Chapitre 5 - familles génératrices

§1 - Introduction :

Soit $L \looparrowright T^*M$ une immersion lagrangienne

On dit que L admet une famille génératrice

si $\quad L = L_F \quad$ pour $\quad F : M \times N \to \mathbb{R}$

t.q. $\Gamma(dF) \pitchfork W$

Rem : $\cancel{T_{(q,q',p,0)}\Gamma(dF) = T_{(q,p)}\Gamma(d_M F) \oplus \langle X, d(d_N F)(X)\rangle}$

en coordonnées locales (q, q', p, p')

$$\Gamma(dF(q,q')) = (q, q', dF_{q'}, dF_q) \quad \text{où } F_{q'} : M \to \mathbb{R},\ q \mapsto F(q,q')$$

et $F_q : N \to \mathbb{R}$, $q' \mapsto F(q,q')$

et donc $\Gamma(dF) \pitchfork W \iff \left(\frac{\partial F}{\partial q \partial q'}\right)$ a rang maximale

On commence par la remarque :

Théorème 1 : Si $i : L \looparrowright T^*M$ admet une famille génératrice, alors $i^*\lambda = df$ avec

$$f(q,p) = F(q,q') \quad \text{où } q' \text{ est t.q. } (dF_N)_{(q,q')} = 0,\quad p = (dF_M)_{(q,q')}$$

Dem : On a déjà calculé que

$$\pi : W_N \to T^*M \quad \text{satisfait}$$
$$(q,q',p,0) \mapsto (q,p)$$

$$\pi^*\lambda_M = (\lambda_{M\times N})|_{W_N}$$

et on $L = \pi(\underbrace{\Gamma(dF) \cap W_N}_{C_F})$

$i^* \lambda_M = (\cancel{i^* \circ \pi})^*$

$$\begin{tikzcd} C_F \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[dr, "i"'] & W_F \arrow[d, "\pi"] \\ & T^*M \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} i^* \lambda_M &= (\pi \circ \tilde{i})^* \lambda_M \\ &= \tilde{i}^* \circ \pi^* \lambda_M \\ &= \tilde{i}^* \circ \lambda_{M \times M} \\ &= d(F|_{C_M}) \end{aligned}$$

$\square$

Le ~~but de~~

Quand $N = \mathbb{R}^{n}$ on dit que $F: M \times \mathbb{R}^m$ est quadratique à l'infini si $\exists K$ compact $F(q,\xi) = Q(\xi)$ $\forall (q,\xi) \in M \times \mathbb{R}^m \setminus K$ avec Q une forme quadratique non dégénérée

Définition 2 : Une sous variété $L \subset T^*M$ admet une famille génératrice quadratique à l'infini si $L = L_F$ avec $F: M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ quadratique à l'infini

On notera L est fgqi.

Rem : $L_F \cap \cancel{T^*} M_0 = \{ (q,p) \mid \exists q' \in N$, $d_N F(q,q') = 0$, $d_M F(q,q') = 0 \}$

$\longleftrightarrow \mathrm{Crit}(F)$

Donc si L est fgqi alors

$$\# \{ L \cap Q_0 \} \geq \min \{ \mathrm{Crit}(F) \mid F: M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ quad à l'infini} \}$$

Dans ce chapitre nous allons montrer :

Théorème 3 (Laudenbach - Sikorav)

Soit $i : L \hookrightarrow T^*M$ une sous-variété lagrangienne admettant une f.g.q.i ~~alors~~ et $\varphi : T^*M \to T^*M$ un difféomorphisme hamiltonien à support compact alors $\varphi \circ i : L \hookrightarrow T^*M$ est une lagrangienne admettant une fgqi

Entre autre $M_0 \hookrightarrow T^*M$, $q \to (q,0)$ admet une fgqi et donc toute déformation hamiltonienne de la section nulle admet une fgqi ~~ms~~ persistence d'intersection avec M_0

§2- Réduction au cas $M = \mathbb{R}^N$

On rappelle qu'il existe toujours $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

On rappelle que $Q = T^*\mathbb{R}^N|_M$ est co-isotrope de réduction T^*M.

