Géometrie symplectique

On fixe quelques notations:

- pour un champs de vecteur X sur une variété M, on note φ_X^t son flot (éventuellement local)

$$\varphi_X^t : \mathcal{U} \to M \quad \text{t.q.} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi_X^t(q) = X_{\varphi_X^{t_0}(q)}$$

- Si $\psi : M \to M$ est un difféomorphisme et X un champs de vecteurs on note

$\psi_* X$ le champs de vecteur défini par

$$\psi_* X_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}\left(X_{\varphi^{-1}(q)}\right)$$

Rem: $\psi : M \to M$ est un $\simeq$ et ω un h-forme alors $\forall X_1 \dots X_h$ champs de vecteurs

$$\psi^* \omega(X_1 \dots X_h) = \omega(\psi_* X_1, \dots, \psi_* X_h) \circ \psi$$

- On note les coordonnées dans $\mathbb{R}^{2n}$ par $(\underline{q}, \underline{p}) := (q_1 \dots q_n, p_1, \dots p_n)$

Chapitre 1 : Equations hamiltoniennes

§1 - Définitions :

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ un ouvert et
$H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction (C^∞)

Def 1 : le champs de vecteur hamiltoniens associé à H est

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \frac{\partial}{\partial \underline{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \frac{\partial}{\partial \underline{p}}$$

Exemple : Si $V : \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction
et $H : \mathcal{U}' \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(\underline{q}, \underline{p}) \to \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - V(\underline{q})$

alors $X_H = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$

$\rightsquigarrow$ $\gamma(t) = (\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ est une courbe integrale de X_H ssi

$q_i'(t) = p_i(t)$

$p_i'(t) = \frac{\partial V}{\partial q_i}(\underline{q}(t))$

$\Rightarrow$ acceleration de $q(t)$ est ∇V

Def 2 : La forme symplectique standard sur $\mathcal{U}$ est

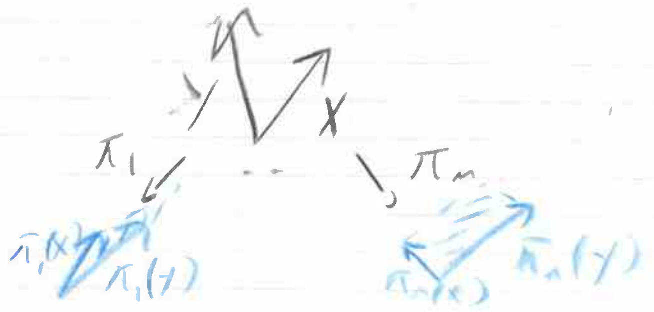
$$\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + \dots + dq_n \wedge dp_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Si on note $\pi_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$

$(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \to (q_i, p_i)$

alors pour $X, Y \in T_{\underline{q},\underline{p}} \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$

$\omega_0(X,Y) = \sum$ aire parallélogramme$(\cancel{dEt}\ \pi_i(X), \pi_i(Y))$



Proposition 3 : ω_0 est fermée et non dégénérée

$(d\omega_0 = 0)$ $\quad (X \in T_{\underline{q},\underline{p}} \mathcal{U} \ \forall Y \ \omega(X,Y) = 0 \Rightarrow X = 0)$

Dem : $d\omega_0 = 0$ evident car $d(dq_i \wedge dp_i) = ddq_i \wedge dp_i + q_i \wedge ddp_i = 0$

· Soit $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ alors si $Y = \sum (a_i' \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i' \frac{\partial}{\partial p_i})$

~~alors~~ $\omega(X,Y) = \langle (-b_1, -b_2, \cdots -b_n, a_1 \cdots a_n), (a_1', \cdots a_n', b_1', \cdots b_n') \rangle$

donc $\omega(X,Y) = 0 \ \forall Y \Rightarrow (-b_1, \cdots -b_n, a_1 \cdots a_n) = 0$

$\Rightarrow X = 0$ ☒

Proposition 4 : Soit X_H le champs Hamiltonien associé à $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ alors

$\forall Y \quad dH(Y) = \cancel{\omega_0(Y, X_H)}\ \omega_0(X_H, Y)$

Dem : c'est un calcul evident ☒

Corollaire 5 : Si X_H est le champs hamiltonien associé à H alors H est integrale première de X_H

Dem : $dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$ ☒

Corollaire 6 : Si H est une fonction propre alors $\varphi^t_{X_H}$ est défini pour tout temps

§2 - Invariant de Poincaré

Thm 7 : Soit X_H le champs hamiltonien associé à $H : U \to \mathbb{R}$ soit $\varphi^t_{X_H}$ son flot (local) alors $(\varphi^t_{X_H})^* \omega_0 = \omega_0$

