Groupe de travail faisceaux

Paolo (1)
19/12

$\mathcal{G}$ faisceau sur X flasque (flabby) si pour tout $U \subset X$

$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est surjective

$\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G})$

def

Rqe : Cela implique que toutes les restrictions

$U \subset V \qquad \Gamma(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G})$ est surjective.

Exemple : • $U \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ est un faisceau non flasque

(prendre fonction qui tend vers ∞ ~~près~~ du ∂U.

• $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ est flasque.

Théorème : Si $0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_2 \to 0$ suite exacte

$\mathcal{F}_0$ flasque $\Rightarrow$ $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to 0$.
exacte.

(vrai aussi pour tout ouvert $U \subset X$)

Preuve : On sait que $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2)$

car $\Gamma(X, \bullet)$ exacte à gauche. Il suffit de montrer surjectivité.

Prenons $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{F}_2)$. On sait que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to 0$

donc il existe recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et des $\tau_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}_1)$ t.q. $\beta(\tau_i) = \sigma|_{U_i}$.

On suppose I dénombrable ($I = \mathbb{N}$).

On suppose (par induction) que $\tau_i|_{U_{ji}} = \tau_i|_{U_{ij}}$ pour $i,j<n$.

Notons $V_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$. Il existe $\tilde{\tau}_n \in \Gamma(V_n, \mathcal{F}_1)$ t.q. $\beta(\tilde{\tau}_n) = \sigma|_{V_n}$.

↳ recollement des τ_i.

Considérons $\beta(\tilde{\tau}_n|_{V_n \cap U_n} - \tau_n|_{V_n \cap U_n}) = \sigma|_{V_n \cap U_n} - \sigma|_{V_n \cap U_n} = 0$

$\Rightarrow \exists\, e \in \mathcal{F}_0(V_n \cap U_n) = \Gamma(V_n \cap U_n, \mathcal{F}_0)$ tel que

$\alpha(e) = (\tilde{\tau}_n - \tau_n)|_{V_n \cap U_n}$

Il existe $e' \in \Gamma(U_n, \mathcal{F}_0)$ étendant e : $e'|_{U_n \cap V_n} = e$

On pose $\tau_n' = \tau_n + \alpha(e')$ et on vérifie que

$\tilde{\tau}_n|_{V_n \cap U_n} = \tau_n'|_{V_n \cap U_n}$. $\rightarrow$ On obtient ainsi un $\tau_{n+1} \in \mathcal{F}_1(V_{n+1})$ ~~et par~~ tel que $\beta(\tau_{n+1}) = \sigma|_{V_{n+1}}$

et par induction on peut construire $\tau \in \mathcal{F}_1(X)$ tel que $\beta(\tau) = \sigma$.

(propriétés faisceaux)

Corollaire : $0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to 0$ exacte.
$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ flasque $\Rightarrow \mathcal{F}_2$ flasque.

Preuve : On a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_1(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}_2(X) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{F}_1(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}_2(U) & \to & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

si $U \subset X$) et donc $\mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(U) \to 0$.
(surjective).

Corollaire : Si $\mathcal{F}$ flasque $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$ $\forall i > 0$.

Rqe :
- $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$ $\forall i>0$ est déf. de acyclique.
- flasque $\Rightarrow$ acyclique.
- tout les injectifs sont flasques (dur).

Preuve : Prenons résolution injective

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \cdots$$

(celle construite avec $D(\mathcal{F})$ est flasque car $D(\mathcal{F})$ est flasque).

· On découpe suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{G}_0 \to 0.$$

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0$$

$$0 \to \mathcal{G}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \mathcal{G}_1 \to 0.$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1$$

$$0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{I}_2 \to \mathcal{G}_2 \to 0.$$

Les $\mathcal{G}_i$ sont flasques par corollaire précédent.

Donc $0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{I}_0) \to \Gamma(X,\mathcal{G}_0) \to 0$

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{G}_0) \to \Gamma(X,\mathcal{I}_1) \to \Gamma(X,\mathcal{G}_1) \to 0$$

et donc $0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{I}_0) \to \Gamma(X,\mathcal{I}_1) \to \Gamma(X,\mathcal{I}_2) \to \cdots$

est une suite exacte ce qui implique que $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ $\forall i > 0$.

