Chapitre 4 - Réduction symplectique

· On commence par introduit un théorème important caractérisant les distributions intégrables.

§1 - Théorème de Frobenius

Dans cette section M désigne une variété lisse.

Définition 1. - Une distribution (lisse) ξ sur M est la donnée pour tout x de M d'un sous-espace $\xi_x \subset T_x M$ t.q. $\forall x \in M$ $\exists x \in U$-voisinage $\{X_1 \cdots X_k\}$ champs de vecteurs sur U t.q. $\forall y \in U$ $X_1(y), \cdots X_k(y)$ lin. ind et $\xi_y = \langle X_1(y), \cdots X_k(y) \rangle$.

· le nombre k est appelé le rg de la distribution.

Ex : ① Une distribution de rang 1 est localement donnée par un champs de vecteur $\neq 0$ à une constante près

② Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ t.q. $\alpha_x \neq 0$ $\forall x \in M$ alors $\xi = \ker \alpha$ est une distribution de rang $n-1$:

en effet $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists$ coord $(x_1 \cdots x_n)$ t.q.

$$\alpha|_U = dx_1 \Rightarrow \ker \alpha = \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$$

Définition 2 : Soit ξ^k une distribution de rg k

Une sous variété $i : \Sigma^k \subset M$ de dimension k est dite intégrale pour ξ si $\forall q \in \Sigma^k$ $T_{i(q)}\Sigma = \xi_{i(q)}$

Définition 3 : Une distribution ξ^k est dite intégrable si $\forall x \in \mathcal{U}$ $\exists$ $c : \Sigma \hookrightarrow M$ intégrale pour ξ t.q. $x \in c(\Sigma)$

Exemple :

① Soit $M \times N$ un produit de variétés alors

$T_{(x,y)} M \times N = T_x M \oplus T_y N$. $\xi_{(x,y)} = T_y N$ définit une distribution intégrable

② La distribution donnée par un champs de vecteur non nulle est intégrable.

③ ξ sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\xi_{(x,y,z)} = \ker(dz - y dx)$

n'est pas intégrable. En effet supposons $\exists$ $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \xi_{f(u,v)}$ alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial u} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f_3}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial f_1}{\partial u} - f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = 0 \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} - f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} df \leq 1 \Rightarrow f \text{ ne peut être une immersion.}$$

Théorème 4 Soit ξ une distribution

ξ est intégrable $\Longleftrightarrow$ $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ $\left(\forall q\ X_q, Y_q \subset \xi_q\right)$ $\Rightarrow \left(\forall q\ [X,Y]_q \subset \xi_q\right)$

Démonstration

($\Rightarrow$) Supposons ξ intégrable. Soit $X, Y \subset \xi$ et $q \in M$

Soit $c : \Sigma \to M$ $dc(T_q\Sigma) = \xi_{c(q)}$ et $c(q_0) = q$

Alors notons $(X_0)_x$ le vecteur de $T_x\Sigma$ t.q.
$(dc)_x X_0 = X_{c(x)}$. Alors si $\gamma_0(t)$ est courbe integrale de X_0
$c(\gamma_0(t))$ est courbe integrale de X. Donc
φ_X^t preserve $(\Sigma) \Rightarrow \forall t\ (\varphi_X^t)_* Y_q$ est tangent à (Σ)
Et donc $[X,Y]_q = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_X^t)_* Y(q)$ est tangent à (Σ)
$\Rightarrow [X;Y]_q \in \xi_q$

$(\Leftarrow)$ Soit $q \in M$ et $q_1 \cdots q_n$ coordonnées autour de q t.q. $\xi_q = \langle \frac{\partial}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial}{q_h} \rangle$. Quitte à reduire la carte on a $\forall x \in U$ $\xi_x \cap \langle \frac{\partial}{\partial q_{h+1}}, \cdots \frac{\partial}{q_n} \rangle = \{0\}$.

