GT faisceaux

12/12/2018

(1)

Faisceaux injectifs.

Déf : $\mathcal{I}$ injectif si pour tout
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & \mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow$ Foncteur $Hom(-,\mathcal{I})$ est exact.

$\mathcal{F}$ faisceau. Résolution injective : suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \dots$
où $\mathcal{I}_k$ sont injectifs. (Rqe : $\Leftrightarrow$
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_0 \arrow[r] & \mathcal{I}_1 \arrow[r] & \mathcal{I}_2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$
$\downarrow$ quasi isomorphisme

déf

Lemme : résolutions injectives existent.

dém

$\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{D}(\mathcal{F})(U) = \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$ (faisceau des fonctions discontinues)
injectif si on travaille avec faisceaux espaces vectoriels.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{G}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_1 \\ & D(\mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}_0 \to D(\mathcal{F})$
$\Updownarrow$ exercice
$\{ \alpha_x (\mathcal{G}_0)_x \to \mathcal{F}_x \}$.

$$\forall x \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathcal{G}_0)_x \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{G}_1)_x \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & \mathcal{F}_x & \end{tikzcd}$$
$\exists$ sur espace vectoriel

Rqe : On utilise injectivité des fibres. Sinon il faut avoir avoir assez d'injectif dans la catégorie où vivent les fibres
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}_x \to I_x$ pour chaque x et $D(I)(U) = \prod_{x\in U} I_x$ fonctionne.

Construction de la résolution.

Récurrence : $0 \to \mathcal{F} \to D(\mathcal{F}) \to D(\mathcal{F})/\mathcal{F} \to 0$.

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ D(\mathcal{F})/\mathcal{F} \\ \downarrow \\ D(D(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \\ \downarrow \\ D(D(\mathcal{F})/\mathcal{F}) \big/ D(\mathcal{F})/\mathcal{F} \quad \cdots \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$U \subset X$ ouvert.

$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$. $\Gamma(U, -)$ foncteur des faisceaux sur les modules.

def

exact à gauche : si $0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. alors $0 \to \Gamma(U,\mathcal{F}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_2)$

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \cdots$ résolution injective.

$0 \to \Gamma(U,\mathcal{I}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{I}_1) \to \Gamma(U,\mathcal{I}_2) \to \cdots$ est un complexe de chaînes

$H^i(U,\mathcal{F})$ est le i-ième groupe d'homologie de ce complexe

def

Propriété : ① $H^0(U,\mathcal{F}) = \Gamma(U,\mathcal{F})$

② $V \subset U \rightsquigarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(V,\mathcal{F})$

$H^i(U,\mathcal{F}) \to H^i(V,\mathcal{F})$ morphisme.

③ Cela ne dépend pas de la résolution injective

def

Preuve ③ :
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{I}_0 & \to & \mathcal{I}_1 & \to & \mathcal{I}_2 & \to \cdots \\ & \| & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 0 \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{I}'_0 & \to & \mathcal{I}'_1 & \to & \mathcal{I}'_2 & \to \cdots \end{array}$$

par induction en utilisant injectivité + construction des homotopies et donc $0 \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_2 \cdots$ et $0 \to \mathcal{I}'_0 \to \mathcal{I}'_1 \to \mathcal{I}'_2 \to \cdots$ sont des complexes homotopes ce que $\Gamma(U,-)$ préserve.

(4) Un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induit morphismes $\alpha_* : H^i(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U,\mathcal{G})$

et si $0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to 0$, on a :

$$\cdots \to H^i(U,\mathcal{F}_0) \to H^i(U,\mathcal{F}_1) \to H^i(U,\mathcal{F}_2) \to H^{i+1}(U,\mathcal{F}_0) \to \cdots$$

Dém (4) :

Construction

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{I}_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{I}_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & {} \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{J}_0 \arrow[r] & \mathcal{J}_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

↓ par induction en ~~et~~ utilisant prop injectivité.

Suite exacte :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}'_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}''_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & 0 & 0. & \end{tikzcd}$$

etc...

