Chapitre 3 - Variétés symplectique

§1 - formes symplectiques

Définition 1 : Une forme symplectique ω sur une variété M est une 2-forme t.q.

ⓐ ω est non dégénérée

ⓑ $d\omega = 0$

On a vu que si M est une variété symplectique alors elle admet une forme symplectique.

Réciproquement on a

Thm 2 : (Darboux) si M est munie d'une forme symplectique alors M est symplectique et il existe un atlas symplectique $\{U_i, \varphi_i\}$ t.q.

$$\varphi_i^* \omega = \omega_0 .$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin de la généralisation suivante de ~~théo~~ la formule de Cartan.

Lemme 3 : Soit $\omega_t \in \Omega^k(M)$ $\forall t \in [0,1]$ ~~telque~~ ~~t~~ une famille lisse (i.e. $\forall x_1 \dots x_k$ ~~et~~ $\omega_t(x_1 \dots x_k)$ lisse sur $[0,1] \times M$) alors si X_t est un champs de vecteurs

~~on~~ on a $\displaystyle \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi_t^* \omega_t = \varphi_{t_0}^* \left(\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0} \right)$

où φ_t est l'isotopie (local) engendrée par X_t

Demonstration

On augment d'une dimension et on considère

$\cancel{M \times [0,1]}\ [0,1] \times M$

Soit $\tilde{X} \in \Gamma(T([0,1]\times M))$ donnée par

$$\tilde{X}_{(t,q)} = X_{t,q}$$

et $\tilde{\omega} \in \Omega^k([0,1]\times M)$ donnée par

$$\tilde{\omega}_{(t,q)}\left(a_1 \frac{\partial}{\partial t} + X_1, a_2 \frac{\partial}{\partial t} + X_2, \dots, a_k \frac{\partial}{\partial t} + X_k\right)$$
$$= \omega_{t,q}(X_1 \dots X_k)$$

De sorte que si $i_t : M \to [0,1]\times M$ alors $\omega_t = i_t^* \tilde{\omega}$
$\qquad q \to (t,q)$

et si $\tilde{\varphi}^t_{\tilde{X}}$ est le flot de $\tilde{X}$ alors

$$\tilde{\varphi}^t_{\tilde{X}}(0,q) = (t, \varphi^t_{X_t}(q))$$
$$\tilde{\varphi}^t_{\tilde{X}} \circ i_0(q) = i_t(\varphi^t_{X_t}(q))$$

Donc $\varphi_t^* \omega_t = (\varphi_t^* \circ i_t^*)\tilde{\omega} = \varphi^t i_0^*(\tilde{\varphi}^t_{\tilde{X}} \tilde{\omega})$

Or $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\tilde{\varphi}^t_{\tilde{X}})^* \tilde{\omega} = (\tilde{\varphi}^{t_0}_{\tilde{X}})^* \left(\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{\omega}\right)$

et $X_1 \dots X_k \in \Gamma(TM)$ (⚠ pas à $\Gamma(TM)$)

on trouve $\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{\omega}(X_1 \dots X_k)\right)_{t_0,q} = \dot{\omega}_{t_0}(X_1 \dots X_k) + \mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0}(X_1 \dots X_k)$

d'où le résultat $\boxed{\times}$

Nous pouvons maintenant aborder la preuve du théorème 2

Dem (théorème 2)

But : on va se mettre autour de q $(\in \mathcal{U})$
on va chercher $\varphi^t_{X_t}$ t.q. $(\varphi^1_{X_t})^* \omega = \omega_0$ (localement)

Plus précisément soit $q \in M$ et $\psi : \mathcal{U} \to M$ une carte autour de q. On note $\omega_1 = \psi^* \omega$.
(on suppose $\psi(0) = q$)

Le théorème 6 du chapitre précédent nous donne une transformation linéaire $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ t.q.

$$(L^* \omega_1)_0 = \omega_0 \quad \text{donc}$$

$\psi' : \mathcal{U}' = L^{-1}\mathcal{U} \to M$ est une carte telle que

$$\psi'^{)} \mathcal{U} \nearrow \omega_1' = ((\psi')^* \omega)_0 = \omega_0$$

On considère $\omega_t = t\omega_1' + (1-t)\omega_0$ (~~et~~
$(\omega_t)_0 = \omega_0$ $\forall t$ et donc $\exists\, 0 \in \mathcal{U}'' \overset{6}{\subset} \mathcal{U}'$ t.q.
ω_t est non dégénérée sur $\mathcal{U}''$.

