_q(w_0) \rangle + \langle (df^{-1}_{f(q)})^T w_1', df_q(w_0) \rangle$

$- \langle d_2 f^{-1}(df_q w_0)^T v, df_q(w_0') \rangle - \langle (df^{-1}_{f(q)})^T w_1, df_q(w_0') \rangle$

$= \langle v, d_2 f^{-1}(df_q w_0', df_q(w_0)) \rangle + \langle w_1', w_0 \rangle$

$- \langle v, d_2 f^{-1}(df_q(w_0), df_q(w_0')) \rangle - \langle w_1, w_0' \rangle$

$= \omega_0((w_0, w_1), (w_0', w_1'))$

et donc $\tilde{f}$ est symplectique

(c) Une version plus naturelle

Le symplectomorphisme précédent (et en fait toute la géométrie symplectique) devient plus naturel si on identifie $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ où $(p_1 \cdots p_n)(q_1 \cdots q_n) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot q_i$.

Alors $\omega_0((v_0, \alpha_0), (v_1, \alpha_1)) = \alpha_1(v_0) - \alpha_0(v_1)$

Ainsi si $f : \mathcal{U} \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$

alors $dF_{(q,\alpha)} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$

et la condition symplectique devient

$$\omega_0\left(dF_{(q,\alpha)}(v_0,\alpha_0), dF_{(q,\alpha)}(v_1,\alpha_1)\right) = \alpha_1(v_0) - \alpha_0(v_1)$$

Ainsi si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to U' \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \bar{f} : U \times (\mathbb{R}^n)^* &\to U \times (\mathbb{R}^n)^* \\ q, \alpha &\to \left(f(q), (df^*_{|q})^{-1}\alpha\right) \end{aligned}$$ est symplectique.

(d) ~~Sym.~~ Transformation symplectique en dimension 2

Lemme 10 : Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to U' \subset \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme

alors $\exists\, \psi : [0,1] \times [0,1] \to U' \subset \mathbb{R}^2$ t.q.

$\psi \circ f$ est symplectique.

Dem : On note $h(x,y) = \det df_{(x,y)}$.

On suppose $h(x,y) > 0$ (sinon on remplace f par $f\circ s$ où $s(x,y) = (x,-y)$)

Soit $$\begin{aligned} \psi : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ x, y &\to \left(x, \int_0^y \frac{1}{h(x,t)}\,dt\right) \end{aligned}$$

alors $d(\psi \circ f) = d\psi_{|(x,y)} \circ df_{|(x,y)}$ et donc

$\det d\psi\circ f = 1 \Rightarrow \psi \circ f$ est symplectique. $\square$

§4 - Variétés symplectiques

On donne maintenant notre première définition de variétés symplectiques. Ce sont des espaces qui localement ressemblent à $\mathbb{R}^{2n}$ et tels que les changements de point de vue soient symplectiques

Définition 11 : Un espace topologique Hausdorff M est ~~dit~~ une variété symplectique si $\exists\ (U_i)_{i\in I}$ ouvert $\subset M$ t.q.

ⓐ $\forall q\in M\ \exists\ i_0\quad q\in U_{i_0}$ ($\{U_i\}$ recouvre M)

ⓑ $\forall i\quad \exists\ \varphi_i : U_i \xrightarrow[\text{bijection}]{\text{homeo.}} V_i \underset{\text{ouvert}}{\subset} \mathbb{R}^{2n}$

ⓒ $\forall i,j\quad \psi_{ij} : \varphi_i(U_i\cap U_j) \xrightarrow[\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}]{} \varphi_j(U_i\cap U_j)$ est symplectique

Définition 12 : La collection $\{U_i\}$ de la définition précédente est appelée un atlas symplectique. Un couple $\{(U_i,\varphi_i)\}$ une carte

· Deux atlas $\{(U_i,\varphi_i)\}$ et $\{(U_i',\varphi_i')\}$ sont équivalents si $\{(U_i,\varphi_i)\}\cup\{(U_i',\varphi_i')\}$ est un atlas symplectique.

· Une structure symplectique est une classe d'équivalence d'atlas symplectique.

Note : Si M est une variété symplectique alors elle est munie d'une topologie uniquement déterminée par

· U_i est ouvert

· φ_i est un homéomorphisme $\quad\forall i\in\mathbb{N}$.

On demande que pour cette ~~Avec cette topologie~~ topologie M est un espace Hausdorff, séparable et paracompact.