Dem : on note $\varphi^t_{X_H}(\underline{q}, \underline{p}) = (a_1^t(\underline{q},\underline{p}), \dots, a_n^t(\underline{q},\underline{p}), b_1^t(\underline{q},\underline{p}), \dots b_n^t(\underline{q},\underline{p}))$

de sorte que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} a_i^t(\underline{q},\underline{p}) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(a_1^{t_0}, \dots a_n^{t_0}, b_1^{t_0} \dots b_n^{t_0})$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} b_i^t(\underline{q},\underline{p}) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(a_1^{t_0} \dots a_n^{t_0}, b_1^{t_0} \dots b_n^{t_0})$$

$$(\varphi^t_{X_H})^* da_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial a_i}{\partial p_j} dp_j$$

$$(\varphi^t_{X_H})^* dp_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial b_i}{\partial p_j} dp_j$$

et donc

$$(\varphi^t_{X_H})^*(dq_i \wedge dp_i) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial b_i}{\partial q_k} - \frac{\partial b_i}{\partial q_j}\frac{\partial a_i}{\partial q_k}\right) dq_j \wedge dq_k$$
$$+ \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial b_i}{\partial p_k} - \frac{\partial a_i}{\partial p_k}\frac{\partial b_i}{\partial q_j}\right) dq_j \wedge dp_k$$
$$+ \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\frac{\partial b_i}{\partial p_k} - \frac{\partial a_i}{\partial p_k}\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right) dp_j \wedge dp_k$$

Donc le coefficient en $dq_j \wedge dq_h$ dans $(\varphi_{X_H}^t)^* \omega_0$ est

$$\star = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} \frac{\partial b_i}{\partial q_h} - \frac{\partial b_i}{\partial q_j} \frac{\partial a_i}{\partial q_h} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \star = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial p_i} \frac{\partial a_l}{\partial q_j} \frac{\partial b_i}{\partial q_h}} + \cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial p_i} \frac{\partial b_l}{\partial q_j} \frac{\partial b_i}{\partial q_h}}$$

$$- \cancel{\frac{\partial a_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_i} \frac{\partial a_l}{\partial q_h}} - \cancel{\frac{\partial a_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial q_i} \frac{\partial b_l}{\partial q_h}}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial a_l}{\partial q_j} \frac{\partial a_i}{\partial q_h}} + \cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_l} \frac{\partial b_l}{\partial q_j} \frac{\partial a_i}{\partial q_h}}$$

$$- \cancel{\frac{\partial b_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_l} \frac{\partial a_l}{\partial q_h}} - \cancel{\frac{\partial b_i}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_l} \frac{\partial b_l}{\partial q_h}}$$

$$= 0$$

Un calcul similaire donne le même résultat pour les termes devant $dq_j \wedge dp_h$ et $dp_j \wedge dp_h$.

Donc $(\varphi_{X_H}^t)^* \omega_0 \equiv cst$ le long de t

Comme $\varphi_{X_H}^0 = id \Rightarrow (\varphi_{X_H}^t)^* \omega_0 = \omega_0 \quad \forall t$

<u>Corollaire</u> : Si X_H est un champs de vecteur hamiltonien alors son flot preserve le volume

<u>Dem</u> : $(\varphi_{X_H}^t)^* \omega_0 = \omega_0 \Rightarrow (\varphi_{X_H}^t)^* \omega_0^{\wedge n} = \omega_0^{\wedge n}$

or $\omega_0^{\wedge n} = n!\, dq_1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq_n \wedge dp_n$

$\Rightarrow (\varphi_{X_H}^t)^* dq_1 \wedge dp_1 \dots dq_n \wedge dp_n = dq_1 \wedge dp_1 \dots dq_n \wedge dp_n$

§3 - Transformations symplectique

<u>Definition</u> : Soit $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$ un difféomorphisme $\psi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}'$ est symplectique si

$$\psi^* \omega_0 = \omega_0$$

On a donc vu que $\varphi^t_{X_H}$ est symplectique.

Plus généralement si $H : [0,1] \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est C^∞

on note $H_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $q \to H(t,q)$ et X_{H_t} le champs hamiltonien associé. Soit $\varphi^t_{X_{H_t}}$ l'isotopie locale associé

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\varphi^t_{X_{H_t}}) (\underline{q}, \underline{p}) \right) = X_{H_{t_0}}\left(\varphi^{t_0}_{X_{H_{t_0}}} (\underline{q}, \underline{p}) \right)$$

eq diff non autonome

alors le m calcul que précédemment donne :

<u>Théorème 10</u> (Poincaré)

$\varphi^t_{X_{H_t}}$ est symplectique

<u>Definition 11</u> : Avec les notations qui précèdent on dit ψ est un <u>difféo. hamiltonien</u> si

$\psi = \varphi^1_{X_{H_t}}$ pour un certain X_{H_t}

<u>Théorème 12</u> : Soit X_H un champs hamiltonien et $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ une transformation symplectique alors $\psi_* X_H = X_{H \circ \psi^{-1}}$