Soit $\tilde{X}_1, \cdots \tilde{X}_h$ des champs de vecteurs sur U t.q. $\tilde{X}_1 \cdots \tilde{X}_h \subset \xi$. On peut supposer $\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}$
et $\tilde{X}_i(q) = \frac{\partial}{\partial q_i}$ $\forall i = 1 \cdots h$

$$\tilde{X}_2(q) = f_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \sum_{j=3} h_2^j \frac{\partial}{\partial q_j} \qquad g \neq 0$$

posons $\tilde{X}_2'(q) = \frac{1}{g}(\tilde{X}_2 - f X_1) = \frac{\partial}{\partial q_2} + \sum_{j=3} h_2'^j \frac{\partial}{\partial q_j}$

$$\tilde{X}_3(q) = f_{3,1} \frac{\partial}{\partial q_1} + f_{3,2} \frac{\partial}{\partial q_2} + g_3 \frac{\partial}{\partial q_3} + \sum_{j=4} h_3^j \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$\tilde{X}_3'(q) = \frac{1}{g_3}(\tilde{X}_3 - f_{3,1}\tilde{X}_1 - f_{3,2}\tilde{X}_2')$$

$\vdots$

$$\tilde{X}_h' = \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{h>i} h_i^j \frac{\partial}{\partial q_j}$$

En resumé on fabrique $X_1 \cdots X_h \subset \xi$ t.q.

$$X_i = \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{j \geq h+1} h_j^i \frac{\partial}{\partial q_j}$$

Par hypothèse $[X_i, X_j] \subset \xi$ et
$[X_i, X_j] \subset \langle \frac{\partial}{\partial q_{h+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial q_n} \rangle$. Donc $[X_i, X_j] = 0$

Prenons $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon)\times\cdots\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$
$t_1 \cdots t_n \to \varphi^{t_1}_{X_1}\circ\cdots\circ\varphi^{t_n}_{X_n}(x)$

Alors $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)_{(t_1^0,\dots,t_n^0)} = X_i\left(\varphi^{t_1^0}_{X_1}\cdots\varphi^{t_n^0}_{X_n}(x)\right)$
qui est tangent à ξ.

Rappel: $\varphi^{t_i}_{X_i}\circ\varphi^{t_j}_{X_j} = \varphi^{t_j}_{X_j}\circ\varphi^{t_i}_{X_i}$ car $[X_i,X_j]=0$ □

En fait la preuve donne légèrement plus :

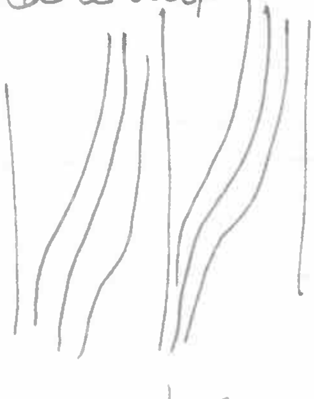
ξ intégrable $\Rightarrow \forall x\in M \ \exists\ \mathcal{U} =]0,1[^n \subset M$ t.q.
$\xi|_{\mathcal{U}} = T\,]0,1[^k$

 feuilletage

On définit dans ce cas $x\sim y \iff \exists\, \Sigma$ connexe intégrale de X t.q. $x,y\in\Sigma$
$\iff \exists\, \gamma:[0,1]\to M$ $\dot\gamma(t)\in\xi_{\gamma(t)}$
$\gamma(0)=x$ $\gamma(1)=y$

((c.a.d localement $x\sim y \iff \pi(x)=\pi(y)$ via $\pi:[0,1]^n\to[0,1]^{n-k}$)

<u>Remarque</u> : Généralement $M/\sim$ n'est pas une variété :



$\Downarrow \sim$
pas Hausdorff.

Mais dans certain cas si est $T_{[x]}M/\sim = T_xM/\xi_x$

§2 - Réduction symplectique

Lemme 5 : Soit (M,ω) une variété symplectique.
Soit $j: Q \subset M$ une sous-variété co-isotrope.
Soit $X \in \mathcal{X}(Q)$ t.q. $\forall q \; X_q \subset (T_qQ)^\omega$
et notons $\omega_Q = j^*\omega$ alors
$\mathcal{L}_X \omega_Q = 0$

Demonstration

$$\mathcal{L}_X \omega_Q = d(X \lrcorner \omega_Q) + X \lrcorner d\omega_Q$$
$$= \underset{\text{car } X \in (TQ)^\omega}{0} \quad \underset{\text{car } \omega_Q \text{ fermée}}{0}$$

$\boxed{}$

Pour le reste de la section $j: Q \subset M$ est coisotrope et $\omega_Q = j^*\omega$.

