Chapitre 2 : Algèbre linéaire symplectique

§1- Espace vectoriel symplectique

Soit V un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$)

Def 1 : Une forme symplectique ω sur V est une application bilinéaire
$$\omega : V \times V \to \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

1. $\omega(v,v) = -\omega(V,u)$ $\left(\iff \omega(u,u)=0\right)$
2. ω est non dégénérée ($u \in V$ t.q. $\forall v$ $\omega(v,v)=0 \Rightarrow v=0$)

(V,ω) est appelé un espace vectoriel symplectique

ω est non-dégénérée $\iff$ $\omega^{\#} : V \to V^*$, $u \to (v \to \omega(v,v))$ est un isomorphisme

On note son inverse $\omega^b : V^* \to V$

Si $e_1 \cdots e_m$ est une base de V la matrice $(A_\omega)_{ij} = e_i \omega e_j$ est la matrice de ω dans la base (e_i). Par 1 elle est antisymétrique et par 2 elle est inversible.

Donc $\det(A_\omega) \neq 0$
$$\det(A_\omega^T) = (-1)^m \det(A_\omega)$$
donc m est pair

Ex :

a) $V = \mathbb{R}^{2n}$ $\quad \omega_0((q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n), (q_1' \cdots q_n', p_1' \cdots p_n'))$
$$= \sum p_i' q_i - p_i q_i'$$

b) W est un espace vectoriel
$$V = W \oplus W^* \quad \omega_0((V,\alpha),(V',\alpha')) = \alpha'(V) - \alpha(V')$$

(c) Soit V un espace vectoriel complexe et
$h : V \times V \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne
($h(\lambda v, \mu w) = \lambda \bar{\mu}\, h(v,w)$, non dégénérée
$h(w,v) = \overline{h(v,w)}$)

on écrit $h(v,w) = g(v,w) + i\,\omega(v,w)$ $\quad g(v,w), \omega(v,w) \in \mathbb{R}$
alors ω est antisymétrique
Soit v t.q. $\omega(v,w) = 0 \ \forall w \in V$ alors
$h(v,w) \in \mathbb{R} \ \forall w \Rightarrow h(iv,w) = 0 \ \forall w$
$\Rightarrow v = 0$

Donc ω est une forme symplectique.

<u>Def 2</u>: Soit (V,ω) un espace symplectique. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. L'<u>orthogonal symplectique</u> W^ω de W est $W^\omega = \{ v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \ \forall w \in W \}$

Si $\omega_W : V \to W^*$ alors $W^\omega = \ker \omega_W$
$v \mapsto (w \mapsto \omega(v,w))$

or ω_W est surjective car ω est non dégénérée
En effet soit $\alpha \in W^*$ on l'étend à $\bar{\alpha} \in V^*$
$\exists\, v$ t.q. $\omega^\#(v) = \bar{\alpha} \Rightarrow \omega_W(v) = \alpha$.

Donc $\dim V = \dim W + \dim W^\omega$

<u>Def 3</u>: (1) W est isotrope si $W \subset W^\omega$ ($\Rightarrow \dim W \leq n$)
(2) W est co-isotrope si $W^\omega \subset W$ ($\Rightarrow \dim W \geq n$)
(3) W est lagrangien si $W^\omega = W$ ($\Rightarrow \dim W = n$)

<u>Rem</u>: on a vu au chapitre précédent que $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$
or G est constante du mouvement de X_H si $\omega(\cancel{X_H}, X$
$dG(X_H) = 0 \Rightarrow \omega(X_G, X_H) = 0 \Rightarrow \langle X_G, X_H \rangle$ isotrope
et ainsi de suite $\Rightarrow$ les isotropes sont importantes pour comprendre les traj. hamiltoniennes.

