Département de Mathématiques
Université de Nantes

X3MG010
Géométrie symplectique

Feuille 1: Champs de vecteurs hamiltoniens.

Exercice 1 :
Soit $X_t, Y_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $t \in I$ deux champs de vecteurs dépendant du temps. On note ϕ_t et ψ_t les isotopies (locales) induites par X_t et Y_t respectivement (c'est-à-dire que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\phi_t(q) = X_{t_0}(\phi_{t_0}(q))$ et $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\psi_t(q) = Y_{t_0}(\psi_{t_0}(q))$).

1. Montrer que $\phi_t \circ \psi_t$ est induite par $X_t + (\phi_t)_*(Y_t)$.
2. Montrer que $(\phi_t)^{-1}$ est induite par $-(\phi_t^{-1})_* X_t$
3. Soit χ_t l'isotopie induite par $-X_{1-t}$. Montrer que $\chi_1 = \phi_1^{-1}$.

Exercice 2 :
On rappelle que si ϕ_X^t est le flot d'un champs de vecteur X et ϕ_Y^t est le flot d'un champs de vecteur Y alors $[X, Y](q) = \frac{d}{dt}|t = 0(\phi_X^{-t})_* Y(q)$.

1. Montrer que pour un diffeomorphism ψ on a $\phi^t_{\psi_* X} = \psi \circ \phi_X^t \circ \psi^{-1}$.
2. Montrer que si $[X, Y] = 0$ alors pour tout t_0 pour lequel le flot est défini $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(\phi_X^{-t})_* Y = 0$ (indice $\phi_X^{t_0+t} = \phi_X^{t_0} \circ \phi_X^t$).
3. En déduire que si $[X, Y] = 0$ alors les flots de X et de Y commutent.

Exercice 3 : Formule de Cartan
Soit X un champs de vecteurs et ϕ_X^t sont flot (local). Soit ω une k-forme differentielle. On note $\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt}(\phi_X^t)^* \omega$ et $X \iota \omega$ la (k-1)-forme $X \iota \omega(X_1, \cdots X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1})$.

1. Montrer la formule de Cartan:
$$\mathcal{L}_X \omega = X \iota d\omega + d(X \iota \omega).$$
Indice: utilisez la définition
$$d\omega(X_1, X_2, \cdots X_{k+1})$$
$$= \sum (-1)^i X_i(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1 \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{k+1}).$$
Et commencez par le cas $k = 1$ et $k = 2$.
2. En déduire que si X_H est un champs Hamiltonien alors $\mathcal{L}_{X_H} \omega_0 = 0$ (ce qui reprouve le théorème de Poincaré).

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction définissant un champs hamiltonien X_H. Montrer que

$G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une intégrale première de X_H ssi $\forall q \in \mathcal{U}$ $\omega_0(X_H, X_G) = 0$.

Exercice 5 : (Kepler)
Soit $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \neq (0,0,0)$. On considère $H : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définit par $H((x,y,z),(v_1,v_2,v_3)) = \frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. On considère aussi f_1, f_2, f_3 les composantes de $m : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $m(q,v) = q \times v$ (le moment). Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des intégrales premières de X_H.

Exercice 6 :
Soit X un champs de vecteur sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que le flot $\phi_X^t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est défini pour $t \in [0,1]$. Montrer que le flot $\overline{\phi_X^t} : \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ est hamiltonien pour la fonction $H(q,\alpha) = \alpha(X(q))$. (Où $\overline{\phi_X^t}$ est la symplectisation de ϕ_t vue en classe, on sait donc déjà que ce flot est symplectique).

Exercice 7 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ soit $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ une 1-forme sur $\mathcal{U}$.

1. Montrer l'application $\phi_\alpha(q,\beta) = (q, \beta + \alpha(q))$ est symplectique sur $\mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ ssi α est fermée.
2. Sous quelle condition le flot $\phi_t(q,\beta) = (q, \beta + t\alpha(q))$ est-il Hamiltonien?

Exercice 8 :
Soit $S^2 = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ munie de la structure symplectique donné par l'atlas d'Archimède vu en classe. (On rappelle par exemple que une carte symplectique est donnée par $(x,y,z) \to (\arccos(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}), z)$ sur un domaine de définition approprié). Calculer le flot hamiltonien associé à la fonction $H(x,y,z) = z$. Que vaut-il au temps 2π?

Exercice 9 :
Soit $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore.

1. Montrer que la structure symplectique sur $\mathbb{R}^2$ descend au quotient et décrire un atlas symplectique explicite sur T^2.
2. On note $[x,y]$ la classe d'équivalence de (x,y) dans T^2. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ l'application $[x,y] \to [x+t,y]$ est un symplectomorphisme de T^2. Que vaut-il pour $t = 1$?

Exercice 10 : (Action symplectique)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien (dépendendant du temps). Pour $x_0 = (q_0,p_0)$ et $y_1 = (q_1,p_1)$ on note $\Omega(\mathcal{U},x_0,x_1) = \{\gamma : [0,1] \to \mathcal{U} | \gamma$ est lisse et $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$.
On définit la fonctionnelle $\mathcal{A} : \Omega(\mathcal{U},x_0,x_1) \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^1 \left(\langle p_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t)\rangle - H(t,\gamma(t))\right) dt,$$

où $\gamma(t) = (q_\gamma(t), p_\gamma(t))$ avec $p_\gamma(t), q_\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\gamma_s \in \Omega(\mathcal{U},x_0,x_1)$ tel que $\frac{d}{ds}_{s=0}\gamma_s(t) = V(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ (entre autre notez que $V(0) = V(1) = 0$). Montrer que
$$\frac{d}{ds}\mathcal{A}(\gamma_s) = \int_0^1 \omega_0\big(\dot{\gamma}(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), V(t)\big)dt.$$
2. En déduire que γ est un point critique de $\mathcal{A}$ ssi γ est une trajectoire de X_{H_t}.