Chapitre 3 : Variétés symplectique

§1 - Introduction

Soit M une variété symplectique c.a.d

$\forall q \in M \ \exists U_q \ni q \quad \varphi : U_q \to U \subset \mathbb{R}^{2n}$

t.q. changement de coordonnées $\psi : U \to U'$

soit symplectique (c.a.d $\psi^*(dq_1 \wedge dp_1 + \cdots + dq_n \wedge dp_n)$

$= \underbrace{dq_1 \wedge dp_1 + \cdots + dq_n \wedge dp_n}_{\omega_0}$)

Donc $\forall q \in M$ la forme $\omega : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$

$X, Y \to \omega_0(d\varphi(X), d\varphi(Y))$

est bien défini

Thm 1 : . $d\omega = 0$ (c.a.d. ~~$\omega(X,Y,Z$~~

$X(\omega(Y,Z)) - Y\omega(X,Z) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z)$
$+ \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X)$)

. ω est non dégénérée

Dem : Par construction $\omega|_U = \varphi^*\omega_0$ et $d\omega_0 = 0$

$\Rightarrow d\varphi^*\omega_0 = \varphi^* d\omega_0 = 0$ ▥

Def 2 : Soit M une variété, une forme symplectique ω sur M est une 2-forme fermée et non dégénérée

Donc toute variété ~~action~~ symplectique admet une forme symplectique. Dans les deux sections suivante nous allons montrer que la réciproque est vrai

Thm 2 (Darboux) : Si M admet une forme symplectique alors elle est symplectique

§2 - Un peu de manipulation de formes

Def 3 : Soit α une k-forme sur M et X un champs de vecteur alors $(\mathcal{L}_X \alpha)_q = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^X)^* \alpha(q)$

On rappelle que si $\varphi : M \to N$ est différentiable et que α est une forme sur M alors $(\varphi^*\alpha)_q (X_1 \cdots X_k) = \alpha_{\varphi(q)}(d\varphi_q(X_1) \cdots d\varphi_q(X_k))$

et donc

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_q (X_1 \cdots X_k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\alpha_{\varphi_t(q)} ((d\varphi_t)_q X_1, \cdots, (d\varphi_t)_q X_k) \right)$$

$$= X(\alpha(X_1, \cdots X_k)) + \alpha_q(-\mathcal{L}_X X_1, X_2 \cdots X_k) + \cdots \alpha_q(X_1, \cdots, -\mathcal{L}_X X_k)$$

$$= X(\alpha(X_1 \cdots X_k))(q) - \alpha_q([X, X_1], X_2 \cdots X_k) - \cdots - \alpha_q(X_1 \cdots, [X, X_k])$$

Ce qui nous permet de montrer

Thm 4 (Formule de Cartan)

$$\mathcal{L}_X \alpha = d(X \lrcorner \alpha) + X \lrcorner d\alpha$$

où $X \lrcorner \beta (X_1 \cdots X_{k-1}) = \beta(X, X_1 \cdots X_{k-1})$

Dem (Exercice) pour une deux forme

(1) $d(X \lrcorner \omega)(X_1, X_2) = X_1(\omega(X, X_2)) - X_2(\omega(X, X_1)) - \omega(X, [X_1, X_2])$

(2) $X \lrcorner d\omega (X_1, X_2) = d\omega(X, X_1, X_2)$

$$= X\,\omega(X_1, X_2) - X_1\,\omega(X, X_2) + X_2\,\omega(X, X_1)$$
$$+ \omega([X, X_2], X_1) - \omega([X, X_1], X_2) - \omega([X_1, X_2], X)$$

(1) + (2) $\leadsto$

$$X\,\omega(X_1, X_2) \underbrace{+ \omega([X, X_2], X_1)}_{-\omega(X_1, [X, X_2])} - \omega([X, X_1], X_2) \qquad \boxed{2}$$

Cela nous permet de montrer

Corollaire 5

Soit ω_t une famille lisse de forme. On note $\dot\omega_{t_0}(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \omega_t(q)$. Soit $\{\varphi_t\}$ une isotopie induite par un champs dépendant du temps X_t alors

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi_t^* \omega_t = \varphi_{t_0}^* \left(\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \dot\omega_{t_0} \right)$$
$$= \varphi_{t_0}^* \left(d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) + X_{t_0} \lrcorner d\omega_{t_0} + \dot\omega_{t_0} \right)$$

Dem : dérivation en chaîne - Exercice.