On choisit $\mathcal{U}$ un voisinage tubulaire de $T^*\mathbb{R}^N|_M$ avec projection $p : \mathcal{U} \to T^*\mathbb{R}^N|_M$ de sorte que si $x \in T^*\mathbb{R}^N|_M$ alors $(\ker dp)^{\omega_x} \subset \ker \omega_Q$

$\omega : \ker dp_x \times \ker \omega_Q \to \mathbb{R}$ non dégénérée et $(\ker dp)^{\omega} \subset TQ$

Soit $H : [0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ induisant X_{H_t} et on note

$\tilde{H} : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\tilde{H}|_{\mathcal{U}}(t,q) = \cancel{H \circ \pi \circ p}\ H(t, \pi \circ p(q))$ alors

Théorème 4 : $(X_{\tilde{H}})_{(q)}$ tangent à $T^*\mathbb{R}^N|_M$ si $q \in T^*\mathbb{R}^N|_M$

et $d\pi_q(X_{\tilde{H}}) = X_H$.

Dem : Soit $q \in T^*\mathbb{R}^N|_M$ on écrit

$$(X_{\tilde{H}})_q = V + W \quad \text{où } V \text{ tangent à } T^*\mathbb{R}^N|_M$$
$$\text{et } W \in \operatorname{Ker}(dp)_q$$

suppose $W \neq 0$ alors $\exists\, Y \in \operatorname{Ker} \omega_Q$ t.q.

$$\omega \qquad \omega(W,Y) \neq 0$$

Or $\omega(\cancel{V+W}\ X_{\tilde{H}}, Y) = \omega(W,Y) \neq 0$

$$\overset{\shortparallel}{d\tilde{H}(Y)}$$
$$\shortparallel$$
$$0$$

Donc $(X_{\tilde{H}})_q$ tangent à $T^*\mathbb{R}^N|_M$.

De plus $\tilde{\omega}(d\pi(X_{\tilde{H}}), v) = \pi^*\tilde{\omega}(X_{\tilde{H}}, \hat{v})$

$$= d\tilde{H}(\hat{V}) = dH(v)$$

par construction de $d\pi(X_{\tilde{H}}) = X_H$ ☐

En corollaire on trouve :

<u>Corollaire 5</u>. Soit $L, L' \subset T^*M$ t.q. $\exists \varphi$ hamiltonien t.q. $\varphi(L) = L'$ alors $\exists \hat{\varphi}$ hamiltonien t.q.

~~$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(L)) = \pi^{-1}(L')$~~ $\forall \tilde{L}$ lagrangien telle que $\pi(\tilde{L} \cap Q) = L$

~~en Cela reste valable~~ $\pi(\tilde{\varphi}(\tilde{L}) \cap Q) = L'$

Par ailleurs si $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$ est une famille génératrice pour $L_F \subset T^*\mathbb{R}^N$ alors

en prenant $\tilde{F} : M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $q, \xi \to F(q,\xi)$ on trouve

$$L_{\tilde{F}} = \left\{ (q,p) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \xi \;\; d\tilde{F}_{\mathbb{R}}(q,\xi) = 0 \\ p = d\tilde{F}_M(\xi) \end{array} \right\}$$
$$= \pi\left(L_F \cap T^*\mathbb{R}^N|_M \right)$$

et réciproquement si

$$F : M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad \text{alors}$$

en prenant $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

t.q. $G|_U(q, m, \xi) = \cancel{\ldots} + F(q, \xi)$

on trouve $\pi(L_G \cap T^*\mathbb{R}^N|_M) = \cancel{\pi}(L_F)$

En somme pour prouver le théorème 3 il suffit de prouver le cas $M = \mathbb{R}^N$.

§ 3 - Espace de jet :

On considère $J^1(M) = T^*M \times \mathbb{R}_z$ (dans la suite $M = \mathbb{R}^N$)

soit $\iota : L \hookrightarrow T^*M$ une lagrangienne exacte

$\iota^*\lambda = df$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{\iota} : L &\hookrightarrow T^*M \times \mathbb{R}_z \\ x &\mapsto (\iota(q), f(q)) \end{aligned} \quad \text{est telle que}$$

$$\tilde{\iota}^*(dz - \lambda) = 0$$

Définition 6 : Une sous-variété lagrangienne legendrienne de $J^1(M)$ est une sous-variété de dimension n t.q.

$$\iota^*(dz - \lambda) = 0$$

Rem : si $\iota : \Lambda \hookrightarrow J^1(M)$ est legendrienne alors $\frac{\partial}{\partial z}$ n'est pas tangent à Λ et donc

$\pi \circ \iota : \Lambda \to T^*M$ est une immersion.

