Groupe de travail faisceaux algébriques

Christoph ①
15/01/18

Rappel : On veut montrer l'équivalence de catégories pour X variété algébrique affine.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{catégorie des}\\ \mathcal{O}_X\text{-moduls cohérents}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)\text{-module de type fini}$$

$$\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}(X)$$

$$\tilde{M} \longleftarrow M$$

Notation : • Un $\mathcal{O}_X$-module cohérent est un faisceau en $\mathcal{O}_X$-module tel que $\forall x \in X$, $\exists U \subseteq X$ ouvert et une présentation $\mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0$.
(localement de présentation finie : nbre fini de gén. & nbe fini de relations)

• Une variété algébrique affine est $X \subseteq \mathbb{C}^n$.
Dans ce cas si on note I_X l'idéal de X ($I_X = \{P \in \mathbb{C}[x_1 .. x_n] \mid P(x)=0 \ \forall x \in X\}$)
annulateur

alors $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)/I_X = \mathbb{C}[X_1 ... X_n]/I_X$

• Lemme important (conséquence du nullstellensatz) :
Si $f_1 \cdots f_l \in \mathcal{O}(X)$ n'ont pas de zéros en commun alors $\exists h_1 .. h_l \in \mathcal{O}(X)$ tel que $\sum_{i=1}^{l} h_i f_i = 1$

• Si $f \in \mathcal{O}(X)$, on note X_f l'ouvert de X défini par $X_f = \{x \in X ; f(x) \neq 0\}$.

Alors $\underbrace{\mathcal{O}(X_f)}_{\text{anneau des fonctions algébriques sur } X_f} \underset{(1)}{\simeq} \underbrace{\mathcal{O}(X)_f}_{\text{anneau des fonctions algébriques sur } X \text{ localisé en } f}$.

Rappel : Si A anneau (intègre) et f un élément de A, le localisé de A en f est $S^{-1}A$ où $S=\{1, f, f^2, f^3 \dots\}$

$$A_f := S^{-1}A := \left\{\frac{a}{f^p} ; a \in A,\ p \in \mathbb{N}\right\}/\sim \quad \text{où}$$

$$\frac{a}{f^p} \sim \frac{a'}{f^q} \text{ si } (\exists r \geq 0) \text{ tel que } f^r(af^q - a'f^p) = 0.$$

Rqe : $A[Y]/(1-Yf) \xrightarrow{\sim} A_f$ (autre définition possible de A_f)

Preuve (1) : Dans notre cas X_f est lui même affine avec plongement

$$\begin{aligned} X_f &\hookrightarrow X \times \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left(x, \frac{1}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

et alors on voit que $\mathcal{O}(X_f) \simeq \mathcal{O}(X \times \mathbb{C})/(1-fY)$

où Y nouvelle coordonnée

Rappel 2 : Si M est un A-module et $f \in A$ alors on peut localiser M par f :

$$M_f := M \otimes_A A_f \quad (= S^{-1}M) \text{ où } S=\{1, f, f^2 \dots\}.$$

$\to$ On obtient M_f un A_f-module

Fait : Les $X_f \subseteq X$ forment une base de la topologie sur X et $\mathcal{U} \subseteq X$ alors $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$.

Comme X est noethérien, I peut être supposé fini.

Rqe. - $X_f \cap X_g = X_{f \cdot g}$.

(X noethérien $\Rightarrow$ suite croissante de fermés stationne àpcr

$\Rightarrow$ suite $X \setminus X_{f_1}$, $X \setminus (X_{f_1} \cup X_{f_2})$, ... stationne àpcr)

Cristoph ②

Théorème : Soit X affine. Alors pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent
Pour toute $f \in \mathcal{O}(X)$, le morphisme de $\mathcal{O}(\cancel{X})$-module

$$\varphi_f : \Gamma(X, \tilde{\mathcal{F}})_f \longrightarrow \Gamma(X_f, \mathcal{F})$$

$$\frac{s}{f^p} \longmapsto \frac{1}{f^p} s|_{X_f}.$$

est un isomorphisme

$(\mathcal{O}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$

Rqe : Si A anneau, $A \longrightarrow A_f$ morphisme d'anneau
$a \longmapsto \frac{a}{f^0} = \frac{a}{1}$
donc tout A_f-module est aussi un A-module.

Preuve : Injectivité $\Leftrightarrow$ si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ est nulle sur X_f alors il existe $r \geq 0$ tel que $s \cdot f^r = 0$ sur X ~~et donc~~ $\cancel{s|_{X_f} = 0}$.
Surjectivité $\Leftrightarrow$ Si $s \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ alors il existe $r \geq 0$ et $\tilde{s} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tel que $\tilde{s} \cdot f^r|_{X_f} = s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. On peut supposer X irréductible

Lemme : Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. S'il existe une présentation globale $\mathcal{O}_X^{\oplus m_\alpha} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ alors φ_f est un isomorphisme

Preuve : · Soit $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ telle que $s|_{X_f} = 0$.
Tout d'abord, il recouvrement par des ouverts U_i affins de X tels que $\exists t_i$ sur U_i $\beta(t_i) = s|_{U_i}$.
Si l'on montre que $s \cdot f^r = 0$ sur V_i $\forall i$ alors $s f_r = 0$ sur X.
Comme U_i est affine, on peut supposer que $U_i = X$ pour simplifier. Donc $s = \beta(g)$ où $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\oplus n}) = \mathcal{O}_X(X)^{\oplus n}$