<u>Dem</u> : $\omega_0(\psi_* X_H, Y) = \omega_0(\psi_* X_H, \psi_* \circ \psi_*^{-1} Y)$

$= \psi^* \omega_0 (X_H, \psi_*^{-1} Y) \circ \psi^{-1} = \omega_0(X_H, \psi_*^{-1} Y) \circ \psi^{-1}$

$$= dH(\varphi_t^{-1}(Y)) \circ \psi^{-1} = d(H \circ \psi^{-1})(Y)$$
$$= \omega_0(X_{H\circ\psi^{-1}}, Y) \qquad \boxed{\square}$$

On en déduit

Théorème 13 : (a) Si ψ est hamiltonien et ψ' est hamiltonien alors $\psi \circ \psi'$ est hamiltonien

(b) Si ψ est hamiltonien et φ est symplectique alors $\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$ est hamiltonien

(c) Si ψ est hamiltonien alors ψ^{-1} est Hamiltonien

Demonstration :

(a) Soit H_t t.q. $\psi = \varphi^1_{X_H}$ et H'_t t.q. $\psi' = \varphi^1_{X_{H'}}$

alors $\varphi^t_{X_H} \circ \varphi^t_{X_{H'}}$ est engendré par $X_H + (\varphi^t_{X_H})_* X_G$

or $\omega_0(X_H + (\varphi^t_{X_H})_* X_G, Y)$

$= \omega_0(X_H, Y) + \omega_0((\varphi^t_{X_H})_* X_G, Y)$

$= dH(Y) + d(G \circ \varphi^t_{X_H})(Y)$

$= d(H + G \circ \varphi^t_{X_H})(Y) \rightsquigarrow \varphi^t_{X_H} \circ \varphi^t_{X_{H'}} = \varphi^t_{X_{(H + G\circ\varphi^t_{X_H})}}$

$\rightsquigarrow \varphi^1_{X_H} \circ \varphi^1_{X_{H'}}$ Hamiltonien

$\rightsquigarrow \psi \circ \psi'$ Hamiltonien

(b) Suppose $\psi = \varphi^1_{X_H}$ pour $H : [0,1] \times U \to \mathbb{R}$ et φ symplectique

$$A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi^{-1} \circ \varphi^t_{X_H} \circ \varphi(q,p) = d\varphi^{-1}_{\varphi^{t_0}_{X_H}(\varphi(q,p))} X_{H_{t_0}}\left(\varphi^{t_0}_{X_H} \circ \varphi(q,p)\right)$$

or $\omega_0(\cancel{A}, Y) = \cancel{\omega_0\left(X_{H_{t_0}}(\varphi^{t_0}_{X_H} \circ \varphi(q,p)), d\varphi_{(\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p))^{-1}}(Y)\right)}$

$= \cancel{(dH_{t_0})_{\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p)} \circ d\varphi\,(Y)}$

$\omega_0(A, Y) = \omega_0\left(d\varphi^{-1}_{\varphi^{t_0}_{X_H}(\varphi(q,p))} X_{H_{t_0}}(\varphi^{t_0}_{X_H} \circ \varphi(q,p)), Y \right)$

$= \omega_0\left(d\varphi_{\varphi^{-1}\circ\varphi^{t}_{X_H}\circ\varphi(q,p)} \circ d\varphi^{-1}_{\varphi^{t_0}_{X_H}(\varphi(q,p))} X_{H_{t_0}}(\varphi^{t_0}_{X_H} \circ \varphi(q,p)), d\varphi_{\varphi^{-1}\circ\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p)} Y \right)$

$= (dH_{t_0})_{\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p)} \circ d\varphi_{\varphi^{-1}\circ\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p)}(Y)$

$= d(H_{t_0} \circ \varphi)_{\varphi^{-1}\circ\varphi^{t_0}_{X_H}\circ\varphi(q,p)}(Y)$

$\leadsto \varphi^{-1}\circ\varphi^{t}_{H}\circ\varphi$ est engendré par $H_t \circ \varphi$

$\to \varphi^{-1}\circ\varphi^{t}_{H}\circ\varphi$ est Hamiltonien

(c) Exercice avec

$\varphi^{-t}_{X_H}$ est engendré par $(\varphi^t)^{-1} \cdot X_{H_t}$ $\square$

§4 - Exemples :

(a) $p \leftrightarrow q$ (position $\leftrightarrow$ vitesse / transformée de Legendre)

$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \to (-p_1, \cdots -p_n, q_1, \cdots q_n)$

$\varphi^* dq_i = -dp_i \qquad \varphi^* dp_i = dq_i$

$\Rightarrow \varphi^* dq_i \wedge dp_i = -dp_i \wedge dq_i = dq_i \wedge dp_i$

$\varphi^* \omega_0 = \omega_0$

Par ailleurs φ est Hamiltonien engendré par

$H(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = +(q_1^2 + \cdots + q_n^2 + p_1^2 + \cdots p_n^2)$