X localement contractile (ex : variété)

Théorème : $H^i(X,\underline{k}) = H^i(X,k)$.

Preuve :

$U \longrightarrow C^i(U,k)$ cochaînes singulières est un préfaisceau.

On note $\mathcal{C}^i$ son faisceautisé : $\Gamma(X,\mathcal{C}^i)$ sont les i-chaîns locals. $\mathcal{C}^i$ est un faisceau ~~local~~ flasque.

$\mathcal{C}^i$ sont les i-cochaîns locals.

Autre façon de voir $\mathcal{C}^i$: On ~~considère~~ pose

$$\mathcal{C}^i(U,k) = C^i(U,k) \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in C^i(U,k) \ \exists \{U_j\} \text{ recouvrement} \\ \text{ouvert tel que } \sigma|_{U_j} = 0 \end{array} \right\}.$$

→ Définition du faisceautisé plus simple quand un faisceau satisfait propriété de recollement mais pas unicité.

Une remarque : $C^i(U,k)$ et $\mathcal{C}^i(U,k)$ ont la même cohomologie car on quotiente par des cochaînes qui s'annulent sur les cycles quitte à passer à sur des ~~résolutions~~ triangulations (subdivisions barycentriques) plus fines

De plus $C^i(U,k) \twoheadrightarrow \Gamma(U,\mathcal{C}^i)$ (car quotient) et donc comme C^i est flasque, $\mathcal{C}^i$ est aussi flasque

. Comme X est localement contractile, on a une suite exacte de faisceaux (à tester sur germes) :

$$0 \to \underline{k} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \cdots$$

⇒ On obtient une résolution flasque du faisceau $\underline{k}$ localement constant.

Donc $H^i(X,\underline{k}) = H^i(0 \to \mathcal{C}^0(X,k) \to \mathcal{C}^1(X,k) \to \mathcal{C}^2(X,k) \to \cdots)$
(car résolution flasque est résolution acyclique).

Or $H^i(0 \to \mathcal{C}^0(X,k) \to \mathcal{C}^1(X,k) \to \cdots)$
$$\parallel$$
$H^i(0 \to C^0(X,k) \to C^1(X,k) \to \cdots)$

Donc $\boxed{H^i(X,\underline{k}) = H^i(X,k)}$.

$\uparrow$ cohomologie du faisceau localement constant $\underline{k}$ — $\nwarrow$ cohomologie singulière

def $Z \subset X$ fermé ~~$\Gamma(Z, \mathcal{F}) = \varinjlim_{Z \subset V} \Gamma(V,$~~

$$\Gamma(Z,\mathcal{F}) = \varinjlim_{Z \subset V} \Gamma(V,\mathcal{F})$$

On suppose X paracompact (ex : variété topologique)
c'est à dire : si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ recouvrement, $\exists$ recouvrement $(V_i)_{i\in I}$
tel que $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$.

def

Déf : $\mathcal{F}$ est mou (soft) si pour tout fermé $Z \subset X$
$\Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Z,\mathcal{F})$ est surjective.

Cela veut dire : pour tout Z fermé, pour tout ouvert $U \supset Z$ et pour toute section $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ il existe $V \subset U$, $Z \subset V$ tel que $\sigma|_V$ est dans l'image de $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$.

Fonctions continues (ou formes différentielles) sont mous.

Rqe : • les flasques sont mous.
• les mous sont acycliques ($\pm$ même preuve que pour flasque)

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \cdots$$

est une résolution molle de $\underline{\mathbb{R}}$ et donc

$$H^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^i(0 \to \Omega^0(X) \to \Omega^1(X) \to \cdots) = H^i_{dR}(X)$$

Donc $\boxed{H^i(X ; \mathbb{R}) = H^i_{dR}(X ; \mathbb{R})}$

cohomologie singulière — cohomologie de de Rham.

Rqe : (def limite directe) $\Gamma(Z ; \mathcal{F}) = \{$ couples (U, σ) où $Z \subset U$ ouvert et $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ $\}/\sim$

où $(U, \sigma) \sim (V, \sigma')$ si $\sigma|_{U \cap V} = \sigma'|_{U \cap V}$.