§3 - Demonstration du théorème 2

Tout d'abord remarquons qu'il suffit de montrer que $\forall q \in M$ $\exists\, \mathcal{U}$ ouvert $q \in \mathcal{U}$ et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{2n}$ t.q.
$$\varphi^* \omega_0 = \omega\big|_{\mathcal{U}}.$$

En effet ces $(\mathcal{U}, \varphi)$ seront alors des cartes dont les changements de coordonnées sont symplectique.

Soit $q \in M$ et $\varphi_0 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{2n}$ $q \in \mathcal{U}$ une carte quelconque t.q. $\varphi_0(q) = 0$ alors $(\varphi_0^{-1})^* \omega_{\varphi_0^{-1}(0)}$ est une forme symplectique.

Le théorème 6 du chapitre précédent donne donc
$$\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathcal{U}' \text{ linéaire t.q. } \psi^*(\varphi_0^{-1})^* \omega_{(q)} = \omega_0$$
Donc $\varphi_1 = \psi \circ \varphi_0 : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une carte t.q.
$$\omega' = (\varphi_1^{-1})^* \omega(0) = \omega_0$$

Soit $\omega_t = t\,\omega' + (1-t)\,\omega_0$ alors

1) $\omega_t(0) = \omega_0 \quad \forall t \in [0,1]$
2) $\exists\, \mathcal{U}'' \subset \mathcal{U}'$ t.q. ω_t symplectique $\forall t$.

On cherche ψ_t t.q. $\psi_t^* \omega_t = \omega_0$

$$\text{Or } 5 \Rightarrow \psi_{t_0}^* \left(d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) + \dot{\omega}_{t_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) = -\dot{\omega}_{t_0}$$

On cherche donc $\{X_t\}$ t.q. $d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) = -\dot{\omega}_{t_0}$

En prenant $\mathcal{U}''$ plus petit on peut supposer $-\dot{\omega}_{t_0} = d\alpha_t$ (lemme de Poincaré)

car ω_{t_0} est non-dégénérée $\exists! X_{t_0}$ $\quad X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0} = \alpha_{t_0}$

De plus $X_{t_0}(0) = 0$ et donc son flot est défini sur $[0,1)$ sur un voisinage $\mathcal{U}'''$ de 0.

Par construction $\psi_t^* \omega_t$ est constant $\quad \psi_0 = id$
$\Rightarrow \psi_0^* \omega_0 = \omega_0$
$\Rightarrow \psi_t^* \omega_t = \omega_0$

Finalement $\psi_1 \circ \varphi \circ \varphi_0$ est la carte recherché. $\square$

Rem : 1. comme les base du calcul différentiel a été bien posées on n'a quasiment que fait de l'algèbre linéaire

2. le champ X_H est défini par $X_H \lrcorner \omega = dH$
donc $\mathcal{L}_{X_H} \omega = d(X_H \lrcorner \omega) = d \circ d H = 0$
↳ thm de Poincaré

§4 - Plus de définitions ~~et exemples~~ et propriétés

Def 6 : · Une variété symplectique ~~est~~ (M, ω) est dite exact si $\omega = d\lambda$

· Dans ce cas λ est appelée une forme de Liouville pour (M, ω)

Ex : Soit Q une variété $T^*Q = \bigcup_{q \in Q} T_q^* Q$ son fibré cotangent

soit λ_{can} la 1-forme sur T^*Q définie par

$$(\lambda_{can})_{(q,p)}(X) = p(d\pi(X)) \quad \text{alors}$$

$-d\lambda_{can}$ est une forme symplectique

En effet soit $U \subset \Pi \xrightarrow{\varphi} U_0$ est une carte de Q soit $U \times \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\bar{\varphi}} U_0 \times \mathbb{R}^{2n}$ la carte de T^*Q correspondante

alors $\bar{\varphi}^* \lambda_{can} = \sum p_i dq_i$

et $d\lambda = d(\bar{\varphi}^* \lambda_{can}) = \omega_0$

$$\bar{\varphi}^*_{(q,p)} \lambda_{can} \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \lambda_{can} \left(d\bar{\varphi} \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \right)$$

$$= p \left(d\pi \circ d\bar{\varphi} \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \right)$$

$$= p \left(d(\pi \circ \bar{\varphi}) \right) \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

$$:= \sum p_i a_i$$

C'est la structure symplectique du chapitre 1.