On cherche X_t t.q. $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi^t_{X_t} \omega_t = 0$

Par le ~~théorème~~ Lemme 3 on veut résoudre

$$(\varphi^{t_0}_{X_t})^* (\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0}) = 0$$

or $\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} = d(X_{t_0} \lrcorner\, \omega_{t_0})$ $(+\, X_{t_0} \lrcorner\, \underset{0}{\underset{!!!}{d\omega_{t_0}}})$

Quitte à restreindre $\mathcal{U}''$ on peut supposer $\mathcal{U}'' = D^{2n}$
et donc car $d\dot{\omega}_{t_0} = 0$ on a $\dot{\omega}_{t_0} = d\alpha_{t_0}$
Pour une 1-forme α_t, on peut supposer de plus
$\alpha_t(0) = 0$

Soit X_t le champs de vecteur sur $\mathcal{U}$
t.q. $X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0} = \alpha_{t_0}$

Alors X_t résoud $\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0} = 0$
Remarquons que $X_t(0) \equiv 0$ $\Rightarrow$
le flot de X_t est défini pour $t \in [0,1]$ sur un ouvert $\mathcal{U}''' \subset \mathcal{U}''$.
Donc sur $\mathcal{U}'''$ $\varphi_{X_t}^{t_0 *} (\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0}) = 0$

$$\Rightarrow (\varphi_{X_t}^{t})^* \omega_t \equiv \text{cste}$$

or $\varphi_{X_t}^{0} \omega_0 = \omega_0$ $\Rightarrow (\varphi_{X_t}^{t})^* \omega_t = \omega_0$ $\forall t$
$\Rightarrow (\varphi_{X_t}^{1})^* \omega_1 = \omega_0$.

En somme :

$\forall q \in M$ $\exists$ $\psi_q : \mathcal{U}_q \to M$ carte t.q. $\psi_q(0) = q$ et $\psi_q^* \omega = \omega_0$

Donc $\{(\mathcal{U}_q, \psi_q)\}_{q \in M}$ ~~avec~~ est un atlas symplectique $\boxed{}$

§4- Variétés symplectique exacte

Définition 4 : Une variété symplectique (M, ω) est dite *exacte* si $\omega = d\lambda$.
λ est alors appelée une *forme de Liouville* de (M, ω).

Ex : Soit ~~M~~ Q une variété et T^*Q son fibré cotangent alors $\lambda_{can} \in \Omega^1(T^*Q)$ défini par $(\lambda_{can})_{(q,p)}(X) = p(d\pi(X))$ où $\pi : T^*Q \to Q$, $(q,p) \mapsto q$
s'écrit localement $\lambda_{can} = \sum p_i dq_i$ pour la carte

$$(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \to T^*Q$$
$$(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \mapsto (\varphi(q_1 \cdots q_n), p_1 (\varphi^{-1})^* dq_1, \ldots, p_n (\varphi^{-1})^* dq_n)$$

Et donc $-d\lambda_{can}$ est une forme symplectique
$\overset{!!}{\omega_0}$ on l'appelle la forme symplectique standard sur T^*Q.

Définition 5: Soit (M,ω) une variété symplectique exact et λ une forme de Liouville.
Le champs de Liouville V_λ associé à λ est le champs de vecteur défini par

$$V_\lambda \lrcorner\, \omega = \lambda$$

Théorème 6: Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exacte avec forme de Liouville λ.

① $\mathcal{L}_{V_\lambda}\omega = \omega \quad (\Rightarrow \varphi^t_{V_\lambda}{}^*\omega = e^t\omega)$

② $V_{\lambda+df} = V_\lambda + X_f$ où X_f est le champs Hamiltonien associé à f.

Dém:

①
$$\mathcal{L}_{V_\lambda}\omega = d(V_\lambda \lrcorner\, \omega) + V_\lambda \lrcorner\, d\omega$$
$$= d(\lambda) + 0 = \omega$$

②
$$\underset{\Downarrow}{V_{\lambda+df}} \lrcorner\, \omega = \lambda + df$$

et $(V_\lambda + X_f)\lrcorner\, \omega = \lambda + X_f \lrcorner\, \omega = \lambda + df$ $\boxtimes$

Théorème 7: Si (M,ω) ~~avec~~ est symplectique avec M compact sans bord alors ω n'est pas exact.