Ex :

(a) Soit $v \in V$ alors $\omega(v,v) \equiv 0 \Rightarrow \langle v \rangle \subset \langle v \rangle^{\omega}$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ est isotrope

(b) Soit $W \subset V$ de codimension 1 alors

si $W^{\omega} \not\subset W$ $\exists$ $v \notin W$ t.q $v \in W^{\omega}$

$\omega(v,v) = 0$ et $\omega(v,w) = 0 \ \forall w \in W$

$\Rightarrow$ $\omega(v,u) = 0$ $\forall u \in W \oplus \langle v \rangle = V$

$\Rightarrow$ W est co-isotrope

On montre maintenant un résultat d'existence de sous-espace lagrangien :

Thm 4 : Soit $W \subset (V,\omega)$ isotrope alors $\exists L$ lagrangien tel que $W \subset L$.

Dem : Soit W isotrope. Supposons que $\dim W < n$

alors $\omega_W : V \to W^*$ est t.q. $\dim \operatorname{Ker} \omega_W > n$

$\Rightarrow$ $\exists v \in V$ t.q. $v \in \operatorname{Ker} \omega_W$ et $v \notin W$

alors $\langle v \rangle \oplus W$ est isotrope.

En effet $\omega(\lambda v + w, \lambda' v + w')$

$= \lambda\lambda' \omega(v,v) + \lambda \omega(v,w') - \lambda' \omega(v,w)$

$+ \omega(w,w')$

$= 0$ car $v \in \operatorname{Ker} \omega_W$ et W isotrope.

$\dim \langle v \rangle \oplus W = \dim W + 1$

Comme on a vu que des espaces isotropes existent, le théorème 4 implique que des sous espaces lagrangiens existent

On peut d'ailleurs améliorer la preuve pour donner

Thm 5 : Soit $L \subset (V,\omega)$ un sous espace lagrangien alors il existe $L' \subset (V,\omega)$ lagrangien tel que $L \oplus L' = V$

Dem : il existe toujours $W \subset V$ isotrope t.q.
$W \cap L = \{0\}$ si $\dim W = n$ alors W est lag et
$W \oplus L = V$

sinon $\dim W < n$ et donc $\omega_L : W \to L^*$ n'est pas surj
or $W \cap L = \{0\} \Rightarrow W^{\omega} + L = V \Rightarrow \omega_L' : W^{\omega} \to L^*$ est surjective
~~$\omega_W : V \to W$ a $\dim \ker \omega_W > n$~~

Donc ~~$W \oplus L \neq \ker \omega_W$~~ On prend ~~$v \in W \oplus L$ im ω_L~~
$v \in$ ~~$\ker \omega_W$~~ W^{ω}
t.q. $\omega_L'(v) \notin \operatorname{im} \omega_L$
et on trouve $W \oplus \langle v \rangle$ ~~lagrang~~ isotrope et $W \oplus \langle v \rangle \cap L = \{0\}$
(en effet si $w + \lambda v \in L$ alors $\forall u \in L$ $\omega(w,u) = -\lambda\, \omega(v,u) \Rightarrow \omega_L(w) = -\lambda\, \omega_L'(v)$)
$\dim W \oplus \langle v \rangle = \dim W + 1$ et on continue

Soit L, L' deux espaces lagrangiens tel que $V = L \oplus L'$
alors $\omega(u_0 + u_1, v_0 + v_1)$ $\quad u_0, v_0 \in L \quad u_1, v_1 \in L'$

$$= \omega(u_0, v_1) + \omega(u_1, v_0) = \omega(u_0, v_1) - \omega(v_0, u_1)$$

De plus
$$f : L' \to L^*, \quad v \mapsto \underbrace{(u \mapsto \omega(u,v))}_{v^{\omega}}$$
est un isomorphisme

car $\ker f = (L)^{\omega} \cap L'$. Avec cet identification

$$\omega(u_0 + u_1, v_0 + v_1) = (v_1)^{\omega}(u_0) - (v_0)^{\omega}(u_1)$$

et donc $(V, \omega) \simeq (L \oplus L^*, \omega_0)$ de l'exemple (b)

Si on choisit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de L et $(e_1', \dots, e_n')$ la base de L' correspondant à la base duale de L^* par f alors

$\omega(e_i, e_j) = 0$ car L lag.
$\omega(e_i, e_j') = f(e_j')(e_i) = \delta_{ij}$
$\omega(e_i', e_j') = 0$ car L' lag.