Définition 13 : Une bijection $\varphi : M\to M'$ entre deux variétés symplectiques est un symplectomorphisme si

$\forall\ (U_i,\varphi_i)$ carte de M et (U_j',φ_j') carte de M'

$$\begin{array}{ccc} \varphi :\ U_i\cap\varphi^{-1}(U_j') & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U_i)\cap U_j' \\ \uparrow \varphi_i^{-1} & & \downarrow \varphi_j' \\ \varphi_i(U_i\cap\varphi^{-1}(U_j')) & \xrightarrow{\text{symplectique}} & \varphi_j'(\varphi(U_i)\cap U_j') \end{array}$$

alors $df_{(q,\alpha)} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$

et la condition symplectique est

$$\omega_0\big(df(V_0,\alpha_0), df(V_1,\alpha_1)\big) = \alpha_1(V_0) - \alpha_0(V_1)$$

Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$ ~~alors~~
$(df_q)^{-1} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à un dual $(df^{-1})^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

et la construction précédente est

$$\bar{f} : \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{U}' \times (\mathbb{R}^n)^*$$
$$(q, \alpha) \mapsto \left(f(q), (df^{-1}_{f(q)})^* \alpha\right)$$

Comme dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$, les fonctions sont des sources de symplectomorphismes. En effet soit $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction t.q. $\forall (\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ $H \circ \varphi_i^{-1}$ est C^∞. Soit $q \in M$ on appelle ~~On dénote~~ $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ <u>trajectoire Hamiltonienne</u> de H partant de q la courbe t.q.

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi_i(\gamma(t)) = X_{H\circ\varphi_i} & \text{si } \gamma(t) \in \mathcal{U}_i \\ \gamma(0) = q \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : le théorème 8 combiné avec ~~l'exercice~~ Thm 4 du chapitre 0 implique que le problème est bien posé : il ne dépend pas du choix de la carte $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$.

. Une fois que vous aurez vu la notion de champs de vecteurs sur les variétés, on verra que le vecteur $X_H(q)$ défini par $X_{H\circ\varphi_i}(\varphi_i(q))$ est un champ de vecteur sur M. Ce champs est appelé le <u>champs Hamiltonien</u> associé à H.

Si $\forall q$ les courbes intégrales sont définie sur $]-\eta,\eta[$
alors on définit $\varphi_t : M \to M$ le flot (bien défini)
$q \to \gamma_q(t)$ pour $t \in [-1,1]$

le théorème 3 donne que c'est un symplectomorphisme.

De m̂ si $H : I \times M \to \mathbb{R}$ alors on construit une isotopie $\{\psi_t\}$ comme précédemment. Les symplectomorphismes arrivant ainsi sont appelés les <u>difféomorphismes Hamiltoniens</u> de M.

On note $\mathrm{Symp}(M) = \{ \varphi : M \to M \mid \varphi \text{ symplectomorphisme} \}$
et $\mathrm{Ham}(M) = \{ \varphi : M \to M \mid \varphi \text{ difféomorphisme Hamiltonien} \}$

on a

<u>thm 14</u>

$\mathrm{Symp}(M)$ est un groupe et $\mathrm{Ham}(M)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Sym}(M)$.

On pourrait résumer que la topologie symplectique prend son origine dans l'étude des liens entre certaines propriétés de symplectomorphismes ou difféomorphisme Hamiltoniens à la topologie de M et de ses sous-variétés

Au chapitre 3 nous verrons une définition plus manipulable de variété symplectiques. Pour l'instant nous allons nous convaincre que celle-ci est peu pratique en étudiant quelques exemples.

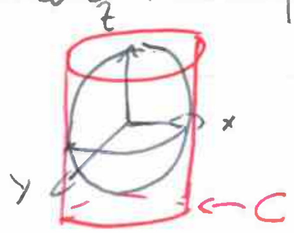
§ 5 - Premiers exemples

(a) La sphère (Archimède)

Soit $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

Archimède remarque que $p : S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to C$

$$(x,y,z) \to \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z\right)$$



préserve ~~le volu~~ l'aire

en "déroulant" C sur $\mathbb{R}^2$ on obtient des cartes

$$U_z = \left\{ (x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} z \neq \pm 1 \\ \cancel{x \neq 0} \\ \cancel{x \neq y \neq 0} \\ y > 0 \end{array} \right\}$$

$$U'_z = \left\{ (x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} z \neq \pm 1 \\ \cancel{x \neq 0} \\ x > 0 \end{array} \right\}$$

avec des applications

$$\varphi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to \left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), z\right)$$

$$\varphi'_z : U'_z \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to \left(\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1-z^2}}\right), z\right)$$

on défini de même

$$U_x = \left\{ (x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \neq \pm 1 \\ z > 0 \end{array} \right\} \text{ et } U'_x = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \neq \pm 1 \\ y > 0 \end{array} \right\}$$

et $U_y = \left\{ (x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y \neq \pm 1 \\ x > 0 \end{array} \right\}$ et $U'_y = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} y \neq \pm 1 \\ z > 0 \end{array} \right\}$

ainsi que les applications $\varphi^{(\prime)}_{y,x}$ similaires

Un calcul long montre que les ~~transi~~ fonctions de transition ~~sont~~ préservent toute le volume.