Dem : En effet supposons $\omega = d\lambda$

alors $\omega^{\wedge n} = d\lambda \wedge \omega^{n-1}$

$= d(\lambda \wedge \omega^{n-1})$

et donc $0 \neq \int_M \omega^{\wedge n} = \int_{\partial M} \lambda \wedge \omega^{n-1} = 0$ $\longrightarrow \Leftarrow$

$\partial M = \emptyset$

§5- Sous variétés des variétés symplectiques

Def 8 : Soit (M, ω) une variété symplectique et $i : \Sigma \hookrightarrow M$ une sous-variété alors

(1) Σ est isotrope si $\forall q \in \Sigma$ $T_q\Sigma \subset (T_qM, \omega_q)$ est isotrope

(2) Σ est co-isotrope ——— // ——— coisotrope

(3) Σ est lagrangienne si ——— // ——— lagrangien

(4) Σ est symplectique si $i^*\omega$ est symplectique

Remarque

① Σ est isotrope $\Leftrightarrow$ $i^*\omega = 0$

Donc Σ est lagrangienne $\Leftrightarrow$ $i^*\omega = 0$ et $\dim \Sigma = n$

② Σ est symplectique $\Leftrightarrow$ $i^*\omega$ est non dégénérée.

Théorème 9 : Soit $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $L \subset M$ une sous variété co-isotrope.

Alors $H|_L \equiv$ constante $\Rightarrow$ X_H tangent à L

Dem : $dH_q(Y) = 0$ $\forall Y \in T_qL$

$\Rightarrow \omega(X_{H_q}, Y) = 0$ $\forall Y \in T_qL \Rightarrow X_{H_q} \in (T_qL)^{\omega_q} \subset T_qL$

$\Rightarrow X_{H_q} \subset T_qL$ $\boxtimes$

Exemples :

(1) Soit Σ une surface orientable (i.e. $\exists\, \omega_0 \neq 0$ sur Σ)
alors $d\omega_0 = 0 \Rightarrow \Sigma$ symplectique.
$\cancel{\exists}$ si $L \subset \Sigma$ est t.q. $\dim L = 1$ alors
L est lagrangienne

(2) $\iota : Q_0 \subset T^*Q$ $\qquad \iota^* \lambda_{can} = 0$
$q \to (q,0)$ $\qquad \Rightarrow Q_0$ lagrangienne

de même $\quad T^*_{q_0}Q = \{(q_0, p)\} \overset{j}{\subset} T^*Q$
$j^* \lambda_{can} = 0 \quad \Rightarrow T^*_{q_0}Q$

Plus généralement si $\alpha \in \Omega^1(M)$ i.e
$\alpha : M \to T^*M$ t.q. $\pi \circ \alpha = id$
alors $(\alpha^* \lambda_{can})_q (X) = (\lambda_{can})_{(q,\alpha_q)} (d\alpha(X))$
$= \alpha_q (d\pi \circ d\alpha(X)) = \alpha_q(X)$
$\Rightarrow \alpha^* \lambda_{can} = \alpha$
$\Rightarrow \alpha^* \omega = -d\alpha$ donc $\alpha(M)$ est lagrangienne
$\Leftrightarrow \alpha$ fermée.

(3) Espace projectif complexe
On considère $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = S^{2n+1} / S^1$

et $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$

Alors ω_{FS} sur $\mathbb{C}P^n$ défini par
$(\omega_{FS})_{[p]} (X, Y) = (\omega_0)_q (\tilde{X}, \hat{Y})$ où
$\pi(q) = [p]$
$d\pi(\tilde{X}) = X$
$d\pi(\hat{Y}) = Y$
est bien définie et symplectique

~~Exercice~~ (on verra plus tard une construct° plus générale)

Définition 10. Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique. $i: L^n \subset M^{2n}$ est dite "lagrangienne exacte" si
$$i^*\lambda = df.$$

~~L'introd~~ Une des premières conséquences du théorème de compacité de Gromov a été de montrer qu'il n'existe pas de sous variétés lagrangiennes exactes compacte dans $\mathbb{R}^{2n}$