Et donc $(V, \omega) \simeq (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. On a donc montré

__Thm 6__ : Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectic alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n, e_1', \dots, e_n')$ de V t.q.

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(e_i', e_j') = 0 \qquad \omega(e_i, e_j') = \delta_{ij}$$

une telle base est appelée __symplectique__

Dans cette base la matrice de ω_0 est

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Def. Soit (V,ω) et (V',ω') deux espaces symplectiques un symplectomorphisme est une application linéaire

$$f : V \to V' \quad t.q. \quad f^*\omega' = \omega$$

$$(f^*\omega'(u,v) = \omega'(fu, fv))$$

Notons que f est nécessairement injective ($f(u)=0 \Rightarrow \omega(u,v) = \omega(f(u), f(v)) = 0 \ \forall v$)

et donc un tel f est nécessairement un isomorphisme.

On note $Symp((V,\omega)) = \{ f : (V,\omega) \to (V,\omega) \mid f \text{ symplectomorphisme} \}$ c'est donc un groupe.

Ex: $Symp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \cong \{ A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J_0 A = J_0 \}$

car $\omega_0(u,v) = u^T J_0 v$

et donc $\omega_0(Au, Av) = u^T A^T J_0 A v$

Une telle matrice est appelée symplectique.

§2 - Réduction symplectique

Soit (V,ω) un espace symplectique. Soit $W \subset V$ un sous espace coisotrope. ~~Alors~~

Alors

Thm 7 ① $\overline{\omega} : W/W^\omega \times W/W^\omega \to \mathbb{R}$ est bien défini
$[w], [w'] \to \omega(w, w')$

② $\overline{\omega}$ est une forme symplectique

Dem :

Soit $[w] = [w']$ i.e $w - w' \in W^\omega$

alors $\omega(w, v) - \omega(w', v) = \omega(w - w', v) = 0$

car $w - w' \in W^\omega$ et $v \in W$

cela prouve ①

Pour ~~deux~~ ② soit $[w] \in W/W^\omega$ t.q.

$\bar\omega([w],[v]) = 0 \quad \forall [v] \in W/W^\omega$

$\Leftrightarrow \omega(w, v) = 0 \quad \forall v \in W \quad \Rightarrow \quad w \in W^\omega$

$\Rightarrow [w] = 0$ ☐

On note π la projection $W \to W/W^\omega$

Thm 8 : Soit $L \subset (V, \omega)$ lagrangien.

Alors $\pi(L \cap W)$ est lagrangien dans $(W/W^\omega, \bar\omega)$

Dem : Tout d'abord on remarque que

$(L \cap W) + W^\omega$ est lagrangien. En effet

$((L \cap W) + W^\omega)^\omega = (L^\omega + W^\omega) \cap W^{\omega\omega}$

$= (L + W^\omega) \cap W = (L \cap W) + \underbrace{(W^\omega \cap W)}_{}$

$= L \cap W + W^\omega$

et donc $\forall [v],[w] \in \pi(L \cap W) \quad \omega([v],[w]) = 0$ et

de plus si $[v]$ est t.q. $\omega([v],[w]) = 0 \quad \forall [w] \in \pi(L \cap W)$

$\omega([v],[w]) = 0$ alors

$\forall \quad w \in (L \cap W) + W^\omega \quad \omega(v, w) = 0 \Rightarrow v \in ((L \cap W) + W^\omega)^\omega$

$\Rightarrow v \in (L \cap W) + W^\omega \Rightarrow [v] \in \pi(L \cap W)$.

et donc $(\pi(L \cap W))^\omega \subset \pi(L \cap W) \quad \Rightarrow \quad \pi(L \cap W)^\omega = \pi(L \cap W)$

et donc $\pi(L \cap W)$ est lagrangien.

