Département de Mathématiques
Université de Nantes

X3MG010
Géométrie symplectique

Feuille 2:
Algèbre linéaire symplectique.

Exercice 1 :
Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique. Soit U_0, U_1 deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer:

- $({U_0}^\omega)^\omega = U_0$.
- $(U_0 + U_1)^\omega = U_0^\omega \cap U_1^\omega$.
- $(U_0 \cap U_1)^\omega = U_0^\omega + U_1^\omega$.

Exercice 2 :
Soit (V_0, ω_0) et (V_1, ω_1) deux espaces vectoriels de dimension $2n$. symplectiques.

1. Montrer que $V_0 \oplus V_1$ muni de la forme $\omega := -\omega_0 \oplus \omega_1$ défini par $\omega((u_0, u_1), (v_0, v_1)) = -\omega_0(u_0, v_0) + \omega_1(u_1, v_1)$ est symplectique.
2. Soit $\phi : V_0 \to V_1$ un symplectomorphisme. Montrer $\Gamma(\phi) = \{(v, \phi(v)) | v \in V_0\}$ est un sous-espace lagrangien de $V_0 \oplus V_1$.

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel. On rappelle que $E \oplus E^*$ est muni d'une structure symplectique naturelle définie par $\omega_0(v_0, \alpha_0), (v_1, \alpha_1)) = \alpha_1(v_0) - \alpha_0(v_1)$. Soit U un sous-espace vectoriel de E. On définit $Nil(U) = \{\alpha \in E^* | \alpha|_U = 0\}$. Montrer que $U \oplus Nil(U)$ est lagrangien dans $E \oplus E^*$.

Exercice 4 :
On considère $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique standard. On rappelle que $U(n)$ est un sous-groupe de $Sp(n)$. Soit $L_0 = \{(q, 0) | q \in \mathbb{R}^n\}$ un espace lagrangien. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ l'ensemble de tout les sous-espaces lagrangiens.

1. Montrer que $U(n)$ agit sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ de manière transitive.
2. Montrer que $Stab(L_0) = O(n)$.
3. En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) = U(n)/O(n)$ (cela muni donc l'espace des lagrangien d'une structure de variété lisse).

Exercice 5 :
Soit (V_0, ω_0), $(V_1, \omega_1$ et (V_2, ω_2) trois espace vectoriel symplectique. On considère $V_0 \oplus V_1$ et $V_1 \oplus V_2$ munis des structures symplectiques de l'exercice 2.

1. Montrer que $\Delta = \{(v_0, v_1, v_1, v_2) || v_0 \in V_0, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ est co-isotrope dans $V_0 \oplus V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$ muni la forme ω de l'exercice 2.
2. Montrer que la réduction Δ/Δ^ω est symplectomorphe à $V_0 \oplus V_2$.
3. Soit $\phi_1 : V_0 \to V_1$ et $\phi_2 : V_1 \to V_2$ deux symplectomorphismes. Montrer que $\Gamma(\phi_1) \oplus \Gamma(\phi_2)$ est lagrangien dans $V_0 \oplus V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$. Identifier $\pi(\Gamma(\phi_1) \oplus \Gamma(\phi_2))$ en tant que sous-espace lagrangien de $V_0 \oplus V_2$.

Exercice 6 :

On note $\mathrm{Symp}(n) = \{A \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) | {}^tAJ_0A = J_0\}$ avec $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$. On note $i : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ le morphisme de groupe défini par $i(X + iY) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $M \in U(n)$ alors $i(M) \in \mathrm{Symp}(n)$.
2. Montrer que si $A \in O(n)$ alors $A \in \mathrm{Symp}(n) \cap i(U(n))$.
3. Réciproquement montrer que si $A \in \mathrm{Symp}(n) \cap i(U(n))$ alors $A \in O(n)$.