§6. Voisinnage de Weinstein

On va démontrer le théorème suivant

Thm 12 : Soit $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne compacte alors $\exists$ un voisinage $\mathcal{U}_L$ de L dans M ~~et~~
$$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow T^*L \text{ ~~top.~~ plongement t.q.}$$

(1) $\varphi(L) = L_0$
(2) $\varphi^*\omega_0 = \omega$

Demonstration :

Soit $\mathcal{U}$ un ~~voisinnage~~ tubulaire de L identifié avec un voisinnage de la section nulle de $NL := i^*TM / TL$

Comme L est lagrangien l'application
$$\varphi : NL \longrightarrow T^*L$$
$$(x, [v]) \longrightarrow (x, \alpha_v) \quad \text{où} \quad \alpha_v(w) = \omega(v, w)$$

est un isomorphisme

On a donc l'existence d'un voisinage $\mathcal{U}'$ de L et d'un plongement $\varphi' : \mathcal{U}' \longrightarrow T^*L$ ~~q~~ de plus

rangel $\left(\cancel{((\varphi')^*\omega_0)_q (V, W)} = \cancel{\alpha_V(\omega_0)}_{(q,0)} \right.$

pour $q \in L$

$$\left((\varphi')^* \cancel{d(\alpha_2)} \right)_q \cancel{V}$$

$$\left((\varphi')^* \omega_0 \right)_{(q,[0])} (V, W) = (\omega_0)_{(q,[0])} \left(d\varphi'(V), d\varphi'(W) \right)$$

$$\alpha_V(W) - \alpha_W(V) = \omega_{(q,0)}(V, W)$$

donc $(\varphi')^* \omega_0 = \omega$ sur L

On cherche comme dans la preuve du théorème de Darboux une isotopie φ_t t.q. $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ où $\omega_t = t\omega + (1-t)\varphi^* \omega_0$

$$\rightsquigarrow \varphi_{t_0}^* \left(d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) + \dot{\omega}_{t_0} \right) = 0$$

et donc on cherche à résoudre

$$d(X_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) = -\omega + \varphi^* \omega_0$$

Or $-\omega + \varphi^* \omega_0 = 0$ si L $\Rightarrow$ $-\omega + \varphi^* \omega_0$ est exact sur $\mathcal{U}'$

On trouve donc X_{t_0} (qui de plus est 0 sur L)

$\rightsquigarrow$ ~~le flo~~ X_t définit une isotopie proche de $\cancel{\varphi_{t_0}}$

$\boxed{}$

Ce théorème à déjà quelques conséquence :

Soit $L \subset M$ lagrangienne orientable et $[L] \in H_n(M)$ la classe d'homologie qu'elle représente alors $[L] \cdot [L] \in H_0(M)$

$$-\chi(L)$$

En tre autre si $L \subset \mathbb{C}^n$ est lagrangien orientable

$$\chi(L) = 0$$

§5 - Symplectomorphismes

On s'intéresse maintenant à la différence entre $Sym(M,\omega)$ et $Ham(M,\omega)$.

Définition - 12 : Un champs de vecteur X sur (M,ω) est dit *symplectique* si la 1-forme $X \lrcorner \omega$ est fermée.

En effet dans ce cas $\mathcal{L}_X \omega = d(X \lrcorner \omega) = 0$ et donc $(\varphi_X^t)^* \omega = \omega$

Un champs Hamiltonien est symplectique. La différence entre champs hamiltonien et symplectiques est la même que la différence entre formes fermée et exactes et est donc encodée dans $H^1_{dR}(M)$.

Thm 13 : Soit X, Y deux champs symplectique alors $[X,Y]$ est Hamiltonien pour la fonction $\omega(Y,X)$

Dem : $d\omega = 0 \Rightarrow \forall Z$ $X\omega(Y,Z) - Y\omega(X,Z) + Z\omega(Y,X)$

$$- \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X) = 0$$

○ $X \lrcorner \omega$ fermée $\Rightarrow \forall Z_0, Z_1$ $Z_0(\omega(X,Z_1)) - Z_1\omega(X,Z_0) - \omega(X,[Z_0,Z_1]) = 0$

□ $Y \lrcorner \omega$ fermée $\Rightarrow \forall Z_0, Z_1$ $Z_0(\omega(Y,Z_1)) - Z_1\omega(Y,Z_0) - \omega(Y,[Z_0,Z_1]) = 0$