On note TQ^ω la distribution sur Q donnée par $(TQ^\omega)_q = (T_qQ)^\omega$. C'est une distribution de rang $\dim M - \dim Q \leq n$.

Théorème 6 : La distribution $(TQ)^\omega$ est integrable.

Dem : d'après le théorème de Frobenius il faut vérifier que $X, Y \in (TQ)^\omega \Rightarrow [X,Y] \subset TQ^\omega$

On sait $X \in T_qQ^\omega \iff \forall Z \in T_qQ \;\; \omega_Q(X,Z) = 0$

Soit $X, Y \subset TQ^\omega$ et $Z \in \mathcal{X}(Q)$
alors

$$0 = d\omega_Q(X,Y,Z) = X\cdot\omega_Q(\cancel{Y},Z) - Y\omega_Q(\cancel{X},Z) - Z\,\omega_Q(\cancel{X},Y)$$
$$-\omega_Q([X,Y],Z) + \omega_Q(\cancel{[X,Z]},Y) - \omega_Q(\cancel{[Y,Z]},X)$$

donc $\forall Z \quad \omega_Q([X,Y],Z)=0$

$$\Rightarrow [X,Y] \subset TQ^{\omega} \qquad \boxed{}$$

Définition 7 : On dit que Q est <u>réductible</u> si $Q/_\sim$ est une variété t.q. $T_{[x]}Q/_\sim = T_xQ/_{(T_xQ)^{\omega}}$ avec $\pi : Q \to Q/_\sim$ submersion.

<u>Théorème 8</u> : Soit $j : Q \to M$ une ~~deux form~~ sous variété réductible alors la deux forme $\bar\omega \in \Omega^2(Q/_\sim)$ donnée par

$$\bar\omega_{\bar q}(\bar X,\bar Y) = (\omega_Q)_q(X,Y) \text{ où } d\pi(X)=\bar X \text{ et } d\pi(Y)=\bar Y$$

- bien définie
- symplectique.

Dem : Le chapitre 2 nous garanti que $\omega_{\bar q}(\bar X,\bar Y)$ ne dépend pas du choix du relevée dans T_qQ.

On doit vérifier que ω_q ne dépend pas de $q \in \bar q$.

Soit q, q' t.q. $\pi(q)=\pi(q')$ i.e. $\exists\,\gamma$ t.q. $\dot\gamma(t)\in T_{\gamma(t)}Q^{\omega}$ et $\gamma(0)=q$ $\gamma(1)=q'$ et on peut suppose γ plongée.

On peut étendre $\dot\gamma(t)$ à un champs de vecteur $Z \subset TQ^{\omega}$

Alors Lemme 5 $\Rightarrow \mathcal{L}_Z\omega = 0$

$$\Rightarrow \omega_{q'}(d\varphi_Z^1(X), d\varphi_Z^1(Y)) = \omega_q(X,\cancel{Y})$$

Or $\pi \circ \varphi_z^t = \pi$ donc
$d\pi \circ d\varphi_z^1(x) = d\pi(x)$ et $d\pi \circ d\varphi_z^1(y) = d\pi(y)$

Ce qui donne $\overline{\omega}$ est bien définie.
Par ailleurs le Chapitre 2 donne $\overline{\omega}$ non dégénérée

Par construction $\pi^* \overline{\omega} = \omega_Q$
et donc $\pi^* d\overline{\omega} = 0$.

Or $d\pi_q : T_q Q \to T_{\bar q} Q/_{\sim}$ surjective
$\Rightarrow (d\pi_q)^* : T^*_{\bar q} Q/_{\sim} \to T^*_q Q$ injective
$\Rightarrow ((d\pi_q)^*)^{\wedge 3} : \Lambda^3 T^*_{\bar q} Q/_{\sim} \to \Lambda^3 T^*_q Q$ injective
$\Rightarrow d\overline{\omega} = 0$ $\boxed{}$

§ 3 - Exemples :

ⓐ $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ $\quad S^{2n-1} = \{ |q|^2 + |p|^2 = 1 \}$ est co-isotrope

En identifiant $\omega_0(X, Y) = \langle iX, Y \rangle$ $\quad \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$
$q, p \to q + ip$

$X \in T_{q+ip} S^{2n-1} \iff \langle X, q+ip \rangle = 0$

$X \in (T_{q+ip} S^{2n-1})^{\omega} \iff \langle iX, Y \rangle = 0 \quad \forall\, Y \perp q+ip$

et $X \in (T_{q+ip} S^{2n-1})^{\omega} \iff iX \,//\, q+ip$

$S^{2n-1}/_{\sim} = \mathbb{C}P^n$ et la forme symplectique induite est la forme vue au chapitre précédent.