• Pour passer de φ_i à φ_i', on effectue une translation

· Pour passer par exemple de φ_x à φ_z on a

$$\psi_{xz} : (-1,1)\times(0,\pi) \to (0,\pi)\times(-1,1)$$
$$(u,v) \to \left(\arccos\left(\frac{u}{\sqrt{\sin^2 u + u^2\cos^2 v}}\right), \sqrt{1-u^2}\cos v\right)$$

en effet $\varphi_x(x,y,z) = \left(x, \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$

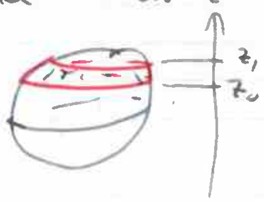
$\varphi_z(x,y,z) = \left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), z\right)$

et donc $\psi_{xz} = \varphi_z \circ \varphi_x^{-1}$

sa jacobienne est

$$J\psi_{xz} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin v}{(\sin^2 v + u^2\cos^2 v)\sqrt{1-u^2}} & +\frac{u\cos v\sqrt{1-u^2}}{\sin^2 v + u^2\cos^2 v} \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos v & -\sqrt{1-u^2}\sin v \end{pmatrix}$$

qui a determinant 1.

Rem. evidemment Archimède n'est pas aussi stupide et en plus ne connait pas la dérivée de arccos. Il remarque que l'aire  est $2\pi(z_1-z_0)$ et raisonne par symétrie.

Ce calcul n'a pour but que de montrer que notre définition de variété symplectique n'est pas facile à manipuler. Mais continuons....

(6) "Cotangent"

Soit Q une variété. Soit $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas.

~~On considère~~

Soit $\overline{\varphi}_{ij} : \tau_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times (\mathbb{R}^n)^* \to \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times (\mathbb{R}^n)^*$

les applications de §3 c).

Alors $T^*Q = \bigcup_i \mathcal{U}_i \times (\mathbb{R}^n)^* \Big/ (x,\alpha) \sim \overline{\varphi}_{ij}(x,\alpha)$

avec son atlas evident est symplectique.

C'est le fibré cotangent de Q.

On y reviendra...

(c) "Surface orientable"

Soit Σ une surface orientable, c.a.d

$\exists\ (\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ atlas $\varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^2$ et

$\det(d\psi_{ij}) > 0$

On a

Lemme 15 : $\exists\ f_i : \varphi_i(\mathcal{U}_i) \to \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall i,j$

$$\det(d\psi_{ij}(q)) = \frac{f_i(q)}{f_j(\psi_{ij}(q))}$$

L'existence de ces fonctions nous permette de construire un atlas symplectique :

Soit $\psi_i : \varphi_i(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i'$ t.q. $\det d\psi_i(q) = \frac{1}{f_i(q)} f_i(q)$

~~et soit~~ garanti par §3 (d) (on suppose que $\varphi_i(\mathcal{U}_i) = [0,1]\times[0,1]$)

alors $(\mathcal{U}_i, \psi_i \circ \varphi_i)$ est un nouvelle atlas tel que

$\det(\psi_j \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \psi_i^{-1}) = \det d\psi_j(\varphi_{ij} \circ \psi_i^{-1}(q)) \cdot \det d\varphi_{ij}(\psi_i^{-1}(q))$
$\cdot \det d\psi_i^{-1}(q)$

$$= \cancel{\sum} \ f_j\left(\varphi_{ij}\left(\psi_i^{-1}(q)\right)\right) \cdot \det d\varphi_{ij}\left(\psi_i^{-1}(q)\right) \cdot \frac{1}{f_i\left(\psi_i^{-1}(q)\right)}$$

$= 1$ par hypothèse.

On prouve maintenant le lemme 15 :

Dem (idée) On procède de proche en proche si $\{f_i\}$ sont définie sur $U_0 \cdots U_j$ on définit f_{j+1} par extension. La remarque $\det(\psi_{jk}) \cdot \det(\psi_{ij}) = \det \psi_{ik}$ garantit qu'on n'a pas de contradiction.

Les détails sur le bon choix des f_i de sorte que cette extension soit possible est laissé en ~~exten~~ exercice.

$\square$

On procède maintenant à une étude plus approfondie de l'application bilinéaire ω_0