Chapitre 4 : Réduction symplectique

Dans ce chapitre nous allons présenter une procédure générale de construction de variétés symplectiques comme quotient de certaines sous variétés co-isotropes. En général ce quotient n'est même pas une variété donc il faut garder en tête de faire des vérification ad-hoc dans chaque situation.

On commence par donner rapidement les éléments nécessaires de théorie des feuilletages et des distributions.

§1- Théorème de Frobenius

On quitte un peu le monde symplectique et on considère M une variété lisse.

Définition 1 : Une distribution (lisse) ξ sur M est la donnée d'un sous espace vectoriel $\xi_x \subset T_x M$ $\forall x \in M$ t.q. au voisinage de chaque pt x ξ est engendré par k champs de vecteurs $X_1 \cdots X_k$ linéairement indépendants.

Ex : ① Une distribution de rang 1 est un champs de vecteurs non nul à une fonction près (localement)

② $\xi = \ker \alpha$ où α est 1-forme non nulle est une distribution de rang $(n-1)$. (exercice)

La question d'intégrabilité est celle demandant si cette distribution est donnée par les tangentes à une famille de sous variétés

Définition 2 : Soit ξ^k une distribution de rang k.

Une sous-variété $i : \Sigma^k \hookrightarrow M$ de M est intégrale de ξ si $\forall x \in \Sigma^k$ $T_{i(x)} \Sigma^k = \xi_{i(x)}$.

. ξ^h est dites integrable si $\forall\, x \in M$ $\exists$ une sous variété integrable à ξ passant par x.

Ex:

① Soit $M\times N$ un produit de variétés symplectique.
$T_{(x,y)} M\times N \simeq T_x M \oplus T_y N$
$\xi_{(x,y)} = T_y N$ défini une distribution integrable

② Tout champs de vecteurs non nuls est integrable

③ $\xi_{(x,y,z)} = \ker(dz - y\,dx)$ est ~~une~~ non integrable sur $\mathbb{R}^3$

en effet soit ~~$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$~~ $\forall$ ~~x,y,z~~ $f : \underset{(u,v)}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\forall (u,v) \quad \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \xi$

alors
$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial u} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 & \frac{\partial}{\partial v} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0 & \frac{\partial}{\partial v} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \leftarrow \quad \mathrm{rg} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = 2$$

Theorème 3 : (Frobenius)
Soit ξ une distribution. Alors
ξ integrable $\iff$ $\forall X, Y$ champs de vecteur $X, Y \subset \xi$
$\Rightarrow [X, Y] \subset \xi$.

Dem : (non détaillée)
$\Rightarrow$ ξ integrable. Soit $X, Y \subset \xi$
et $q \in M$. Soit $\Sigma \subset M$ tangente à ξ passant par q
alors on peut vérifier que $\forall t \ll 1$ $\varphi_t(q) \in \Sigma$ (car X tangente à Σ)
(exercice) et donc $(\varphi_t)_* Y(q)$ tangente à Σ $\Rightarrow$ $[X,Y]$ tangente à Σ

$\Rightarrow \quad [X,Y](q) \in \xi_q$.

"$\Leftarrow$" Soit $q \in M$ et $\mathcal{U}$ un ouvert autour de q suffisament petit

on affirme : $\exists$ $X_1 \dots X_k$ champs de vecteur sur $\mathcal{U}$ t.q.

· $\langle X_1 \dots X_k \rangle = \xi|_{\mathcal{U}}$

· $[X_i, X_j] = 0$

En effet Soit $\hat{X}_1 \dots \hat{X}_k$ quelconque $\langle \hat{X}_1, \dots \hat{X}_k \rangle = \xi|_{\mathcal{U}}$

on choisit de coordonné $q_1 \dots q_n$ t.q.