○ □

$\star \Rightarrow Z\cdot\omega(X,Y) - Z\omega(X,Y) + Z\,\omega(Y,X) - \omega([X,Y],Z) = 0$

et donc $Z\,\omega(Y,X) = \omega([X,Y],Z)$

$\Rightarrow [X,Y] \lrcorner \omega = d\omega(Y,X)$ □

Thm 15: Soit $\{\varphi_t\}$ une isotopie Hamiltonienne (engendrée par $\{H_t\}$) et $\gamma : S^1 \to M$ une application lisse
$$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$
alors
$$\int_{S^1\times[0,1]} C^*\omega = 0 \quad \text{où} \quad \begin{aligned} C : S^1\times[0,1] &\to M \\ \theta, t &\to \varphi_t(\gamma(\theta)) \end{aligned}$$

Dem : $C^*\omega_{(\theta,t)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \omega_{\varphi_t(\gamma(\theta))}\left(d\varphi_t(\dot\gamma(\theta)), X_{H_t}(\varphi_t(\gamma(\theta)))\right)$

$= -(dH_t)_{\varphi_t(\gamma(\theta))}\, d\varphi_t(\dot\gamma(\theta)) = -d(H_t\circ\varphi_t)_{\gamma(\theta)}(\dot\gamma(\theta))$

$= -\frac{\partial}{\partial\theta}(H_t\circ\varphi_t\circ\gamma)(\theta)$ donc

$$\int_{S^1\times[0,1]} C^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \omega_{(\theta,t)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right) d\theta\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\frac{\partial}{\partial\theta}(H_t\circ\varphi_t\circ\gamma)(\theta)\, d\theta\, dt$$

$$= \int_0^1 H_t\circ\varphi_t(\gamma(2\pi)) - H_t\circ\varphi_t\circ\gamma(0) = 0 \quad \text{car } \gamma(2\pi) = \gamma(0) \ \square$$

⚠ le théorème 15 ne dit pas que φ_1 n'est pas Hamiltonien mais ~~st~~ seulement que l'isotopie $\{\varphi_t\}$ n'est pas hamiltonienne

Ex : $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ avec $dx\wedge dy$

alors $\varphi_t : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est t.q. $\varphi_1 = id$ et
$x, y \to (x+t, y)$ donc hamiltonien

mais l'isotopie n'est pas hamiltonienne :

pour $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$t \to \left(\frac{t}{2\pi}, 0\right)$ a $\int C^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2\pi} ds\, dt$

$= 1$

Cependant dans le cas exacte :

~~Thm 13~~ : Soit $\{\varphi_t\}$ une isotopie et $\gamma : S^1 \to M$ comme dans le théorème précédent alors si $\omega = d\lambda$

$$\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} C^*\omega = \int_0^{2\pi} \gamma^*\lambda - \int_0^{2\pi} (\varphi_1\circ\gamma)^*\lambda$$

en effet $\partial C : S^1_0 \sqcup S^1_1 \to M$ + Stokes.

$\theta_0 \longrightarrow \gamma(\theta_0)$

$\theta_1 \longrightarrow \varphi_1\circ\gamma(\theta_1)$

Ce qui nous permet de donner notre première exemple de symplectomorphisme non hamiltonien

Ex : Soit $T^*S^1 = S^1\times\mathbb{R}$ avec $d\theta\wedge dp = d(-p\,d\theta)$

$\varphi : T^*S^1 \to T^*S^1$ on a $\varphi^* d\theta = d\theta$

$(\theta, p) \to (\theta, p+1)$ $\varphi^* dp = dp$

$\Rightarrow \varphi^*\omega = \omega$ donc φ est un symplectomorphisme

Supposons que φ soit φ_1 pour $\{\varphi_t\}$ hamiltonienne

alors pour $\gamma : S^1 \to T^*S^1$ on $\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} C^*\omega = 0$

$\theta \to (\theta, 0)$

or $\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} C^*\omega = \int_{\varphi_1\circ\gamma} p\,d\theta - \int_\gamma p\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta - \int_0^{2\pi} 0\, d\theta = 2\pi$ car $\gamma^* p\,d\theta = 0$ et $\varphi_1\circ\gamma^* p\,d\theta = d\theta$

Donc φ n'est pas hamiltonien.

Un argument quasiment similaire montre que

$$\varphi_t : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$$ n'est pas
$$(x, y) \to (x+t, y)$$

hamiltonien pour $t \in]0,1[$.