(5) $\mathcal{F}$ injectif $\Rightarrow$ $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$.

Dém : | $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0$ résolution injective.

(A) On peut appliquer mêmes procédures pour tout foncteur exact à gauche comme f_*, $\mathcal{H}om$, etc... :

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \cdots$

$\Rightarrow H^i(0 \to f_*\mathcal{I}_0 \to f_*\mathcal{I}_1 \to \cdots) =: R^i f_*(\mathcal{F})$ (c'est un faisceau)

__Rqe:__ $H^i(U,\mathcal{F}) = R\Gamma^i(U,\mathcal{F})$

def

$\mathcal{F}$ est acyclique (sur U) si $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$ pour $i>0$.

Résolution acyclique de $\mathcal{F}$ est suite exacte

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \dots$ où $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \dots$ sont acycliques

$0 \to \Gamma(U,\mathcal{F}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \to \dots$ complexe.

def

__Lemme:__ Son homologie est $H^i(U,\mathcal{F})$

suites spectrales

Dem:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_{00} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_{10} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_{01} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_{11} \arrow[r] & {} \\
 & \mathcal{G}_0 & {} & \dots &
\end{tikzcd}$$

$\Gamma(U,\mathcal{I}_{pq})$ complexe double

$\downarrow$

deux suites spectrales (ligne ~~pas~~ ou colonne)

$E^{I}_{p,q}$ $\quad E^{II}_{p,q}$ suites spectrale.

Regardons $2^{\text{ème}}$ page

Si d'abord homologie sur ligne : $\Rightarrow$ $0 \to \Gamma(U,\mathcal{I}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{I}_1) \to \dots$

Si d'abord homologie sur colonne : $\quad 0 \quad 0 \quad 0$

$0 \to \Gamma(U,\mathcal{F}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \to \dots$ $\quad$ car acyclique

$0 \quad 0 \quad 0$

Suites spectrales sur une seule ligne / colonne $\to$ elle a dégénéré $\square$

directe

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \dots$

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{G} \to 0$

GT faisceaux

12/12/2018
3

1 $H_0(\Gamma(U,\mathcal{F}_\bullet)) \cong \Gamma(U,\mathcal{F}) \cong H^0(U,\mathcal{F})$ car $\Gamma(U,-)$ exact à gauche

2 $0 \to H^0(U,\mathcal{F}) \to H^0(U,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{\alpha} H^0(U,\mathcal{G}) \to H^1(U,\mathcal{F}) \to \underbrace{H^1(U,\mathcal{F}_0)}_{=0}$.

par suite exacte longue

Donc $H^1(U,\mathcal{F}) \cong H^0(U,\mathcal{G}) / \mathrm{Im}(\alpha)$.

Or $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \cdots$ car $\mathcal{G} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1)$

donc $0 \to \Gamma(U,\mathcal{G}) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\beta} \Gamma(U,\mathcal{F}_2)$

$$\Gamma(U,\mathcal{G}) \cong \mathrm{Ker}(\beta)$$
$$\| $$
$$H^0(U,\mathcal{G})$$

Donc $$H^1(U,\mathcal{F}) \cong \frac{\mathrm{Ker}(\Gamma(U,\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\beta} \Gamma(U,\mathcal{F}_2))}{\mathrm{Im}(\Gamma(U,\mathcal{F}_0) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(U,\mathcal{F}_1))} = H^1(\Gamma(U,\mathcal{F}_\bullet))$$

On suppose que $H^{j-1}(U,\mathcal{F}) \cong H^{j-1}(\Gamma(U,\mathcal{F}_\bullet))$ ~~pour tou~~ $\forall j \leq i$
(récurrence)

Par induction $H^{i-1}(U,\mathcal{G}) \cong H^{i-1}(0 \to \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \to \cdots) = H^i(\Gamma(U,\mathcal{F}_\bullet))$

et d'autre part pour $i \geq 2$.

$$0 = H^{i-1}(U,\mathcal{F}_0) \to H^{i-1}(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} H^i(U,\mathcal{F}) \to H^i(U,\mathcal{F}_0) = 0$$