Def 7 : Soit $(M, \omega = d\lambda)$ une variété symplectique exacte. Le champs de Liouville associé à λ est V_λ défini par $V_\lambda \lrcorner \omega = \lambda$

Ex : Pour la forme precedente $V_\lambda = \sum p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ (en coordonnées locale)

thm 8 : Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exact

1. $\mathcal{L}_{V_\lambda} \omega = \omega \quad (\Rightarrow \varphi_{V_\lambda}^{t\,*} \omega = e^t \omega)$

2. $V_{\lambda + df} = V_\lambda + X_f$ où X_f est le champs hamiltonien associé à $f : M \to \mathbb{R}$

Dem

① $\mathcal{L}_{V_\lambda} \omega = d(V_\lambda \lrcorner \omega) + V_\lambda \lrcorner d\omega$
$= d(\lambda) = \omega$

② évident $\square$

Rm : si $\omega = d\lambda$ alors $\omega^n = d(\lambda \wedge \omega \dots \wedge \omega)$
le thm de Stokes $\left(\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha \right) \Rightarrow$ si M est compact sans bord

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\lambda \wedge \omega \dots \wedge \omega) = \int_{\partial M} \lambda \wedge \omega \dots \omega = 0$$

et ω^n ne peut être non nulle $\Rightarrow$ $(M, d\lambda)$ symplectique
$\Rightarrow$ M non compacte.

~~Def~~ 8 : Soit $(M, d\omega)$ une variété symplectique. Soit $\Sigma \subset M$ une sous variétés. On dit que
(i) Σ isotrope si $T_q\Sigma$ est isotrope dans (T_qM, ω_q) $\forall q \in \Sigma$
(ii) Σ coisotrope si $T_q\Sigma$ — co isotrope ——————
(iii) Σ lagrangien —— lagrangien ——————

Ex : ① On a vu que toute surface orientable était symplectique dans celle-ci toute sous variété de dim 1 est lagrangiennes
② Tout sous variété de codimension 1 est co-isotrope
③ $Q_0 \subset T^*Q$ $Q_0 = \{(q,0) \mid q \in Q\}$ est lagrangienne
$T_{q_0}Q \subset T^*Q$ $q_0 \in Q$ est lagrangienne.

Thm 10 : Soit $H : M \to \mathbb{R}$ et soit $L \subset M$ une sous variété ~~lagrangienne~~ coisotrope alors si $H|_L$ est constante alors X_H est tangent à L

Dem : $H|_L = c \Rightarrow dH_q(X)$ $\forall X \in T_qL$
$\Rightarrow \omega(X_H(q), X) = 0$ $\forall X \in T_qL$
$\Rightarrow X_H(q) \in (T_qL)^\omega \subset T_qL$ $\Rightarrow X_H(q)$ tangent à L. $\square$

Une sous-variété $\iota: L \to M$ ~~lagrangienne~~ est isotrope si $\iota^*\omega = 0$

Dans le cas où $\omega = d\lambda$ cela veut dire que $\iota^*\lambda$ est fermée. Cela nous amène à la définition

Def 11: Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exacte. Une sous variété $L \subset M$ est dite *lagrangienne exacte* si $\iota^*\lambda = df$

Rem: L'introduction des courbes holomorphes dans la géométrie symplectique par Gromov a permis de montrer que $\nexists\ \iota: L \hookrightarrow \mathbb{C}^{2n}$ L compacte lagrangienne exact.

En dim 2 évident

$$\int_\gamma -p\,dq = \int_A dq \wedge dp \neq 0$$

§5- Difféomorphismes hamiltoniens vs symplectomorphismes

~~Dans toute cette section on se fixe $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exacte.~~

On démontre maintenant une version théorème similaire au théorème 7 pour le voisinage d'une sous-variété lagrangienne

Thm 12: Soit $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne compacte alors $\exists$ un voisinage N de L et $\varphi: N \to T^*L$ un plongement t.q.