En fait si $\int c^*\omega$ est vu comme de $\mathbb{R}/\Gamma_\omega$

relié à $\left\{ \oint \omega \right\} \longrightarrow \Gamma_\omega$

alors $\int c^*\omega$ ne dépend que des extrémités de $\{\varphi_t\}$

Banyaga montre que
$$\Gamma : Symp_0(M,\omega) \to \mathbb{R}/\Gamma_\omega$$
$$\{\varphi_t\} \to \int c^*\omega$$

est un morphisme de groupe t.q. $\operatorname{Ker}\Gamma = Ham(M,\omega)$ et que

- $[Symp_0(M,\omega), Symp_0(M,\omega)] = Ham(M,\omega)$ si M compact (voir Thm 13 pour cas infinitésimal)
- $Ham(M,\omega)$ est simple
- $\varphi \in Ham(M,\omega)$ est décomposable en $\varphi_{X_1} \circ \cdots \circ \varphi_{X_k}$ où $X_1, \ldots, X_k$ champs hamil. autonome.

Tout ceci est mentionné mais ne sera pas abordé dans ce cours.

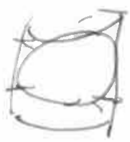
§6- *Exemple* :

① Archimède

On considère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$\{x,y,z \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ avec $\omega_q(x,y) = \langle x\times y, q\rangle$

et le cylindre $S^1\times[0,1]$ muni de $d\theta\wedge dt$



$p: S^2 \setminus \{(0,0,\pm1)\} \longrightarrow S^1\times[0,1]$ est

$x,y,z \longrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$

un symplectomorphisme.

On utilise $\chi: S^1\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow S^2\setminus\{0,0,\pm1\}$

$\theta,\varphi \to (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\langle \frac{\partial}{\partial\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}, \chi(\theta,\varphi)\rangle = \cos\varphi$

et donc $\chi^*\omega = \cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi$

On $p\circ\chi(\theta,\varphi) = (\theta, \sin\varphi)$

et donc $(p\circ\chi)^* d\theta\wedge dt = \cos\varphi\, d\theta\wedge d\varphi$

$\cancel{(\chi\circ p)^*}$ $\rightsquigarrow$ $\chi^* p^*(d\theta\wedge dt) = \chi^*\omega$

et donc $p^* d\theta\wedge dt = \omega$ car χ^* est inversible.

② Soit $f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$z_1\dots z_n \longrightarrow z_1^2+\dots z_n^2$

Vous verrez en exercice que $\omega_0|_{f^{-1}(1)}$ est symplectique

$f(z_1\dots z_n)=1 \iff x_1^2+\dots x_n^2 = 1+y_1^2+\dots y_n^2$

$\sum x_iy_i=0 \quad (\iff (x_1\dots x_n)\perp(y_1\dots y_n))$

$\varphi: T^*S^{n-1} \longrightarrow f^{-1}(1)$

$q_1\dots q_n,p_1\dots p_n \longrightarrow (uq_1,\dots uq_n, vp_1,\dots vp_n)$

où $u = \left(\frac{1+\sqrt{1+4|p|^2}}{2}\right)^{+\frac{1}{2}}$ et $v = \left(\frac{1+\sqrt{1+4|p|^2}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

ici $T'S^{n-1} \simeq \left\{ (q,p) \;\middle|\; \begin{array}{l} |q|=1 \\ \langle p,q\rangle = 0 \end{array} \right\}$

en effet $\varphi^* dx_i = q_i\, du + u\, dq_i$

$$= q_i \sum_{j=1}^{n} \frac{4 v p_j}{\sqrt{1+4|p|^2}} dp_j + u\, dq_i$$

et donc

$$\varphi^* y_i dx_i = \frac{4v^2 p_i q_i}{\sqrt{1+4|p|^2}} \sum_{j=1}^{n} p_j dp_j + p_i dq_i$$

$$\varphi^*\left(\sum_{i=1}^{n} y_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4v^2}{\sqrt{1+4|p|^2}} p_i q_i \sum_{j=1}^{n} p_j dp_j + \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{4v^2}{1+4|p|^2} p_i q_i}}_{0} \right) p_j dp_j + \sum p_i dq_i$$

et donc $\varphi^*\left(\sum dx_i \wedge dy_i\right) = \sum dq_i \wedge dp_i$