$g = (g_1, \dots g_n)$ où $g_j = \mathcal{O}(X)$

$\beta(g|_{X_f}) = s|_{X_f} = 0$. donc $g|_{X_f} \in$ Im ~~age~~ de α sur X_f

Donc il existe recouvrement fini de $X_f = \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$

et des sections $h_i \in \mathcal{O}(X)^{\oplus m}$ et $p \geq 0$ tel que $g|_{X_{f_i}} = \alpha\left(\frac{h_i}{f_i^p}\right)$

Donc $f_i^p\, g|_{X_{f_i}} = f_i^p \alpha\left(\frac{h_i}{f_i^p}\right)$ et $f_i^p g|_{X_{f_i}} - \alpha\left(\frac{h_i}{1}\right) = 0$.

donc $\cancel{f_i^p g|_{X_{f_i}} - \alpha(h_i) = 0}$ sur X_{f_i}. donc $\alpha(h_i) = 0$ sur X

$f_i^p g = \alpha(h_i)$ globalement.

car X irréductible et X_f ouvert dense de X.

Comme les X_{f_i} recouvrent X_f, les f_i^p n'ont pas de zéros en communs sur X_f et donc il existe $\theta_i \in \mathcal{O}(X)$

tel que $\sum_i f_i^p \frac{\theta_i}{f^r} = 1$: $f^r = \sum f_i^p \theta_i$.

$f^r s = \beta(f^r g) = \beta(\sum f_i^p \theta_i g) = \beta(\sum \alpha(h_i)\theta_i) = \cancel{0}$

fin injectivité

$= \sum \theta_i\, \beta(\alpha(h_i)) = 0$.

<u>Surjectivité</u> :

On va d'abord montrer que :

$\Gamma(\beta) : \Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\oplus n}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\oplus n}) = \mathcal{O}_X(X)^{\oplus n}$

(On sait que β est surjectif pour faisceaux mais ⚠ image faisceautique)

On sait que si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, $\exists X = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$ tel que

$\exists g_i \in \mathcal{O}(X)^{\oplus n}$ $s|_{X_{f_i}} = \beta\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right)$ et donc

$f_i^p s|_{X_{f_i}} = \beta(g_i)|_{X_{f_i}}$.

$\exists q \geq 0 \quad s f_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q)$ sur X (par l'injectivité de φ_f.

Les f_i^{p+q} n'ont pas de zéros en commun sur X.

$\exists h_i \in \mathcal{O}(X) \quad \sum f_i^{p+q} h_i = 1$.

$s = \sum f_i^{p+q} h_i s = \quad \sum f_i^{p+q} h_i s = \sum h_i \beta(g_i f_i^q)$.

$= \beta(\sum_i h_i g_i f_i^q)$ d'où la surjectivité

$\Rightarrow$ surjectivité de X_f (en localisant sur X_f)

Lemme $\Rightarrow$ Théorème :

Surjectivité $s \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ .. $\mathcal{F}$ cohérent.

$X = \bigcup U_i$ où on peut supposer $U_i = X_{f_i}$, $f_i \in \mathcal{O}(X)$.

et le lemme s'applique sur U_i et donc $\exists p$.

et sections $s_i \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ tels que $s f^p|_{X_f \cap U_i} = s_i|_{X_f \cap U_i}$.

Donc les sections s_i et s_j coïncident sur $X_f \cap U_i \cap U_j$ et donc il existe $q \geq 0$ tel que $(s_i - s_j) f^q = 0$ sur $U_i \cap U_j = X_{f_i f_j}$.

$\exists t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tel que $t|_{U_i} = s_i f^q$. sur U_i.

$t|_{X_f \cap U_i} = s f^{p+q}|_{X_f \cap U_i} \Rightarrow t|_{X_f} = s f^{p+q} \Rightarrow \varphi$ surjectivité

inj $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. $s|_{X_f} = 0 \ \exists p \geq 0 \quad s f^p|_{U_i} = 0 \ \forall i \quad s f^p = 0$ sur X

Def : Soit M un $\mathcal{O}(X)$-module.

$\tilde{M} : X_f \longmapsto M_f = M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X)_f$.

Prop : $\tilde{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module. De plus si M est de type fini, $\tilde{M}$ est cohérent

Dém : Si M est de type fini sur $\mathcal{O}(X)$ qui est noethérien alors il existe une présentation $\mathcal{O}(X)^{\oplus p} \to \mathcal{O}(X)^{\oplus q} \to M \to 0$ donc $\tilde{M}$ cohérent car localisé commute avec suite exacte.

Application : X variété algébrique. Noyau, conoyau et image d'un morphisme de faisceaux algébriques cohérents sont encore cohérents

Preuve : Question est locale, on peut supposer X affine. Or Noyau, conoyau et image d'un morphisme entre modules de type fini sont de type fini pour A anneau noethérien

Application : Si $\mathcal{F}$ cohérent sur X. Si $U \subseteq X$ affine, il existe une présentation $\mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0$ (globale) pour tout ouvert affine.

Application : Si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérent sur variété affine alors $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$ est encore exacte

On peut déduire de cela qu'il n'y a pas de H^1.