$x, y \in S^{2n-1}$ $\quad [x] = [y]$ ds $\mathbb{C}P^n$

$\iff e^{i\theta} x = y$ $\quad \Rightarrow x \sim y$ car $\frac{d}{dt} e^{it} x = i e^{it} x$

(b) $Q = \{ |p|^2 = 1 \} \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

$(x,y) \subset T_{(q,p)}\mathbb{R}^{2n} = T_q\mathbb{R}^n \oplus T_p\mathbb{R}^n$

(x,y) tangent à $Q \iff y \perp p$

$(x,y) \in T_{(q,p)}Q^{\omega} \iff \forall y' \perp p \quad x'$
$\langle y, x' \rangle - \langle x, y' \rangle = 0$

$\iff \forall x' \in T_q\mathbb{R}^n \quad y' \perp p \quad \langle x, y' \rangle = \langle y, x' \rangle$

et donc $y = 0$ et $x // p$

Donc $\gamma(t) = (q + tp, p)$ est une trajectoire tangente à TQ^{ω_0}

$$\varphi : \quad Q/_{\sim} \longrightarrow T^*S^{3n-1}$$
$$\overline{(q,p)} \longrightarrow (p, -q + \langle q,p \rangle p)$$

$\forall t \qquad q + tp, p \to p, \ -q - tp + \langle q,p \rangle p + t \langle p,p \rangle p$
$\Rightarrow \varphi$ bien définie

On note $\overline{\pi} = \varphi \circ \pi : \quad Q \to T^*S^{2n-1}$
$q, p \to (p, -q + \langle q,p \rangle p$

alors $\overline{\pi}^* \cancel{dq = dp}$
$\overline{\pi}^*(\sum dq_i) = \sum dp_i$

et donc $\overline{\pi}^*(\sum p_i dq_i) = \sum (-q_i + \langle q,p \rangle p_i) dp_i$
$= -\sum q_i dp_i + \langle q,p \rangle \sum p_i dp_i$

or $\sum p_i^2 = 1 \quad \Rightarrow 2 \sum p_i dp_i = 0$

et donc $\overline{\pi}^* \omega_0 = \omega_Q \quad \Rightarrow \varphi^* \omega_0 = \overline{\omega_0}$

$\Rightarrow Q/_{\sim} \simeq T^*S^{2n-1}$

(c) Soit N sous variété de M alors

$$T^*M|_N = \left\{ (q,p) \,\middle|\, \begin{array}{l} q \in N \\ p \in T_q^* N \end{array} \right\}$$ est co-isotrope

En effet soit ~~U_0~~ $(q_1 \cdots q_n)$ coord t.q.

$$U \cap N = \{ (q_1 \cdots q_k, 0, \cdots 0) \}$$

$V = U_0 \times (\mathbb{R}^n)^* = \{(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)\}$ est une carte de T^*M t.q.

$$V \cap T^*M|_N = \{ (q_1 \cdots q_k, 0 \cdots 0, p_1 \cdots p_n) \}$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ est dans $T(T^*M|_N)^\omega$

$\Leftrightarrow \forall a_1' \cdots a_k', b_1' \cdots b_n'$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i' b_i - a_i b_i' + \sum_{i=k+1}^{n} a_i b_i' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \cdots = a_n = 0 \\ b_1 = \cdots \quad b_k = 0 \end{cases} \Rightarrow X \in T(T^*M|_N)$$ et $T^*M|_N / \sim \cong T^*N$

De plus $\hat{\pi} : T^*M|_N \to T^*N$ est t.q.

$$q, p \to (q, p|_{T_q N})$$

$$\hat{\pi}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i dq_i\right) = i^*\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i\right)$$

Donc $T^*M|_N / \sim \ \hat{\cong}\ T^*N$
symplecto

(c) Soit ~~$\mathcal{N}$~~ N sous variété de M alors

$$T^*M|_N = \left\{ (q,p) \,\middle|\, \begin{matrix} q \in N \\ p \in T_q^*N \end{matrix} \right\} \text{ est co-isotrope}$$