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}$$

$$\tilde{X}_2 = f \frac{\partial}{\partial q_1} + g \frac{\partial}{\partial q_2} + \sum_{j=3}^{n} h_2^j \frac{\partial}{\partial q_j}$$

on peut changer $\hat{X}_2 \to \frac{1}{g}(\tilde{X}_2 - f X_1)$. On continue pour obtenir

$$\hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + \sum_{i > k+1} h_2^i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

etc. $$\hat{X}_j = \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{i > k+1} h_j^i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

On l'exercice de la feuille 1 donne

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j](x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial q_{k+1}}, \dots \frac{\partial}{\partial q_n} \right\rangle \cap \xi(x) = 0$$

$$\Rightarrow [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 .$$

Avec de telle $X_1, \dots X_k$ on définit

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \cdots (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$
$$t_1 \dots t_n \mapsto \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{X_n}^{t_n}(x)$$

qui définit une sous variété intégrale à ξ (exercice) $\square$

En fait la preuve nous donne légèrement plus:

on trouve $\forall x \in M . \exists \mathcal{U} \cong [0,1]^n \subset M$ t.q.

$$\xi|_{\mathcal{U}} = \ker T[0,1]^k .$$

 ← Feuilletage.

localement $\mathcal{U} \to \mathcal{U}/\sim$ où $x \sim y$ si $\exists$ Σ intégrale connexe de ξ t.q. $x, y \in \Sigma$

projette $[0,1]^n \to [0,1]^k$.

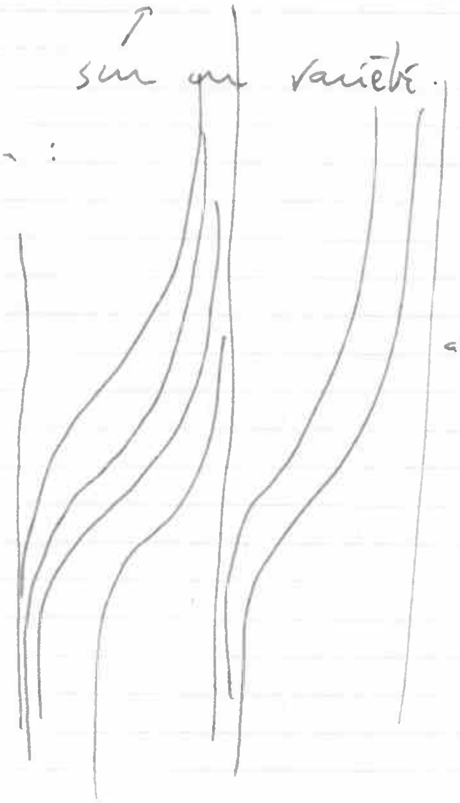
exercice $\Longleftrightarrow$ $\exists \gamma : [0,1] \to M$ $\dot{\gamma}(t) \subset \xi$, $\gamma(0) = x$ $\gamma(1) = y$

En général cette projection ne devient pas une projection

$\pi : M \to M/\mathcal{R}$ $\quad x \sim y$ général

sur une variété. On peut par exemple perdre la séparation :

Ex !



quotient non Hausdorff.

Mais si c'est le cas alors $T_{[x]} M/\mathcal{R} = T_x M/\mathcal{R}_x$. On ne rentre pas plus dans la théorie des feuilletages mais garde ça comme vérification nécessaire à chaque fois

§2 - Réduction symplectique : généralité

On commence par noter le

Lemme 4 : Soit (M,ω) variété symplectique. Soit $j : Q \subset M$ une sous-variété co-isotrope. Soit $X \in \Gamma(TQ)$ t.q. $\forall q \in Q \quad X_q \in (T_qQ)^\omega$ ~~$\forall q \in Q \quad X_q \in T_q$~~ On note $\omega_Q = j^*\omega$.

Alors $\mathcal{L}_X \omega_Q = 0$

Dem : En effet
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \omega_Q &= X \lrcorner d\omega_Q + d(X \lrcorner \omega_Q)\\ &= X \lrcorner j^* d\omega + d(j^* X \lrcorner \omega)\\ &= 0 \quad \text{car } X \in TQ^\omega \quad \square\end{aligned}$$

~~On~~ Pour le reste de la section on garde les notations (M,ω) symplectique, $j : Q \subset M$ est co-isotrope. $\omega_Q = j^*\omega$.

On note TQ^ω la distribution sur Q ~~induit~~ donnée par $T_qQ^\omega \subset T_qQ$ $\forall q \in Q$ (bien définie car Q est coïsotrope). C'est une distribution de rang $\dim M - \dim Q \leq n$.

<u>Thm 5</u>: La distribution TQ^ω est intégrable.

<u>Dm</u>: D'après le théorème 3 il suffit de voir que

$$X, Y \in \Gamma(TQ) \text{ t.q. } X, Y \subset TQ^\omega \Rightarrow [X,Y] \subset TQ^\omega$$

On sait que $X \in T_qQ^\omega \iff \forall z \in T_qQ \quad \omega(X,z) = 0$ (pourquoi?).