De plus $(\pi \circ \iota)^*\lambda = da$ où $\begin{aligned} \iota : \Lambda &\to T^*M \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\pi \circ \iota(x), a(x)) \end{aligned}$

et donc $\pi \circ \iota$ est immersion lagrangienne exacte

De plus si

$\varphi : T^*M \to T^*M$ est un difféomorphisme hamiltonien alors

$$\varphi^*\lambda = \lambda + dF \quad \text{où}$$

$$F(q) = \int_0^1 \left[\lambda\left(X_t^H(\phi_t(q))\right) + H(\phi_t(q))\right] dt$$

(exercice 3 feuille 3).

et donc $\tilde{F} : J^1(M) \to J^1(M)$

$$(q, z) \to (\varphi_*(q), z + F(q))$$

est t.q. $\tilde{F}^*(dz - \lambda) = dz + dF - \lambda - dF$

$$= dz - \lambda$$

<u>Définition 7</u> : Une transformation $f : J^1(M) \xrightarrow{\sim} J^1(M)$ est dite <u>de contact</u> si $\tilde{F}^*(dz - \lambda) = f(dz - \lambda)$ pour f une fonction t.q. $f(q) \neq 0$ $\forall q$.

Si $\iota : \Lambda \hookrightarrow J^1(M)$ est legendrienne alors on appelle ~~l'application~~ $\pi \circ \iota : \Lambda \to M \times \mathbb{R}$ son <u>front d'onde</u>.

~~Donc~~

Si $M = \mathbb{R}^N$ alors $\lambda = \sum p_i dq_i$

et donc si $\pi \circ \iota$ est localement le graphe de

$f : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on retrouve

les coordonnées p_i en posant $p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

$$\left(\text{car} \quad \iota^*(dz - \sum p_i dq_i) = 0 \right.$$

$$\left. \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q_i} = p_i \right)$$

Si F ~~une~~ est une famille génératrice pour $\iota : L_F \subset T^*M$. Alors le front d'onde de ι peut être vu de deux manière différente

(A) $\pi \circ \iota = \left\{ (q,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \xi \in \mathbb{R}^N \\ (dF)_{\mathbb{R}^N}(q,\xi) = 0 \\ z = F(q,\xi) \end{array} \right\}$

↳ valeurs critiques de $F_q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(q,\xi)$

(B) En regardant $F_\xi : M \to \mathbb{R}$, $q \mapsto F(q,\xi)$

$$\Gamma(F_\xi) = \{ (q, F_\xi(q)) \mid q \in M \}$$

alors si $(q,z) \in \pi \circ \iota(L)$ on a $\pi \circ \iota(L)$ est tangent à $\Gamma(F_\xi)$

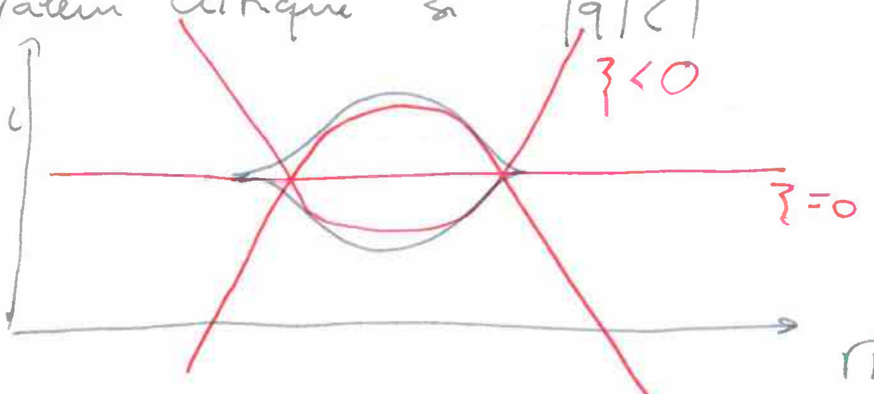
Ex : $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$q, \xi \mapsto \xi^3 - (1-q^2)\xi$

(A) F_ξ pas de valeurs critiques pour $|q| > 1$

2 valeurs critiques si $|q| < 1$

⇝ $\pi \circ \iota$



(B) $F_\xi(q) = \xi^3 - (1-q^2)\xi$

↳ degré 2 sauf pour $\xi = 0$

on dit que $\pi \circ \iota(L)$ est une enveloppe de la famille F_q.