En effet soit ~~$\mathcal{U}_0$ et~~ $(q_1 \cdots q_n)$ coord t.q.

$$\mathcal{U} \cap N = \{ (q_1 \cdots q_k, 0, \cdots 0) \}$$

$$V = \mathcal{U}_0 \times (\mathbb{R}^n)^* = \{ (q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \} \text{ est une}$$

carte de T^*M t.q.

$$V \cap T^*M|_N = \{ (q_1 \cdots q_k, 0 \cdots 0, p_1 \cdots p_n) \}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{est dans} \quad T(T^*M|_N)^\omega$$

$\Leftrightarrow \forall a_1' \cdots a_k', b_1' \cdots b_n'$

$$\sum_{i=1}^k a_i' b_i - a_i b_i' + \sum_{i=k+1}^n a_i b_i' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \cdots = a_n = 0 \\ b_1 = \cdots \; b_k = 0 \end{cases} \Rightarrow X \in T(T^*M|_N) \text{ et } T^*M|_N/\sim \cong T^*N$$

De plus $\hat{\pi} : T^*M|_N \to T^*N$ est t.q.

$$q, p \to (q, p|_{T_q N})$$

$$\hat{\pi}\left(\sum_{i=1}^k p_i dq_i \right) = i^*\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i \right)$$

Donc $T^*M|_N /\sim \; \overset{\hat{}}{\cong} T^*N$ symplecto

(d) $T^*(M \times N) \simeq T^*M \times T^*N$

$$W_N = \left\{ (q_1, q_2, p, 0) \,\middle|\, \begin{matrix} q_1 \in M \\ q_2 \in N \\ p \in T_{q_1}^*M \end{matrix} \right\} \quad W_N \text{ est co-isotrope}$$

$*$ $T_{(q_1, q_2, p, 0)} W_N = T_{(q_1, p)} M \times T_{q_2} N$

~~$X \in T$~~ $(X, Y) \in (T_{q_1, p_2, p, 0} W_N)^{\omega_0}$

$\Leftrightarrow \forall (X', Y') \in T W_N \; \omega_0(X, X') \oplus \omega_0(Y, Y') = 0$

$\Rightarrow \underline{X = 0} \quad Y' \in T_{q_2} N \quad \Rightarrow (X, Y) \in T_{q_1, q_2, p, 0}^{\;\;\omega}$

~~$T_{q_1, p_2 p_0}$~~ $\quad \omega/\sim \; \simeq \; T_{q}^* M$ car $\pi : (q_1, q_2, p, 0) \to (q_1, p)$
est t.q. $\pi^*(p\,dq_1) = p\,dq_1 + 0\,dq_2$

§ 4- Actions Hamiltoniennes

Soit G un groupe de Lie compacte.

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{X}(G) \mid \forall g \ (m_g)_* X = X \}$$
$$\simeq T_1 G \quad \text{son algèbre de Lie}$$

On note $\exp : \mathfrak{g} \to G$
$\xi \to \varphi^1_\xi(1)$

Supposons que G agit sur (M,ω) $(\Phi : G \to Sym(M,\omega))$
t.q. $\forall g$ Φ_g est un difféo hamiltonien.
$\Rightarrow \Phi_g \in Ham(M,\omega)$

Alors $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ on a X_ξ un champs de vecteur défini par $X_\xi(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(q)$

Comme $\Phi_{\exp(t\xi)}$ est hamiltonien $\forall t$, X_ξ est un champs de vecteur Hamiltonien (~~de flux~~ (ce n'est pas évident!).

On remarque

<u>Lemme 9</u> : $\cdot$ $X_{[\xi,\eta]} = [X_\xi, X_\eta]$

$\cdot$ $X_{g^{-1}\xi g} = (\Phi_{g^{-1}})_* X_\xi$ $\quad \left(g^{-1}\xi g = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{-1}\exp(t\xi) g \right)$

Dem : On commence par le deuxième point :
$\exp(t\, g^{-1}\xi g) = g^{-1}\exp(t\xi) g$ et donc

$$X_{g^{-1}\xi g} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi_{g^{-1}\exp t\xi g}(q) = (d\Psi_{g^{-1}} \circ X_\xi)(\Psi_g(q))$$
$$= (\Psi_{g^{-1}})_* X_\xi$$

Pour le premier on remarque

$$[\xi,\eta] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-t\xi)_* \eta$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-t\xi)\cdot\eta\cdot\exp(t\xi)$$

et donc

$$X_{[\xi,\eta]} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_{\exp(-t\xi)\cdot\eta\cdot\exp(t\xi)}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\psi_{\exp(-t\xi)})_* X_\eta$$
$$= [X_\xi, X_\eta] \qquad \boxtimes$$

<u>Def 10</u> : On dit que l'action ψ est <u>Hamiltonienne</u> si il existe $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ t.q.