☐

On utilisera au chapitre ? ces deux théorèmes pour fabriquer des lagrangiens et des ~~sous~~ variétés symplectiques.

§3- Le groupe symplectique

Le groupe symplectique est $Sp(n) = Sym(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

$$\wr\wr$$

$$\{A \mid A^T J_0 A = J_0\}$$

En identifiant $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$

$$(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \to (q_1 + ip_1, \dots, q_n + ip_n)$$

~~on remarque que~~ Soit $A \in U(n)$ $\quad (A^* A = Id)$ ~~det A=1~~

on écrit $A = X + iY$ pour $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$

(donc la matrice $2n \times 2n$ correspondante est

$$M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \Bigg)$$

alors $A^* = X - iY \longleftrightarrow \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix}$

et donc $\begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^TX + Y^TY & -X^TY + Y^TX \\ -Y^TX + X^TY & Y^TY + X^TX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

et $M^T J_0 M = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & X \\ -X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^TY - Y^TX & X^TX + Y^TY \\ -Y^TY - X^TX & -Y^TX + X^TY \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $M^T J_0 M = J_0 \Rightarrow M \in Sp(n)$

$\Rightarrow U(n) \subset Sp(n)$

Thm: $Sp(n) \cap O(2n) = U(n)$

Dem: Soit $\psi \in O(2n)$ $\quad (\psi^T \psi = I)$

$\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ si $\psi \in Sp(n)$

Alors $\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^TC - C^TA & A^TD - C^TB \\ B^TC - D^TA & B^TD - D^TB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \quad \text{et comme } \psi^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & X \end{pmatrix} \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} A^TA + B^TB = 1 \\ A^TB - B^TA = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi \in U(n)$$

□

On étudie maintenant la décomposition polaire d'une matrice symplectique. On remarque

<u>Lemme 10</u> : Soit $\psi \in Sp(n)$.

- Si λ valeur propre de ψ alors λ^{-1} valeur propre de ψ avec même multiplicité
- 1 et -1 ont multiplicité paire.
- De plus si v et v' sont des vecteurs propres pour λ et λ' t.q. $\lambda\lambda' \neq 1$ alors $\omega_0(v, v') = 0$

<u>Dem</u> : Le premier point découle de $\psi^T = J_0 \psi^{-1} J_0^{-1}$

- Le second du fait (exercice) $\det \psi = 1$
- Le troisième $\omega_0(\psi v, \psi v') = v^T \psi^T J_0 \psi v'$

$$\lambda\lambda' \omega_0(v, v') \overset{\shortparallel}{=} \ldots = v^T J_0 v' = \omega_0(v, v')$$

□

On en déduit

<u>Lemme 11</u> : Si ψ est symétrique défini positive et symplectique alors $\psi^{\frac{1}{2}}$ est symplectique

Dem : $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus E_\lambda$ $\quad \lambda$ v.p. de ψ

de plus le lemme précédent implique

que si $v \in E_\lambda$ $\quad v' \in E_{\lambda'}$ $\quad \lambda\lambda' \neq 1$ alors

$$\omega_0(v, v') = 0 \Rightarrow \omega_0(\psi^{\frac12} v, \psi^{\frac12} v') = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$\qquad\qquad\qquad \lambda^{\frac12}\lambda'^{\frac12}\omega_0(v, v')$$

si $\lambda\lambda' = 1$ $\quad \omega_0(\psi^{\frac12} v, \psi^{\frac12} v') =$

$$\lambda^{\frac12}\lambda'^{\frac12}\omega_0(v, v') = \omega_0(v, v')$$

donc $\forall\, v, v' \in \mathbb{R}^{2n}$ $\quad \omega_0(\psi^{\frac12} v, \psi^{\frac12} v') = \omega_0(v, v')$

$$v^T(\psi^{\frac12})^T J_0 \psi^{\frac12} v = v^T J_0 v \Rightarrow (\psi^{\frac12})^T J_0 \psi^{\frac12} = J_0$$