On va montrer

Théorème 8 : (Chekanov)

Soit $\{\varphi_t\}$ une famille de transformation de contact de $J^1(\mathbb{R}^N)$ à support compact t.q. $\varphi_0 = id$.
Et soit L un sous variété lagrangienne de T^*M admettant une f.g.q.i alors
$\pi \circ \varphi_1(\tilde{L})$ admet une f.g.q.i

Théorème 8 $\Rightarrow$ Théorème 3. mais il est en fait plus fort car possiblement une lagrangienne peut devenir immergé sous une transformation de contact.

On va montrer

Théorème 8 : (Chekanov)

Soit $\{\varphi_t\}$ une famille de transformation de contact de $J^1(\mathbb{R}^N)$ à support compact t.q. $\varphi_0 = id$.
Et soit L une sous variété lagrangienne de T^*M admettant une f.g.q.i alors
$\pi \circ \varphi_1(\tilde{L})$ admet une f.g.q.i

Théorème 8 $\Rightarrow$ théorème 3. mais il est en fait plus fort car possiblement une lagrangienne peut devenir immergé sous une transformation de contact.

§4- Preuve du théorème 8

Nous allons donner les éléments de preuves du théorème de Chekanov (certains détails manqueront).
On commence par remarquer qu'il suffit de prouver le résultat quand la famille $\{\varphi_t\}$ est C^1-proche de l'identité. Donc on supposera ceci quand c'est utile.
On commence par

Lemme 9 : Soit Λ_F engendré par $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
alors $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q, \eta, x, y) \longrightarrow F(y, \eta) - \langle x, q - y \rangle$$

est telle que $\Lambda_{\tilde{F}} = \Lambda_F$

Dem : on calcul

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(q,\eta,x,y) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(y,\eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(q,\eta,x,y) = \cancel{q-x}\ y-q$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(q,\eta,x,y) = \frac{\partial f}{\partial q}(y,\eta)+x$$

Don $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y}\right) = (0,0,0)$ ssi

$$\begin{cases} y = q \\ -x = \frac{\partial f}{\partial q}(y,\eta) \\ \frac{\partial f}{\partial \eta}(y,\eta) = 0 \end{cases}$$ et donc

$$(q,p) \in L_{\tilde{f}} \iff \exists \eta \ \frac{\partial f}{\partial \eta}(q,\eta) = 0 \text{ et } p = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} = -x = \frac{\partial f}{\partial q}(q,\eta)$$

$$\iff (q,p) \in L_f$$

$\boxed{\,}$

Rem : ~~Da~~ $\tilde{f}$ à l'avantage de satisfaire
$\forall\ \eta, x, y \quad \tilde{f}_{(\eta,x,y)} : \mathbb{R}^{\hat{}} \to \mathbb{R}$ est affine
(et donc $\frac{\partial \tilde{f}_{\eta,x,y}}{\partial q}$ est constante)

Par contre $\tilde{f}$ n'est plus quadratique à l'infini
il reste que pour y suffisemment grand
$$\tilde{f}(q,\eta,x,y) = Q(\eta) - \langle x, q-y\rangle .$$

Lemme 10 : Soit $\phi : J^1(\mathbb{R}^n) \to J^1(\mathbb{R}^n)$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une famille génératrice telle que

$$\forall \eta \quad \pi\left(\phi\left\{q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}(q), F_\eta(q)\right\}\right) \text{ est le graphe}$$

d'une fonction $G_\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors

$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est famille génératrice pour $\pi \circ \phi(\tilde{L}_F)$

~~Demonstr~~

Dem : On note

$$\phi(q,p,z) = \left(Q(q,p,z), P(q,p,z), Z(q,p,z)\right)$$

alors car $\phi^*(dz - pdq) = g(q,p,z)\, dz - pdq$

on trouve $\cancel{\frac{\partial z}{\partial q} dq + \frac{\partial Z}{\partial p}}$

$$\frac{\partial Z}{\partial q} dq + \frac{\partial Z}{\partial p} dp + \frac{\partial Z}{\partial z} dz - P \frac{\partial Q}{\partial q} dq - P \frac{\partial Q}{\partial p} dp - P \frac{\partial Q}{\partial z} dz = g\, dz - gp\, dq \quad \text{et donc}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q} - P\frac{\partial Q}{\partial q} = g(q,p,z)\, p$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p} - P\frac{\partial Q}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z} = g(q,p,z)$$

