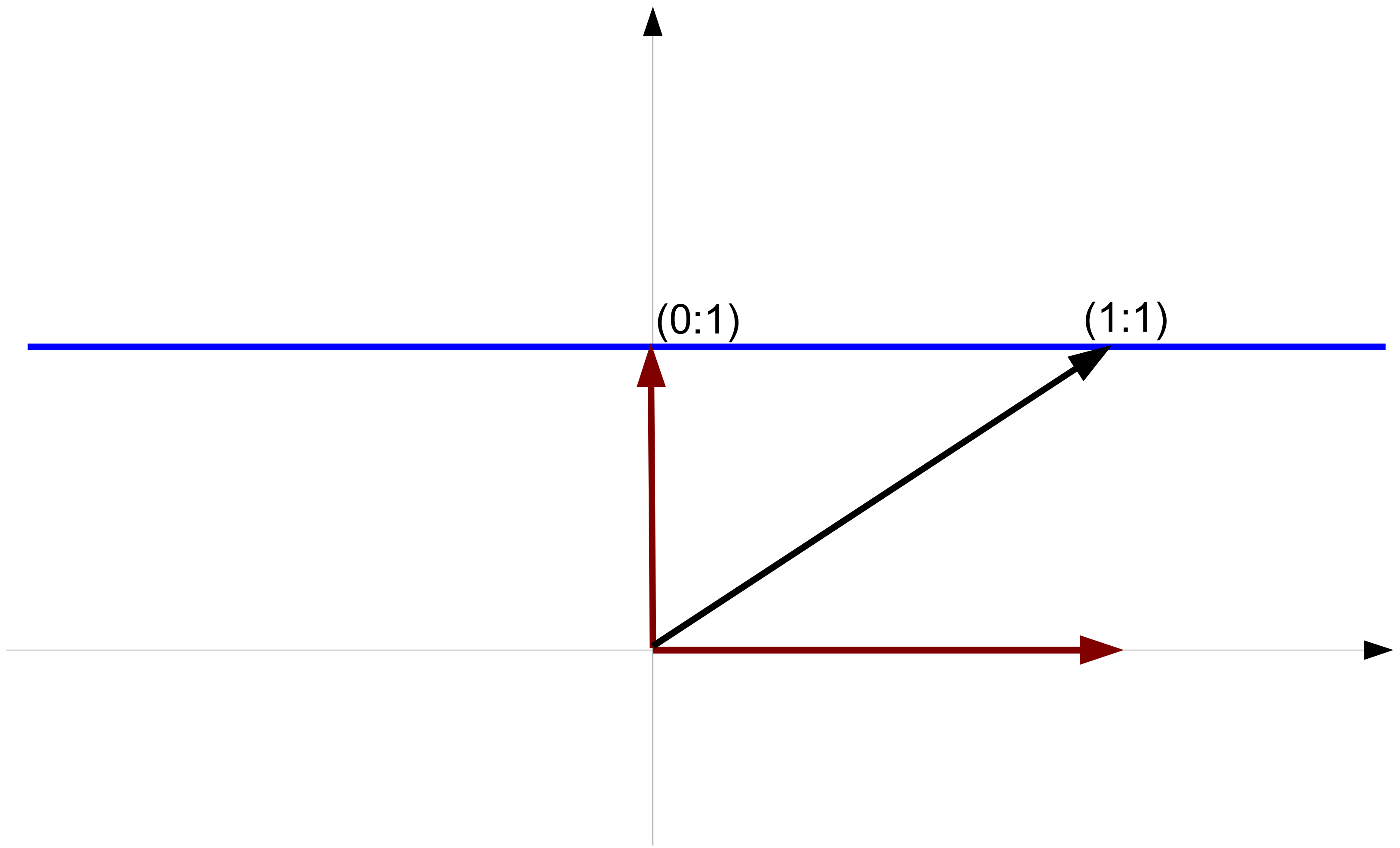
Vendredi 21 avril 2006

Les outils de base
de la géométrie projective 1D

cours à compléter avec les figures interactives en ligne
(cliquez au fil du texte sur les liens en bleu,
leur répertoire est disponible à l'adresse :
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~franjou/CAOGeo/ *)*

Repère affine de la droite en coordonnées homogènes



Quand on a choisi un repère projectif,
les coordonnées projectives sont bien définies
à proportionnalité près,
et la matrice d'une homographie est bien définie
à proportionnalité près.

Une homographie est
déterminée par l'image d'un repère.
Un repère de la droite projective est constitué de
trois points distincts.
Une homographie entre droites projectives est
déterminée par l'image de trois points distincts.

Recherche d'un invariant projectif sur une droite

On se donne trois points alignés distincts A, B, C et un quatrième point D sur cette droite.

Si l'on utilise ABC comme repère projectif, l'abscisse projective du point D est invariant par homographie.

C'est le ***birapport*** [ABCD].

Par définition:

$$\boxed{[\propto,0,1,x]=x}$$

Homographies entre droites

Par définition, une homographie entre deux droites repérées est donnée par une matrice 2x2 :

$$x'=ax+by \qquad y'=cx+dy\ .$$

En terme d'abscisses, la relation est donc :

$$u' = (au+b)/(cu+d)\ .$$

Par exemple, pour $u=\infty$, on trouve $u'=a/c$.

Calcul du birapport dans un repère donné

On utilise la formule d'une homographie (en abscisses) pour calculer le birapport. On a :

$$[u,v,w,x]=(ax+b)/(cx+d)=H(x)$$

avec $H(u)=\infty$ (u est un pôle) et $H(v)=0$ (v est un zéro)

d'où : $H(x)= k(x-v)/(x-u)$.

Enfin : $H(w)=1$, donc :

$$\boxed{\begin{gathered}[u,v,w,x]=(x-v/w-v):(x-u/w-u)\\ [ABCD]=(BD/BC):(AD/AC)\end{gathered}}$$

Le birapport !

Exemples de valeurs du birapport de quatre points

birapport de quatre droites concourantes

division harmonique vs milieu

application aux mesures de hauteurs et de distances
et application au TD

la prochaine fois : le quadrilatère complet

Passage entre affine et projectif

- coordonnées, dans les deux sens avec choix de l'infini, voir dessin fondamental
- affine=homographie fixant l'infini
- Applications
  - envoi de points à l'infini
    - quadrilatère complet
    - théorème de Pappus
    - axe d'une perspective (ou projection centrale)