$\leadsto X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(+ p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$

$\varphi^t_H (q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = (\cos t\, q_1 + \sin t\, p_1, \cdots, \cos t\, q_n + \sin t\, p_n, -\sin t\, q_1 + \cos t\, p_1, \cdots -\sin t\, q_n + \cos t\, p_n)$

$\varphi^{\frac{3\pi}{2}}_H (q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) = \varphi$

(b) "Symplectification de difféomorphisme"

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme

$$\tilde{f} : U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^n$$
$$q, p \to \left(f(q), (df^{-1})^T_{f(q)} p\right)$$

$$\tilde{f}^* dq_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} dq_j + \cancel{dp_j}\right) \quad \tilde{f}^* dp_i = \sum_{j=1}^{n} \left((df^{-1})^T \circ f\right)_{ij} dp_j$$

car $(df^{-1})_{f(q)} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ est linéaire en $(p_1 \dots p_n)$

donc $$\tilde{f}^*(dq_i \wedge dp_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \cdot \left((df^{-1})^T \circ f\right)_{ih} dq_j \wedge dp_h$$

$$\cancel{= (df^{-1} \circ df)^T}$$

ce qui donne $$\tilde{f}^* \omega_0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} (df^{-1} \circ df)^T_{jh} dq_j \wedge dp_h$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j = \omega_0$$

(c) Version plus naturelle

$$T^* U \simeq U \times \mathbb{R}^n$$

$\cancel{(q(q_1, \dots q_n, p_1 \dots p_n) \to}$

La fonction précédente devient

$$\tilde{f}(\underline{q}, \underline{p}) = \left(f(q), (f^*_q)^{-1} \underline{p}\right)$$

Par ailleurs sur $T^*(T^*U)$ on a une 1-forme λ donnée par

$$\lambda_{(\underline{q}, \underline{p})}(V, W) = \underline{p}(V)$$

On remarque $\lambda_{(\underline{q}, \underline{p})} \frac{\partial}{\partial q_i} = p_i$ et $\lambda_{(\underline{q}, \underline{p})} \frac{\partial}{\partial p_i} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \Rightarrow \omega_0 = -d\lambda$$

§4 - Variétés symplectiques

Définition 14 : Une variété symplectique est une variété M munie d'un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ t.q. les fonctions de transition $\psi_{ij} : \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i)\cap\varphi_j(U_j))$

$$\downarrow$$

$$\varphi_j^{-1}(\varphi_i(U_i)\cap\varphi_j(U_j))$$

sont symplectiques.

Un tel atlas est appelé atlas symplectique, deux atlas sont équivalents si leur union est symplectique, une structure symplectique est une classe d'équivalence des atlas symplectiques.

Définition 15 : Un difféomorphisme $\varphi : M \to M'$ où M et M' sont symplectiques est un symplectomorphisme si

$$\forall\, i,j \quad \underbrace{\varphi_i^{-1}(\varphi_j(U_j))\cap U_i \xrightarrow{\varphi_i} M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\varphi_j'^{-1}} (U_j' \cap \varphi_i(U_i))}_{\text{transfo symplectique}}$$

Si $H : M \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ alors le champ X_H défini localement comme

$$X_H|_{\varphi_i(U_i)} = (\varphi_i)_* X_{H\circ\varphi_i}$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "H"] & \\ U_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[rr] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

est bien défini grâce au théorème 12.

C'est le champ de vecteurs Hamiltonien associé à H.

Son flot est formé de symplectomorphismes.
On définit de manière similaire un difféo. hamiltonien

On note $Symp(M) = \{ \varphi : M \to M \mid \varphi \text{ symplecto} \}$
$Ham(M) = \{ \varphi : M \to M \mid \varphi \text{ difféo Hamilt} \}$

$Symp(M)$ est un groupe et le théorème 13 (ARV)
implique que $Ham(M) \lhd Symp(M)$

$\leadsto$ on verra plus tard que en général $Ham(M) = Symp(M)$

Comme les changements de carte sont symplectiques
la deux forme $\omega \in \Omega^2(M)$ donnée par

$$\omega_x(X, Y) = (\omega_0)_{\varphi_i^{-1}(x)}(d\varphi_i^{-1}(X), d\varphi_i^{-1}(Y))$$

pour φ_i carte autour de x est bien définie
ω est fermée et non dégénérée.

On verra dans deux semaines que la réciproque
est vrai $\to$ si une telle deux forme existe alors
M est symplectique (thm de Darboux)
ce qui nous donnera une définition + manipulable

Pour l'instant on va s'intéresser aux aspect linéaire
des deux formes non dégénérées.