Par hypothèse on a $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F_\eta(q)\right) \xrightarrow{\phi} Q\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F_\eta(q)\right), P\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F_\eta(q)\right), G_\eta\left(Q\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F\right)\right)$$

On note $\tilde{Q}_\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\quad q \to Q\left(q, \frac{\partial F_\eta}{\partial q}, F_\eta(q)\right)$ qui par hypothèse est un difféomorphisme

D~ $G_m(\tilde{Q}(q),m) = Z(q, \frac{\partial f_m}{\partial q}, f_m(q))$

et donc $\frac{\partial G}{\partial m}(Q,m) = \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial m} + \frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial m}$

$$= P\frac{\partial Q}{\partial P}\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial m} + g\frac{\partial f}{\partial m}(q,m) + P\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial m}$$

$$= P\underbrace{\cancel{\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial m}}}_{0} + g\frac{\partial f}{\partial m}(q,m)$$

Donc $\frac{\partial G}{\partial m}(\hat{Q},m) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial m}(q,m) = 0$

et ~~∂G~~ $G(\tilde{Q},m) = Z(q, \frac{\partial f_m}{\partial q}, f_m(q))$

$\Rightarrow (\tilde{Q}(q), \frac{\partial G_m}{\partial \tilde{Q}}, G(\hat{Q},m))$

$= \phi(q, \frac{\partial f_m}{\partial q}, F_m(q)) \Rightarrow \pi(\phi(\tilde{L}_F)) = L_G$

$\boxed{}$

<u>Preuve du théorème 8 :</u>

On a $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ engendrant L_F

on utilise $\tilde{F}$ donné par le lemme 9 de sorte que

$\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N'} \to \mathbb{R}$ est t.q. $\forall m' \in \mathbb{R}^{N'}$ $F_{m'}$ soit affine.

Comme $\{\phi_t\}$ est C^1 proche de l'identité

• $d\phi_t$ proche de Id

$\Rightarrow$ pour p fixé φ_p $q, z \to Q(q,p,z), Z(q,p,z))$

est un difféomorphisme

et donc $\forall m'$ $\varphi_p(\Gamma(\tilde{F}_{m'}))$ est le graphe d'une fonction

comme sur $(q, \frac{\partial \hat{f}_{m'}}{\partial q}, \tilde{f}_{m'}(q))$ p est constant

$\leadsto$ on peut appliquer le lemme 10 sur $\tilde{F}_{m'}$ et ϕ

On obtint donc une famille génératrice

G pour $\pi(\phi(\tilde{L}_F))$.

Elle n'est pas quadratique à l'infini

Par contre on peut la déformer ~~de sorte~~ en utilisant

les hypothèses sur ϕ en G_1 t.q.

$$G_2(q,\eta,x,y) = G_1(q,\eta,x,q-y) \text{ induise}$$

$\pi\circ\phi(\hat{L_F})$ est coïncide avec $Q(v)+\langle x\cdot y\rangle$ à l'extérieur d'un compact.

(en utilisant $\| \frac{\partial G}{\partial \eta} - Q_F(\eta) + \langle x, q-y\rangle \| < C$)

L'idée est due à Theret. ~~et classiq~~ $\square$

5- Conséquence :

1) Soit $F : M\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ où M est compacte quadratique à l'infini. t.q. $L_F \pitchfork \Gamma_0$ et M compacte.

théorème de Morse nous

$$\#\{\mathrm{Crit}\, F\} \geq \sum_{i=1}^{n} \dim H^i(M)$$

mais $\mathrm{Crit}\, F \leftrightarrow F\cap\Gamma_0 \quad \leftrightarrow \#\{F\pitchfork\Gamma_0\} \geq \sum_{i=1}^{n} \dim H^i(M)$

entre autre si ϕ est un difféomorphisme hamiltonien de T^*M t.q. $\phi(\Gamma_0)\pitchfork\Gamma_0$ alors

$$\#\phi(\Gamma_0)\cap\Gamma_0 \geq \sum_{i=1}^{n} \dim H^i(M)$$