1. $\varphi(L) = L_0$
2. $\varphi^*\omega_0 = \omega$

Dem (idée) Soit N' ~~ext~~ un voisinage tubulaire quelconque de L identifié avec un voisinage de la section nulle $NL = \iota^*TM/TL$. Comme L est lagrangien $NL \simeq T^*L$ par

$$(x, [v]) \to (x, (w \to \omega(v, w)))$$

ce qui donne $\varphi : N' \to T^*L$ tel que
sur $L \subset N'$ $\varphi^*\omega_0 = \omega$ par construction
comme dans la preuve du théorème 2 on cherche
φ_t t.q. $\varphi_t^*\omega_t = \omega_0$ pour $\omega_t = \cancel{t\varphi^*\omega} \; t\omega + (1-t)\varphi^*\omega_0$

On trouve $\varphi_{t_0}^*\left(d(x_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) + \dot\omega_{t_0} \right) = 0$
et donc on veut résoudre $d(x_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) = -\dot\omega_{t_0}$
Or $\dot\omega_{t_0} = 0$ sur $L \Rightarrow -\dot\omega_{t_0}$ exact sur N' (invariance de de Rham par homotopie).
On trouve donc X_t t.q. $x_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0} = \alpha_{t_0}$ $d\alpha_{t_0} = \dot\omega_{t_0}$
Le flot de X_t est défini proche de L car $X_t|_L = 0$. $\square$

§5- Symplectomorphismes.

Dans cette section on va brièvement étudier la différence entre $Symp(M, \omega)$ et $Ham(M, \omega)$. On terminera en énonçant sans preuve un résultat de Banyaga sur le morphisme de flux

<u>Def 13</u>: Un champ de vecteur X est dit <u>symplectique</u> si la 1-forme $X \lrcorner \omega$ est fermée.

En effet il découle de la formule de Cartan que si X est symplectique $\mathcal{L}_X\omega = d(X\lrcorner\omega) = 0$ et donc $\varphi_t^*\omega_0$ est constant si φ_t est le flot de X et donc $\varphi_t^*\omega_0 = \omega_0$

<u>Rem</u>: · Un champ Hamiltonien est symplectique ($X\lrcorner\omega = dH$)
· ~~Réciproque~~ Si un flot φ_t est t.q. $\varphi_t^*\omega_0 = \omega_0$ alors $\mathcal{L}_X\omega = 0$ et donc X est symplectique

On remarque
<u>Thm 14</u>: Soit X, Y deux champs symplectique alors $[X, Y]$ est Hamiltonien pour la fonction $\omega(Y, X)$.

Dem

$x \llcorner \omega$ fermée $\Longleftrightarrow \forall z_0, z_1$ ~~xLw~~ $z_0(x\llcorner\omega(z_1)) - z_1(x\llcorner\omega(z_0)) - x\llcorner\omega([z_0,z_1]) = 0$

$\Rightarrow z_0(\omega(x,z_1)) - z_1(\omega(x,z_0)) - \omega(x,[z_0,z_1]) = 0$

de m̂ $z_0(\omega(y,z_1)) - z_1(\omega(y,z_0)) - \omega(y,[z_0,z_1]) = 0$

de plus $d\omega = 0 \Rightarrow$

$\forall z \quad x\cdot\omega(y,z) - y\,\omega(x,z) + z(\omega(x,y)) - \omega([x,y],z) + \omega([x,z],y) - \omega([y,z],x) = 0$

Donc $z(\omega(y,x)) - z(\omega(x,y)) + z\,\omega(x,y) = \omega([x,y],z)$

$z\,\omega(y,x) = \omega([x,y],z)$

$d\omega(y,x)(z) = \omega([x,y],z)$ $\boxtimes$

Rm : au niveau infinitésimal la $\neq$ entre symp et Ham est encodé par $H^1_{dR}(M)$.

Thm 15 : Soit $\{\varphi_t\}$ une isotopie hamiltonienne (engendrée par $\{H_t\}$) et $\gamma : S^1 \to M$ un lacet lisse alors

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 C^*\omega = 0 \quad \text{où } C : S^1\times[0,1] \to M, \quad \theta, t \mapsto \varphi_t(\gamma(\theta))$$

Dem : On calcul

$$C^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \omega\left(d\varphi_t(\dot\gamma(\theta)), X_{H_t}(\varphi_t(\gamma(\theta)))\right)$$

$$= -(dH_t)_{\varphi_t(\gamma(\theta))} d\varphi_t(\dot\gamma(\theta)) = d(H_t\circ\varphi_t)_{\gamma(\theta)}(\dot\gamma(\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}(H_t\circ\varphi_t(\gamma(\theta)))$$

et donc

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 C^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \omega(d\varphi_t(\dot\gamma(\theta)), X_{H_t}(\varphi_t(\gamma(\theta)))\,dt\,d\theta$$

$$= \int_0^{\cancel{2\pi}}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}(H_t\circ\varphi_t(\gamma(\theta)))\,d\theta\,dt = 0 \quad \text{car } \gamma(0) = \gamma(2\pi)$$ $\boxtimes$

⚠ A priori le thm 15 detecte le fait qu'une isotopie n'est pas Hamiltonienne et non que son extremité ne l'est pas.