- $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ $\quad H_\xi : M \to \mathbb{R}$, $q \to \mu(q)(\xi)$ est une fonction hamiltonienne pour X_ξ
- $H_{[\xi,\eta]} = \omega(X_\xi, X_\eta)$

<u>Exemples</u> :

① $G = SO(3)$ $\qquad \mathfrak{g} = \{ A \mid A + {}^tA = 0 \}$

$$G \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^6)$$
$$A \to ((q,p) \to (Aq, Ap))$$

est Hamiltonien

avec $\mu : \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$

$$(q,p) \to X_{f(q\times p)}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to so(3)$

$$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$so(3) \simeq so(3)^*$ par $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$ définie <0

② $G = U(n) = \{A \mid A^*A = \mathrm{Id}\}$

$u(n) = \{M \mid {}^*M + M = 0\}$

$G \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vu en exercice est Hamiltonien pour $\mu(z) = -\frac{1}{2} i z z^*$

~~Théorème : Soit $G \to Ham(M, \omega)$ une action hamiltonienne et supposons $0 \in \mathfrak{g}^*$ est valeur régulière de l'application moment μ. Alors $\mu^{-1}(0)$ est co-isotrope et réductible.~~

~~Dem :~~

Supposons que μ soit une application moment pour une action $\psi : G \times M \to M$. Et soit q t.q. $\mu(q) = 0$. Alors $\frac{d}{dt} \mu(\psi_{\exp t\xi}(q))(\eta) = \underbrace{\mu(q)([\xi, \eta])}_{=0}$

$\Rightarrow \psi$ preserve $\mu^{-1}(0)$

De plus si la action est libre alors en notant $\mathcal{O}_q$ l'orbite de q
$T_q \mathcal{O}_q \subset T_q \mu^{-1}(0)^{\omega}$. En effet

$X \in T_q \mathcal{O}_q \Rightarrow X = X_\xi(q)$ pour $\xi \in \mathfrak{g}$

et $\omega_q(X_\xi, Y) = dH_{\xi_q}(Y) = d(\mu(q)(\xi))(Y)$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(\varphi^t_Y(q))(\xi) = 0$ car $\mu(\varphi^t_Y(q)) = 0$ $\forall t$

et $\dim T_q \mathcal{O}_q = \dim G$

$\dim \mu^{-1}(0) = \dim M - \dim G$

et donc $T_q \mathcal{O}_q = (T_q \mu^{-1}(0))^{\omega_0}$

Donc

Théorème 11: Si 0 est valeur régulière de μ et G agit librement sur $\mu^{-1}(0)$ alors $\mu^{-1}(0)$ est coisotrope et $\mu^{-1}(0)/_{\sim} = \mu^{-1}(0)/_G$

Remarque: lorsque $G = S^1 \times S^1 \times \dots S^1$ alors $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ avec $[\xi,\eta]=0$ et donc la condition ② sur μ se simplifie en $\forall \xi,\eta \ \ \omega(X_\xi, X_\eta)=0$

On parle d'action torique.

Ex: $S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$

$\theta_1, \dots \theta_n, [z_0 \dots z_n] \longrightarrow [z_0 : e^{-2\pi i\theta_1} z_1 : \dots : e^{-2\pi i \theta_n} z_n]$

est torique avec

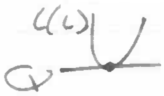
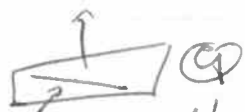
$$\mu([z_0 : z_1 : \dots : z_n]) = \pi\left(\frac{|z_1|^2}{\|z\|^2}, \dots \frac{|z_n|^2}{\|z\|^2}\right)$$

§5- Réduction symplectique et sous variété lagrangienne

Définition 12: Soit $Q \subset M$ une sous-variété et $i : L \to M$ une immersion. On dit que i intersecte Q de manière **nette** si