Soit $X, Y \subset TQ^\omega$ et $Z \in \Gamma(TQ)$

$$0 = d\omega(X,Y,Z) = X \cdot \overset{0}{\omega(Y,Z)} - Y \cdot \overset{0}{\omega(X,Z)} + Z\overset{0}{\omega(X,Y)}$$
$$- \omega([X,Y],Z) + \overset{0}{\omega([X,Z],Y)} - \overset{0}{\omega([Y,Z],X)}$$

$$\Rightarrow \forall Z \in \Gamma(TQ) \quad \omega([X,Y],Z) = 0 \Rightarrow [X,Y] \subset TQ^\omega \quad \square$$

<u>Définition 6</u>: $Q \subset M$ est <u>réductible</u> si $Q/\sim$ est une variété d'espace tangent TQ/TQ^ω t.q. $\pi: Q \to Q/\sim$ est une submersion lisse.

<u>Thm 7</u>: Soit $j: Q \hookrightarrow M$ <u>réductible</u>. ~~Pour~~ La deux forme $\bar\omega$ ~~défini~~ sur $Q/\sim$ ~~définie~~ donnée par

$$\bar X, \bar Y \in T_qQ/T_qQ^\omega \quad \bar\omega_{\pi(q)}(\bar X, \bar Y) = \omega_q(X,Y) \text{ est}$$

- bien définie
- symplectique

Dem : On sait déjà que $\overline{\omega}$ ne dépend pas du choix de relevé dans $T_q Q$ par Chapitre 2 théorème 7.

On doit vérifier que $\overline{\omega}$ ne dépend pas du choix de q' dans $\pi^{-1}(\pi(q))$.

Soit q, q' t.q. $\pi(q) = \pi(q')$

$\Rightarrow \exists\, \gamma : [0,1] \to Q$ t.q. $\dot{\gamma}(t) \subset T_{\gamma(t)} Q^{\omega}$, $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = q'$

que l'on peut étendre à $\cancel{X} \subset TQ^{\omega}$.

Soit ~~...~~ Alors le Lemme 4 donne $\mathcal{L}_{X}\omega = 0$

$\Rightarrow \omega_q(X, Y) = \omega_{q'}(d\Gamma_V'(X), d\Gamma_V'(Y))$

et $d\pi \circ d\Gamma_V'(X) = d\pi(X)$ (car par construction si $\alpha(t)$ est courbe intégrale de V $\pi\circ\alpha(t) = \pi\circ\alpha(0)$)

et donc $\overline{\omega}$ est bien définie.

Chapitre 2 théorème 7 $\Rightarrow$ $\overline{\omega}$ non dégénérée.

~~Comme~~ Par construction $\omega_Q = \pi^* \omega$.

et donc $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d\omega_Q} = \pi^* d\omega$

On $d\pi_q : T_q Q \to T_{\overline{q}} \overline{Q}$ est surjective

$\Rightarrow d\pi_q^* : T_{\overline{q}}^* \overline{Q} \to T_q^* Q$ est injective

$\Rightarrow \pi_q^* : \Lambda^3 T_{\overline{q}}^* \overline{Q} \to \Lambda^3 T_q Q$ —— // ——

$\Rightarrow d\omega = 0$ $\square$

On étudie maintenant le comportement des sous variétés lagrangiennes

Definition 8 : Soit $Q \subset M$ une sous variété.

$i : L \hookrightarrow M$ une immersion. On dit que i intersecte Q de manière nette si

· $i^{-1}(Q)$ est une sous variété de L

· $T_{i(x)}(i(L) \cap Q) = di(T_x L) \cap T_{i(x)} Q$

Ex.:

① $i \pitchfork Q$ $\left(T_{i(x)}\cancel{Q} \cap di(T_x L) + T_{i(x)} Q = T_{i(x)} M \right)$

$\Rightarrow$ intersection nette

②  pas nette.

Définition 3 : Soit $Q \subset (M, \omega)$ coisotrope et $i : L \to M$ une immersion lagrangienne. (Q, L) est dite réductible si

- Q est réductible
- i et Q s'intersectent de manière nette.