Ex :  $\varphi_t : S^1\times S^1 \to S^1\times S^1$ est symplectique
$\theta, \varphi \to (\theta + t, \varphi)$

non Hamiltonienne mais $\varphi_1 = id$ Hamiltonien.

Cependant dans le cas exact on a

Thm 16 : Soit ~~$\{\varphi_t\}$ γ et C~~ Soit $\{\varphi_t\}$ une isotopie et γ ~~et~~, C comme dans le théorème 15. Supposons que $\omega = d\lambda$ alors

$$\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^1 C^*} \quad \int_{[0,2\pi]\times[0,1]} C^*\omega = \int_0^{2\pi} \gamma^*\lambda - \int_0^{2\pi} (\varphi_1\circ\gamma)^*\lambda$$

Dem : C'est une occurence du théorème de Stokes

On sait $C^*\omega = C^* d\lambda = d\, C^*\lambda$

et donc $C^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial t} C^*\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta} C^*\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$

(car $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$)

et donc $$\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} C^*\omega = \int_0^1\int_0^{2\pi} C^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) dt\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (C^*\lambda)_{(1,\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) d\theta - \int_0^{2\pi} (C^*\lambda)_{(0,\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) d\theta$$

(car $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ et donc $\varphi_t\,\gamma(0) = \varphi_t\,\gamma(2\pi)$ $\forall t$)

et $C(1,\theta) = \varphi_1\,\gamma(\theta)$ $\quad C(0,\theta) = \gamma(\theta)$ $\square$

On peut en déduire

<u>Ex</u> : Soit $T^*S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la forme

$$d\theta \wedge dp = d(-p\,d\theta)$$

alors $\varphi_1 : S^1\times\mathbb{R} \to S^1\times\mathbb{R}$ est symplectique
$\theta, p \to (\theta, p+1)$

$$\varphi_1^* d\theta = d\theta \qquad \varphi_1^* dp = dp$$

mais φ_1 n'est pas Hamiltonien en effet

si $\gamma(\theta) = (\theta, 0)$ alors $\gamma^*(-p\,d\theta) = 0$

$$\int_{[0,2\pi]} \gamma^*(-p\,d\theta) = 0$$

et $\varphi_1\circ\gamma(\theta) = (\theta, 1)$ $\quad \varphi_1\circ\gamma^*(-p\,d\theta) = -d\theta$

et donc $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} \gamma^*(-p\,d\theta) = -2\pi$.

Le théorème 15 dit que si φ_1 est l'extrémité d'une isotopie Hamiltonienne alors $\int \varphi_1\circ\gamma^*\lambda = \int \gamma^*\lambda$.
Donc φ_1 n'est pas Hamiltonien.

En fait on peut voir que  n'est pas Hamiltonien dès que ~~$t \in \mathbb{Z} + \pi$~~ $t \notin \mathbb{Z}$ par un argument quasi-similaire

Plus généralement la quantité $\int c^*\omega$ ne dépend que des extrémités de $\{\varphi_t\}$ symplectique si on la considère dans $\mathbb{R}/\Gamma_\omega$ ← appelé le groupe de flux

Banyaga montre en utilisant ce morphisme

$$\Gamma : Symp_0(M,\omega) \to \mathbb{R}/\Gamma_\omega$$

que · $Ham(M,\omega) = \operatorname{Ker}\Gamma$

· $[Symp_0(M,\omega), Symp_0(M,\omega)] = Ham(M,\omega)$ si M est compacte (version groupe du théorème 14)

· $Ham(M,\omega)$ est un groupe simple

· Tout $\varphi \in Ham(M,\omega)$ est décomposable $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \varphi_n$ où chaque φ_i est ~~le flot~~ obtenu par flot d'un champs autonome.

Tout ces résultats vont au delà de ~~ce~~ ce que nous allons aborder dans le cours.

Terminons ce chapitre en calculant quelques exemples de symplectomorphismes pour s'entraîner à manipuler ces concept

Ex

(1) Archimède

On considère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

muni de la forme $\omega_q(X,Y) = \langle X \times Y, q \rangle$

et le cylindre $S^1 \times [0,1]$ muni de la forme $d\theta \wedge dt$

Alors $p \quad S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to S^1 \times [0,1]$ est un symplectomorph

$$(x,y,z) \to \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$$