

Vendredi 12 mai 2006

Les droites dans le projectif 2D

# Quadrilatère complet

Que devient l'énoncé classique : « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » en géométrie projective qui n'a ni milieu ni parallèles ?

Considérons un quadrilatère complet, c'est-à-dire quatre points A, B, C, D et les six droites qui les joignent. Il apparaît alors trois nouveaux points d'intersection E, F, G. Prenons l'un deux, disons E, et joignons-le aux deux autres, F et G : les deux droites ainsi obtenues, avec les deux droites initiales AB et CD qui s'intersectent pour définir ce point E, forment alors une *division harmonique*.

Lien interactif : [Configuration du quadrilatère complet](#)

Remarque :

un quadrilatère complet est la vision en perspective d'un rectangle

# Homographies entre droites du plan

Une homographie entre droites est déterminée par l'image de trois points.

Application : une homographie entre deux droites du plan est une projection centrale si, et seulement si, leur point d'intersection est envoyé sur lui-même.

- **Axe d'une perspective ou projection centrale**

Il s'agit d'une variante du quadrilatère complet.

- **Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif : *diapo suivante*.**

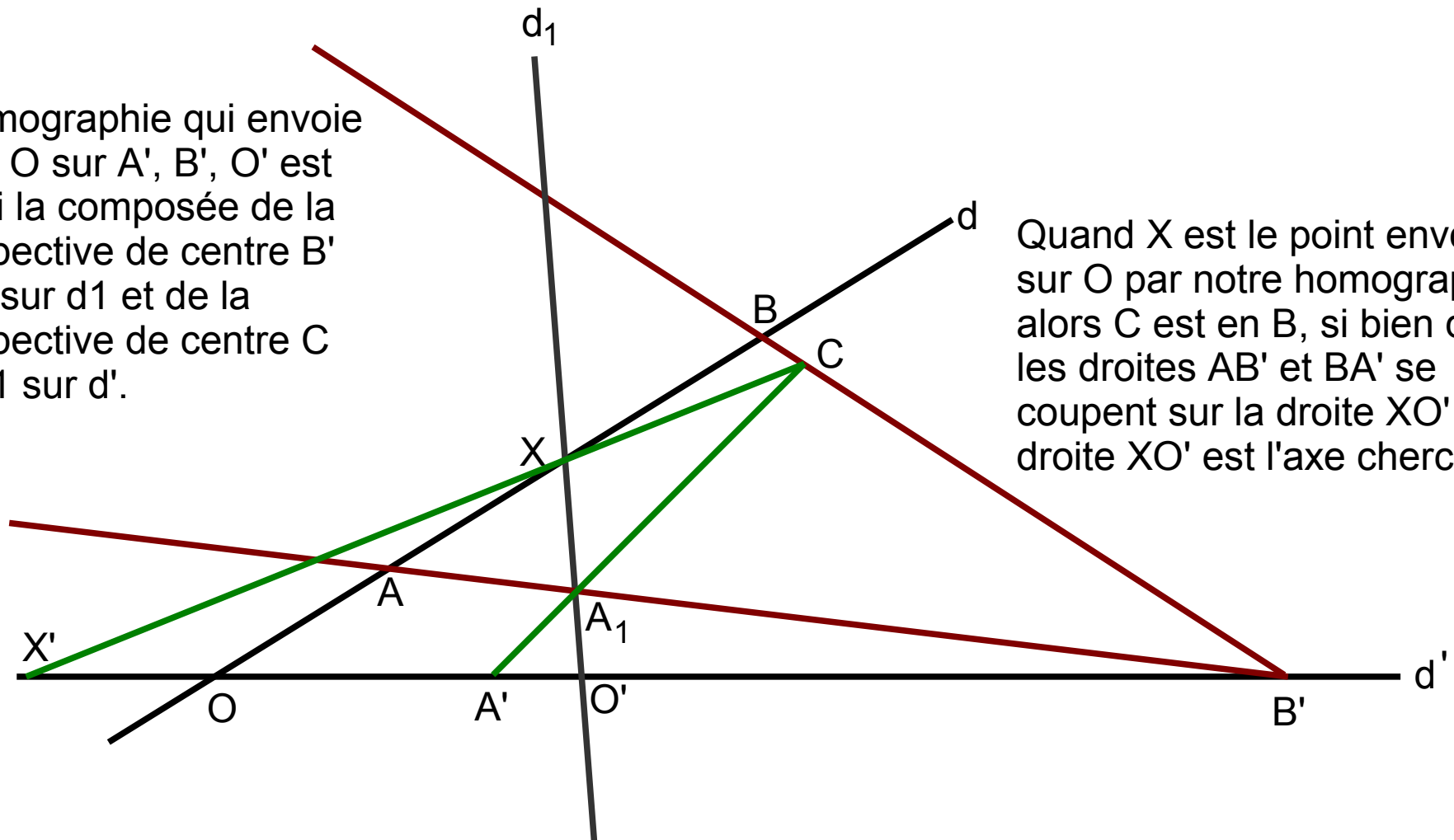
# Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif :

démonstration quand ce n'est pas une projection centrale, utilisant

- Une perspective centrale est une homographie;
- une homographie est déterminée par l'image d'un repère.

L'homographie qui envoie  $A, B, O$  sur  $A', B', O'$  est aussi la composée de la perspective de centre  $B'$  de  $d$  sur  $d_1$  et de la perspective de centre  $C$  de  $d_1$  sur  $d'$ .

Quand  $X$  est le point envoyé sur  $O$  par notre homographie, alors  $C$  est en  $B$ , si bien que les droites  $AB'$  et  $BA'$  se coupent sur la droite  $XO'$  : la droite  $XO'$  est l'axe cherché.



# Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif : conséquences

Toute homographie entre deux droites du plan est  
soit une perspective,  
soit la composée de deux perspectives.

## Constructions

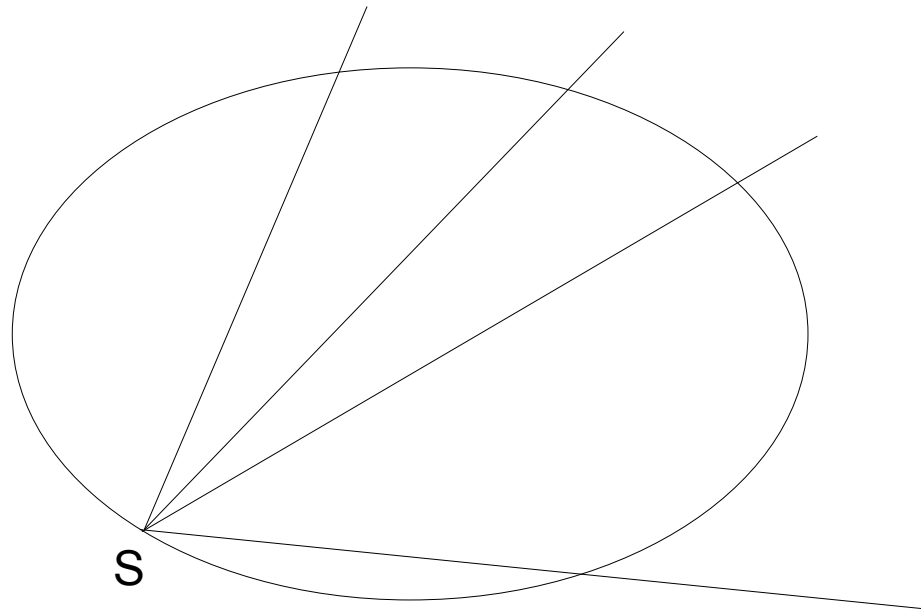
Et bien sûr, on retrouve le **théorème de Pappus**.

# Les coniques vues comme des droites projectives

*Pas encore de diapos pour cette partie.*

L'idée importante qui sera utilisée pour le TD du 19 mai est que l'ensemble des points de vue  $S$  qui permettent de voir quatre points donnés sous un birapport fixe sont les points d'une conique.

On peut donc voir une conique comme une droite projective, de la même manière que les droites issues d'un point sont une droite projective.



Pour le célèbre théorème de Pascal, voir les liens interactifs suivants :

[L'hexagramme mystique de Pascal](#)

[Le théorème de Pascal : construction d'une conique point par point](#)