Thm 10. Soit (Q, L) une paire réductible et $\pi : Q \to Q/_\sim$

Alors $L_Q = \pi(i(L) \cap Q) \looparrowright Q/_\sim$ est lagrangienne

$L^Q = \pi^{-1}(L_Q) \subset Q \subset M$ lagrangienne

Dém : Le chapitre 2 thm 8 $\Rightarrow$

$\pi(di(T_x L) \cap T_{i(x)} Q)$ est lagrangien dans $T_{\bar{x}} Q/_\sim$. Cela a pour conséquence :

i) $\pi|_{Q \cap i(L)}$ a rang constant

$\Rightarrow$ $\pi(Q \cap i(L))$ est sous var immergée

ii) $\pi(Q \cap i(L))$ est immersion lagrangienne

$\Rightarrow$ $L_Q \looparrowright Q/_\sim$

Prenons $L^Q = \pi^{-1}(L_Q) = \{ \cup$ feuille de $\ker \omega_Q$ passant par $i(L) \cap Q \}$

Soit $q \in L^Q$ soit q' sur la même feuille de q, $q' \in i(L)$

Comme dans la preuve du théorème 7 on trouve V de TQ^ω t.q. $\varphi_V^1(q) = q'$

Le lemme 4 donne $\omega(d\varphi_V^1(x), d\varphi_V^1(y)) = \omega(x, y)$

$\forall\, x, y \in T_q L^Q$ $\Rightarrow$ $\omega(x, y) = 0$

$\Rightarrow$ L^Q isotrope

De plus $\dim L^{Q} = \dim L_Q + \dim TQ^{\omega} - \cancel{\dim(L \cap TQ \cap TQ^{\omega})}$
$= \dim Q - n + 2n - \dim Q = n$ $\square$

§ 3. Premiers exemples

On a vu qu'une hypersurface est toujours co-isotrope

(a) On considère $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ et

$$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$
$$(\underline{q}, \underline{p}) \to |\underline{q}|^2 + |\underline{p}|^2$$
$$H^{-1}(1) = S^{2n-1} \text{ co-isotrope}$$

Identifions $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ avec $\omega_0(X, Y) = \langle iX, Y \rangle$

$$X \in T_{\underline{q}+i\underline{p}} S^{2n-1} \iff \langle X, \underline{q}+i\underline{p} \rangle = 0$$
$$X \in (T_{\underline{q}+i\underline{p}} S^{2n-1})^{\omega_0} \iff \langle iX, Y \rangle = 0 \quad \forall Y \perp \underline{q}+i\underline{p}$$

et donc $X \in (T_{q+ip} S^{2n-1})^{\omega_0} \iff iX // z$

$S^{2n-1}/\sim \simeq \cancel{\mathbb{C}} \, \mathbb{C}P^{n-1}$ qui est donc munie d'une forme symplectique appelée la forme de Fubini-Study

Rem : $x, y \in S^{2n-1}$ représente le même pt dans $\mathbb{C}P^{n-1}$
$\iff \exists \, \ell \subset \mathbb{C}^n_{x,y \in (\ell \cap S^{2n-1})} \iff \exists \, \theta \in \mathbb{R} \; e^{i\theta} x = y$
$\iff x \sim y$ car

$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} x = i e^{i\theta} x$

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ lagrangien et $i(\mathbb{R}^n) \cap S^{2n-1}$ nette
$\leadsto \pi(i(\mathbb{R}^n) \cap S^{2n-1}) \, q^{\text{lag}} \, \mathbb{C}P^{n-1}$
$i(\mathbb{R}^n) \cap S^{2n-1} \simeq S^{n-1}$ et π identifie q et $-q$
$\Rightarrow \pi(i(\mathbb{R}^n) \cap S^{2n-1}) \simeq \mathbb{R}P^{n-1} \xrightarrow{\text{lag}} \mathbb{C}P^{n-1}$
$\pi^{-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \simeq S^{n-1} \times S^1$ lag dans $\mathbb{C}^n$

Quand $n = 2$ $\leadsto$ tore lagrangien appelé le Tore de Chekanov.