$\square$

On en déduit :

<u>Thm 14</u> (forme polaire d'une matrice symplectique)

Soit $\psi \in Sp(n)$ alors $\exists!$ P symplectique sym def pos. et $U \in U(n)$

t.q. $\quad \psi = PU$

<u>Dem</u> : Soit $\psi = PO$ sa décomposition polaire

($P^T = P$ $\quad P > 0$ et $O \in \cancel{SO}\, O(n)$)

$P = (\psi\psi^T)^{\frac12}$ $\quad \psi^T$ symplectique $\Rightarrow \psi\psi^T$ symp

$\Rightarrow (\psi\psi^T)^{\frac12}$ symp

et donc $O = P(\psi\psi^T)^{-\frac12} \in Sp(n) \cap O(n) = U(n)$

$\square$

<u>Rem</u> : · $\psi \to (\psi\psi^T)^{\frac12}$ est continue (même lisse)

$\Rightarrow \psi \to U$ est continue

· lemme 11 fonctionne pour $(\psi\psi)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}_+$

§4- Un tassement symplectique

On va maintenant prouver un résultat géométrique qui nous sera utile au chapitre 5 pour ~~pro~~ caractériser des symplectomorphismes.

On note $B^{2n}(r) = \{(q,p)\in\mathbb{R}^{2n} \mid |q|^2+|p|^2<r\}$ 

$C^{2n}(R) = \{(q_1,\underline{q},p_1,\underline{p}) \mid q_1^2+p_1^2<R\}$ 

cylindre

On dit que $\phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ est affine symplectique si $\phi((q,p)) = (q_0, p_0) + \psi(q,p)$ où $\psi\in Sp(n)$

<u>Thm 13</u> : Soit ϕ affine symplectique, si $\phi(B^{2n}(r))\subset C^{2n}(R)$ alors $r\le R$

<u>Dm</u> : on fait une homothétie de sorte que $r=1$

$\psi = (\underset{\text{vect}}{u} \cdot \underset{(n-1)\times 2n}{Q}\ \underset{\text{vect}}{v}\ \underset{n-1\times 2n}{P})$ $\qquad z_0 = (q_1, \underline{q}, p_1, \underline{p})$

$\omega_0(u,v)=1$ $\qquad \psi(B^{2n}(1))\subset Z^{2n}(R)$

$\Rightarrow \sup_{|w|=1} (\langle u,w\rangle+q_1)^2 + (\langle v,w\rangle+p_1)^2 \le R^2$

car $\psi(w) = (\langle u,w\rangle\ \ Qw\ \ \langle v,w\rangle\ \ Pw)$

$z_0+\psi(w) = (q_1+\langle u,w\rangle\ \ \underline{q}+Qw\ \ p_1+\langle v,w\rangle\ \ \underline{p}+Pw)$

Or $\omega_0(u,v)\le |u|\cdot|v| \Rightarrow |u|\ge 1$ ou $|v|\ge 1$

si $|u|\ge 1$ prenons $w=\pm\frac{u}{|u|}$

$$(\langle u,\pm\tfrac{u}{|u|}\rangle+q_1)^2 + (\langle v,\tfrac{u}{|u|}\rangle+p_1)^2 = \underbrace{(\pm|u|+q_1)^2+(\langle v,\tfrac{u}{|u|}\rangle+p_1)^2}_{\ge 1}$$

$\Rightarrow R^2\ge 1$ idem pour $|v|$ $\square$