Faisceaux algébriques cohérents

Rappel : X espace topologique

$\mathcal{F}$ préfaisceau : associe à chaque ouvert un groupe abélien + applications de restrictions.

$\mathcal{F}$ faisceau : préfaisceau + prop suivante : $\forall (U_i)_{i\in I}$ recouvrement de U, la suite :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{F}(U) & \to & \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & s & \longmapsto & s|_{U_i} & & \\ & & & (s_i) & \longmapsto & s_i|_{U_j\cap U_i} - s_j|_{U_i\cap U_j} \end{array}$$

est exacte.

faisceautisation : $\forall \mathcal{F}$ préfaisceau, on construit $(\mathcal{F}^+, i^+)$ faisceau : $\mathcal{F} \xrightarrow{i^+} \mathcal{F}^+$ qui vérifie prop. universelle : $\forall \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ morphisme de préfaisceau où $\mathcal{G}$ faisceau, $\exists !\, f^+$ relevant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, dashed, "f^+"'] & \end{tikzcd}$$

(adjoint à gauche du foncteur d'oubli : $\mathrm{Hom}_{\text{préf}}(\mathcal{F}, \mathrm{Oubli}(\mathcal{G})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{fais}}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})$)

On a de plus $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^+_x$ (germe).

germe : $\mathcal{F}$ préfaisceau ou faisceau.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U\ni x} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U\ni x} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim$$

où $a\in\mathcal{F}(U) \sim b\in\mathcal{F}(V)$ s'il existe $x\in W\subset U\cap V$ tel que : $a|_W = b|_W$

Rappel : définition faisceautisé $\mathcal{F}^+(U) = \{(s_x)_{x \in U}$ tel que $\forall x \in U, \exists V \subseteq U$ et $t \in \mathcal{F}(V)$ avec $x \in V$ tel que : $s_y = t_y \ \forall y \in V\}$.

Noyau : $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ morphisme.

$\mathrm{Ker}(f) : U \longmapsto \mathrm{Ker}(f)(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) / f_U(s) = 0\}$ est un faisceau.

Image : préfaisceautique : $\widetilde{\mathrm{Im}}(f) : U \mapsto \widetilde{\mathrm{Im}}(f)(U) = \{t \in \mathcal{G}(U) ; \exists s \in \mathcal{F}(U) \ f_U(s) = t\}$ est un préfaisceau

faisceautique : $\mathrm{Im}(f) = \widetilde{\mathrm{Im}}(f)^+$ = faisceautisé est un faisceau.

Injectivité : f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ injective $\forall x$.

Surjectivité : f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathcal{G} \Leftrightarrow f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ surjective $\forall x$.

$\Leftrightarrow$ surjective au niveau des catégories :
$\forall \varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ si $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$

$\Leftrightarrow \widetilde{\mathrm{Im}}(f)^+ = \mathcal{G}$ c'est-à-dire en regardant définition du faisceautisé : $\forall U$ ouvert $\forall t \in \mathcal{G}(U)$, $\exists$ recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de U et section $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $f(s_i) = t|_{U_i}$.

$\mathcal{O}_X$ faisceau des fonctions régulières sur une variété algébrique (k corps).
↳ localement k^n via ~~cartes~~ compatibles birégulièrement

Modèle local : $\mathcal{U} \subseteq k^n$ localement fermé = ouvert $\cap$ fermé (pour topologie de Zariski)

$f : U \to k$ est régulière si $\forall x \in X$, $\exists$ ouvert V_x des polynômes $P_x, Q_x \in k[X_1 \dots X_n]$ tel que

$$f|_V = \frac{P_x}{Q_x}\Big|_V$$

$X \rightsquigarrow$ faisceau $\mathcal{O}_X$. $\underline{\mathcal{O}_X(U)} = \{ f : U \to k \,/\, f \text{ régulière} \}$

déf : $\mathcal{F}$ algébrique : faisceau de $\mathcal{O}_X$-module : c'est-à-dire que $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(U)$ où $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module et applications de restriction $\rho : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ morphisme de $\mathcal{O}(U)$-module.

déf

Opérations : produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ faisceau associé au préfaisceau

déf $\quad \mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$

On a : $\underline{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x}$.

Morphisme : $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est le faisceau algébrique qui à $U \longmapsto$ ~~$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$~~ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ morphismes de faisceaux sur esp top U

déf

⚠ Il existe flèche $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$

qui n'est ni injective ni surjective.
Il faut conditions de finitude.

Exemple (a) $\mathcal{G}^{\mathbb{N}} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{G})$

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}} \quad \text{n'est pas surjective}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{F}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{(\mathbb{N})} = \underbrace{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}}_{\text{seulement nombre fini non nul}}$$

Remarque $\Leftrightarrow$ dualisation de $\bigoplus_{\mathbb{N}}$ est $\prod_{\mathbb{N}}$

$\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ (??) $\mathcal{G} = \bigoplus \underbrace{\mathcal{H}_{1/x}}_{\text{gratte-ciel en } \frac{1}{x}}$

Inj : $z \mapsto \frac{1}{z - \frac{1}{x}}$

Déf : X variété algébrique. $\mathcal{F}$ faisceau algébrique est cohérent si $\forall x \in X$, $\exists$ voisinage ouvert U de x et une suite exacte :

$$\underbrace{\mathcal{O}_U^{\oplus m} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus n}}_{\hookrightarrow \text{ présentation finie de } \mathcal{F}|_U} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \to 0.$$

déf

⚠ pas seulement de type fini $\Leftrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0$.