Une autre lagrangienne naturelle est

$$T^n = S^1\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots S^1\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \subset S^{2n-1}$$

$$\pi(T^n) \simeq T^{n-1} \overset{lag}{\hookrightarrow} \mathbb{C}P^{n-1}$$ Tore de Clifford

(b) $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

$(\underline{q}, \underline{p}) \to \underline{p}$

$Q = H^{-1}(1)$ co-isotrope

$\quad\; \wr\!\wr$

$\mathbb{R}^n \times S^{2n-1}$ $\qquad$ (X, Y) tangent à $H^{-1}(1)$ en $(\underline{q}, \underline{p})$

$\iff Y \perp \underline{p}$

$(x, y) \in T_{(\underline{q}, \underline{p})} Q^{\omega_0}$

$\iff \langle y, x' \rangle - \langle x, y' \rangle = 0 \quad \forall y' \perp \underline{p}$

$\langle y, x' \rangle = \langle x, y' \rangle \quad \forall y' \perp \underline{p}$

ce qui donne $\quad y = 0 \quad X \,//\, \underline{p}$

Donc ~~$\gamma(t)$ est un trajectoire~~ $\gamma(t) = (\underline{q} + t\underline{p}, \underline{p})$

est une trajectoire tangente à TQ^{ω_0} (c'est le champs hamiltonien de H, flot géodesique)

$\varphi : Q/_\sim \longrightarrow T^* S^{n-1}$ est bien défini

$[\underline{q}, \underline{p}] \longrightarrow (\underline{p}, -\underline{q} + \langle \underline{q}, \underline{p} \rangle \underline{p})$

De plus $\tilde{\pi}^* \omega = \omega_0$ où $\tilde{\pi} : Q \longrightarrow T^* S^{n-1}$

$\qquad (\underline{q}, \underline{p}) \to (\underline{p}, -\underline{q} + \langle \underline{q}, \underline{p} \rangle \underline{p})$

car $\pi^*(\underline{p}\, d\underline{q}) = (-\underline{q} + \langle \underline{q}, \underline{p} \rangle \underline{p})\, d\underline{p}$

$= -\underline{q}\, d\underline{p}$ car $\underline{p}\, d\underline{p} = 0$ vu que

$\langle \underline{p}, \underline{p} \rangle = 1$

et $Q/_\sim$ est symplectomorphe à $T^* S^{n-1}$

(c) Soit $N \subset M$ alors $T^*M|_N = \left\{ (q, p) \;\middle|\; \begin{array}{l} q \in N \\ p \in T_q^* M \end{array} \right\}$

est co-isotrope. En effet soit U_0 a $\{(q_1 \cdots q_n)\}$ une carte de M t.q. $U_0 \cap N = \{(q_1 \cdots q_k, 0 \cdots 0)\}$

alors $V = U_0 \times (\mathbb{R}^n)^* = \{(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)\}$ est une carte de T^*M t.q.

$$V \cap T^*M|_N = \{(q_1 \cdots q_k, 0 \cdots 0, p_1 \cdots p_n)\}$$

Un vecteur $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ est dans $T(T^*M|_N)^\omega$

~~$\Leftrightarrow b_1 = \cdots = b_k = 0$ donc et $a_{k+1} \cdots a_n = 0$~~

~~$\Leftrightarrow X = \sum_{i=1} a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum b_i$~~

$\Leftrightarrow \forall a_1' \cdots a_k' \; b_1' \cdots b_n'$

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i' b_i - a_i b_i') + \sum_{i=k+1}^{n} a_i b_i' = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \cdots = a_n = 0 \\ b_1 = \cdots b_k = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow X \in T(T^*M|_N)$

De plus on remarque que

$\tilde{\pi} \; T^*M|_N \to T^*N$ est t.q.

$$(q,p) \to (q, p|_{T_qN})$$

$$\tilde{\pi}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i dq_i\right) = i^*\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i\right) \text{ où } i : T^*M|_N \to T^*M$$

Donc $T^*M|_N / \sim \; \simeq T^*N$ Rq : on a utilisé cette identificat° plusieurs fois pour $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

§ 4 - Familles génératrices

Une autre manière de voir T^*N comme une réduction est de considérer

$$W = \{(q, z, p, 0) \mid q \in N \; z \in \mathbb{R}^k \; p \in T_q^*N\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^k)$$

On trouve W co-isotrope

en effet $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial z_i} + c_i \frac{\partial}{\partial p_i} + d_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \in TW^\omega$