- $i^{-1}(Q)$ est une sous-variété de L (et donc $i(L) \cap Q \to M$)
- $T_{i(x)}(i(L) \cap Q) = di(T_x L) \cap T_{i(x)} Q$

Exemple: ① $i \pitchfork Q$ (c.a.d $\forall x \in i^{-1}(Q)$ $di(T_x L) + T_{i(x)} Q = T_{i(x)} M$) alors i intersecte Q de manière nette

②  pas nette ③  nette

③ ~~i(L)~~ si $i : L \to Q \subset M$ est une immersion alors i intersecte Q de manière nette

Définition 13 : Soit $Q \subset (M, \omega)$ coisotrope et $i : L \looparrowright M$ une immersion lagrangienne. La paire (Q, L) est dite réductible si

- Q est réductible
- i et Q s'intersectent de manière nette

Théorème 14 : Si (Q, L) est une paire réductible alors

$$L_Q = \pi(i(L) \cap Q) \overset{lag}{\looparrowright} Q/\sim$$

$$L^Q = \pi^{-1}(L_Q) \subset Q \subset M \text{ est lagrangienne}$$

⚠ On est obligé ici de considérer la possibilité que les lagrangiennes soient immergées ⚠

Dem : On a vu au chapitre 2 que

$d\pi(\, di(T_x L) \cap T_{i(x)} Q)$ est lagrangien dans $T_{\pi(i(x))} Q/\sim$ donc :

i) $\pi|_{Q \cap i(L)}$ a rang constant $\underset{= \dim Q \cap i(L)}{\Rightarrow} \pi(Q \cap i(L))$ est une sous-variété immergée, lagrangienne.

$\Rightarrow L_Q \overset{lag}{\looparrowright} Q/\sim$

$L^Q = \pi^{-1}(L_Q) = \bigcup$ feuille de $\ker \omega_Q$ passant par $i(L) \cap Q$

Soit $q \in L^Q$ alors $\exists\, q' \in i(L) \cap Q$ t.q. $q \sim q'$

Donc $\exists\, V \subset TQ^\omega$ t.q. $\varphi^1_V(q) = q'$

et donc $\omega_{q'}(\, d\varphi^1_V(X), d\varphi^1_V(Y)) = \omega_q(X, Y)$

et donc $\forall X, Y \in T_q L^Q \quad \omega_q(X, Y) = 0$

(car $T_{q'}$ ~~feuille(q')~~ $= di(T_x L) + T_{q'} Q$ avec $i(x) = q'$)

Par ailleurs $\dim L^Q = \dim L_Q + \dim {}^T Q^W$
$= \dim Q - n + 2n - \dim Q = n$

donc L^Q est lagrangien $\boxed{}$

§6 - Exemples

① $i : \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ est lagrangien
$q \to \{(q,0)\}$

$\mathbb{R}^n \pitchfork S^{2n-1} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^n \cap S^{2n-1}) \subset \mathbb{C}P^{n-1}$
est lagrangien.

$\mathbb{R}^n \cap S^{2n-1} \simeq S^{n-1}$ et π identifie q et $-q$
$\Rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ est lagrangienne.

$\pi^{-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \simeq S^{n-1} \times S^1$ lag dans $\mathbb{C}^n$

② $i : S^1 \times \cdots \times S^1 \subset S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ est lagrangien
$\theta_1 \cdots \theta_n \to \left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}, \cdots \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$

$\to \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots \cos\theta_n, \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_n\right)$

$\pi(T^n) \simeq T^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ est lagrangien

③ $f : M \times N \to \mathbb{R}$ alors $\Gamma(df) \overset{lag}{\subset} T^*(M \times N)$
si $\Gamma(df) \pitchfork W_N$ alors

$L_f = \pi(\Gamma(df)) \overset{lag}{\subset} T^*M$

$$L_f = \left\{ (q,p) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists q' \in N \\ (d_N f)_{(q,q')} = 0 \\ p = (d_M f)_{(q,q')} \end{array} \right\}$$
f est appelé famille génératrice pour L_f.

où $df_{(q,q')} : T_q N \oplus T_{q'} N \to \mathbb{R}$
$X \;, Y \to \left((df_M)_q(X), (df_N)_{q'}(Y)\right)$