$\Leftrightarrow$ nombre fini de générateurs

$\Leftrightarrow \exists s_1 \ldots s_r \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s_{1,y}, \ldots, s_{r,y}$ engendrent le $\mathcal{O}_{X,y}$-module $\mathcal{F}_y$. $\forall y \in U$.

Pour cohérent, on demande de type fini et aussi nombre de relations finies.

Rmq : $\mathcal{F}$ localement libre si $\forall x \in X$, $\exists U$ ouvert voisinage et un isomorphisme $\mathcal{O}_U^{\oplus n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_U$.

localement libre $\Rightarrow$ cohérent.

(Si X irréductible, localement libre $\Rightarrow$ n constant)

~~sinon n~~

Prop

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ faisceaux algébriques cohérents alors
$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

X variété algébrique affine.

Notations : $X \subseteq \mathbb{C}^n$ fermé algébrique.

$A = \mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$. $I \subset A$ idéal $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$.

$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n ; P(x) = 0 \ \forall P \in I\}$.

$I(X) = \{P \in A ; P(x) = 0 \ \forall x \in X\}$.

$A(X) = A / I(X)$

Hilbert : $\boxed{I(V(I)) = \sqrt{I}}$ ($\mathbb{C}$ algébriq clos)

$\sqrt{I}$ = radical de $I = \{a \in A / \exists m \in \mathbb{N}^*, a^m \in I\}$

$\rightarrow$ deux applications

Fermés de Zariski de $\mathbb{C}^n$	$\rightleftarrows$	Idéaux de $\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$.
X	$\longmapsto$	$I(X)$
$V(I)$	$\longleftarrow$	I

avec $V(I(X)) = X$, $I(V(I)) = \sqrt{I}$

Preuve de $I(V(I)) = \sqrt{I}$

$V(I) = \emptyset \Rightarrow I = A$

$\Rightarrow I(V(I)) = A \Rightarrow \sqrt{I} = A \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = A$.

partition de l'unité

$X \subseteq \mathbb{C}^n$ fermé $f_1 \dots f_r \in A(X)$ sans zéro commun

$\exists\, g_1, \dots g_r \in A(X)$ tel que $\sum_{i=1}^{r} g_i f_i = 1 \bmod I(X)$

prop.

Preuve : $F_{r+1} \dots F_s$ générateurs de $I(X)$

avec $F_1 \dots F_r \in A$ tels que $f_i = [F_i]$ dans $A(X) = A/I(X)$

(complétion de famille de gén).

$F_1 \dots F_s$ n'ont pas de zéros en commun.

Hilbert $\Rightarrow$ $1 \in \langle F_1 \dots F_s \rangle$ donc $\exists\, G_1 \dots G_s$ tel

que $1 = \sum_{i=1}^{s} G_i F_i$ donc $1 = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i \bmod I$

Rappel : Quand X affine $\mathcal{O}(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ régulière} \} = A(X) = A/I(X)$

(dém vient des partitions de l'unité)

$f \in A(X)$

$X_f = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \} \subseteq X$

$$X_f \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

$$(x_1 \dots x_n) \longmapsto \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1 \dots x_n)}\right)$$

Image : $Y = V(J)$ où $J = I(X) + (x_{n+1} f(x))$

$\mathcal{O}(X_f) = A(X)_f = S^{-1}A$ où S est la partie multiplicative $= \{1, f, f^2 \dots\}$

Rappel : A anneau, S partie multiplicative alors $S^{-1}A = S \times A/_\sim$ où $\frac{a}{s} \sim \frac{a'}{s'}$ si $\exists t \in S$ tel que $(as' - a's).t = 0$

si irréductible alors anneau intègre

$$\mathcal{O}(X_f) = A(X)[Y]/_{fY-1} \simeq \mathbb{C}[X_1 \dots X_n]/_{I(X_f)}$$

Rque : Les X_f sont une base d'ouverts de X

Théorème : Pour tout faisceau algébrique cohérent sur X affine et pour toute fonction régulière f alors :

$$\Gamma(X_f, \mathcal{F}) = \underbrace{\Gamma(X, \mathcal{F})_f}_{}$$

localisation du $\mathcal{O}(X)$-module $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ par rapport à $f|_X \in \mathcal{O}(X)$

$\mathcal{F}(X_f)$ est un $\mathcal{O}(X_f) = \mathcal{O}(X)_f$ module

En résumé, pour connaître un faisceau cohérent sur var. alg. affine il suffit de connaître sections globales

Soit M un $\overbrace{A(X)}^{\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]/I(X)}$-module où $X \subset \mathbb{C}^n$ affine

On défini $\tilde{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module par $\tilde{M}(X_f) := M_f$ est un $\mathcal{O}(X_f)$-module.

$\tilde{M}$ est faisceau algébrique.

Corollaire 1 : M est de type fini $\Longleftrightarrow$ $\tilde{M}$ cohérent

Corollaire : X variété algébrique ~~cohe~~ quelconque. Le noyau, image et conoyau d'un morphisme de faisceau algébrique cohérents sont encore cohérents.

Dem : la question est locale $\Rightarrow$ OPS que X est affine. Puis on le sait pour les $A(X)$-module.

En particulier $Coh(X)$ est une catégorie abélienne.

Conséquence de (1) : équivalence de catégorie :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{faisceau algébrique cohérent sur } X \text{ affine} & \rightleftarrows & \mathcal{O}(X)\text{-module de type fini} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathcal{F}(X) \\ \tilde{M} & \longleftarrow\!\shortmid & M \end{array}}$$