$\Leftrightarrow \forall a_i', b_i', c_i'$ ~~d_i'~~

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i' - \cancel{d_i} + \sum_{i=1}^{k} d_i b_i' = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_i = c_i = 0 \\ d_i = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow X \in TW$

$$W/_{\sim} \simeq T^*N \qquad \text{comme avant car}$$
$$[(q,\xi,p,0)] \to [q,p] \qquad \tilde{\pi}\left(\sum p_i dq_i\right) = i^*\left(\sum p_i dq_i + \sum \eta_i d\xi_i\right)$$
car $\eta_i = 0$

et Une fonction $f : W \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ donne une lagrangienne $\Gamma(df)$ dans $T^*(W \times \mathbb{R}^k)$. Qui, si $\Gamma(df) \pitchfork W$, donne

$L_f \subset T^*N$

Definition 11 : Une ~~sf~~ fonction F : ~~W~~ $N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dans est une famille génératrice pour une sous variétés lagrangienne $L \hookrightarrow T^*N$ si
$$L = L_F.$$
En déroulant on trouve
$$L_F = \left\{ (q,p) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, \xi_0 \in \mathbb{R}^k \ d_\xi F(q,\xi_0) = 0 \\ p = d_q F(q_0,\xi_0) \end{array} \right\}$$

Thm (Laudenbach-Sikorav) Soit N compact
Soit $\phi : T^*N \to T^*N$ un difféomorphisme hamiltonien
alors $\exists\, F : \mathbb{R} N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ t.q.

- $F\big|_{N\times\mathbb{R}^k \setminus K}^{(q,\xi)} = \underset{\uparrow}{Q}(\xi)$ forme quad non deg.
- $L_F = \phi(N_0)$ où $N_0 = \{(q,0)\} \subset T^*N$

Ce théorème a des conséquences rigides étonnantes
$$\phi(N_0) \cap N_0 \neq \emptyset$$
$$\text{si } \phi(N_0) \pitchfork N_0 \text{ alors } \#\, \phi(N_0) \pitchfork N_0 \geq \dim H^*(N)$$

§3. Actions toriques

Soit $T^k = S^1 \times \dots \times S^1$ et (M,ω) une variété symplectique

Definition 12 : Une action effective $\alpha : T^k \times M \to M$ est torique si $\exists\, \mu : M \to (\mathbb{R}^k)^*$ t.q.

(i) $\mu(g.x) = \mu(x)$

(ii) $\forall \xi \in (\mathbb{R}^h)^*$ $\quad H_\xi = M \to \mathbb{R}$ est Hamiltonien pour X_ξ

$$q \to \mu(q)(\xi)$$

où $X_\xi(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(\pi(t\xi), q)$

Soit α une action torique et $\mu : M \to (\mathbb{R}^h)^*$ l'applicat° associé alors si $x \in (\mathbb{R}^h)^*$ est une valeur régulière $\mu^{-1}(x)$ est co-isotrope en effet

$$\omega_q(X_\xi(q), V) = dH_\xi(q)(V)$$
$$= \langle d\mu_q(V), \xi \rangle = 0 \text{ si } \forall V \in T_q\mu^{-1}(0)$$

donc $\mathrm{Vect}(X_\xi(q) \mid \xi \in \mathbb{R}^h) \subset (T_q\mu^{-1}(0))^\omega$

$$\dim(T_q\mu^{-1}(0))^\omega = \dim M - (\dim M - h) = h$$

ex

(1) $\alpha : S^1 \times S^2 \to S^2$ $\quad$ torique

$$\theta, x, y, z \to (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y, z)$$

pour $\mu : S^2 \to S^2$

$$(x, y, z) \to z$$

(2) $S^1 \times \cdots S^1 \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad$ torique pour

$$\theta_1 \ \theta_n, (z_1 \cdot z_n) \to (e^{i\theta_1}z_1, \cdots e^{i\theta_n}z_n)$$

$\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$

$$z_1 \cdots z_n \to |z_1|^2, \cdots |z_n|^2$$

(3) Plus généralement

$$\underbrace{S^1 \times \cdots S^1}_{n-1} \times \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$\theta_1 \cdots \theta_{n-1}, [z_1 \cdots z_n] \to [e^{i\theta_1}z_1, \cdots, e^{i\theta_{n-1}}z_{n-1}, z_n]$$

torique pour $\mu([z_1 \cdots z_n]) = \left(\frac{|z_1|^2}{\|z_1 \cdots z_n\|^2} \cdots \frac{|z_n|^2}{\|z_1 \cdots z_n\|^2}\right)$