

(Erwan)

SURFACES CUBIQUES

$\mathbb{CP}^3$ $[X:Y:Z:T]$

Surface cubique $S: P(X,Y,Z,T) = 0$ homo poly deg 3.

$P \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z,T]$ homo poly de degre d

S : non-sing si $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial T} = 0 \end{cases}$ n'a pas de sol. ds $\mathbb{CP}^3$

d=1 : Quitte à faire un change de coordonnées (à action de $PG L_4(\mathbb{C})$ près)

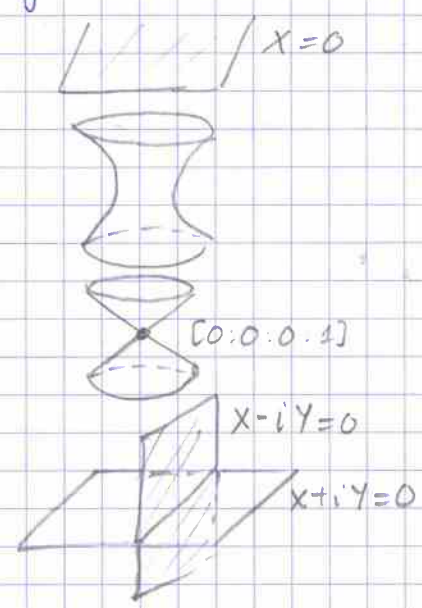
$X=0$

d=2 : $X^2+Y^2+Z^2+T^2=0$

$X^2+Y^2+Z^2=0$

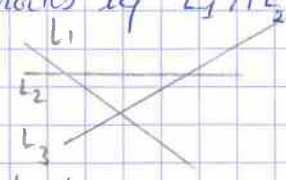
$X^2+Y^2=0$

$\Leftrightarrow X \pm iY = 0$



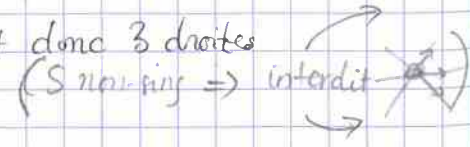
Théorème : S : une surface cubique non-singulière. Alors S contient exactement 27 droites.
 1849 Cayley-Salmon et S admet une application birationnelle $\varphi: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$
 (blowing up $\mathbb{CP}^2$ at 6 pts)

① Si $L_1, L_2 \subset S$ droites tq $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Alors $\exists L_3 \subset S$ tq : L_1, L_2, L_3 forme un triangle.



P : plan contenant L_1, L_2

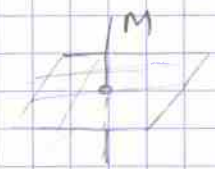
$\Rightarrow P \cap S =$ courbe de deg 3 contenant 2 droites et donc 3 droites



② $L_1, L_2, L_3, M \subset S$ tq (L_1, L_2, L_3) triangle. Alors, M intersecte $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ en exactement 1 pt

$P = (L_1, L_2, L_3)$ plan de $\mathbb{CP}^3 \Rightarrow |P \cap M| = 1$

$P \cap S = L_1 \cup L_2 \cup L_3$



$|P \cap S \cap M| = |P \cap M| = |M| = 1$

9/10/18

Prop : $S \subset \mathbb{CP}^3$ surface cubiq non-sing, $L \subset S$ une droite

Alors, L intersecte exactement 10 autres droites de S , qui sont groupées en

5 paires de droites sécantes

Dém // $\mathcal{Q}_1$: $L \subset \mathbb{CP}^3$, $L: x=y=0$

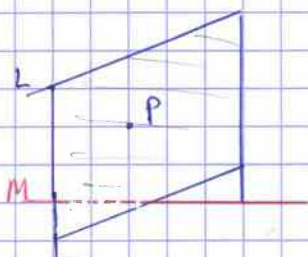
$M \subset \mathbb{CP}^3$, $M: z=t=0$

$\pi: \mathbb{CP}^3 \setminus L \rightarrow M$

$p \mapsto (L_p) \cap M$

plan engendré par L & p

$[x:y:z:t] \mapsto [x:y:0:0]$



$\pi|_S: S \setminus L \rightarrow M$

$\pi|_S^{-1}(p) = (L_p) \cap (S \setminus L) = F$

coniq dans (L_p)

$\pi|_S^{-1}(p) = (L_p) \cap S = F$

(deg 2)

Alg $LCS \Rightarrow S: A(x,y)z^2 + B(x,y)t^2 + C(x,y)zt + 2D(x,y)z + 2E(x,y)t + F(x,y) = 0$

$\begin{matrix} /z^3 \\ /t^3 \\ /z^2t \\ /zt^2 \end{matrix}$

$\deg A = \deg B = \deg C = 1$

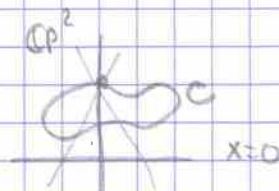
$\deg E = \deg D = 2$

$\deg F = 3$

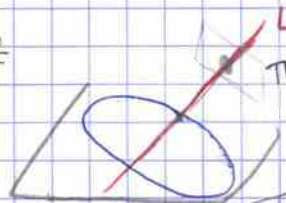
à (x,y) fixé, $\pi^{-1}([x:y:0:0])$ est donné par $A(x,y)z^2 + \dots$

La coniq est non-sing $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \neq 0$

homogène de deg 5



Topo



$\pi|_S$ s'étend à S car S non-singulière

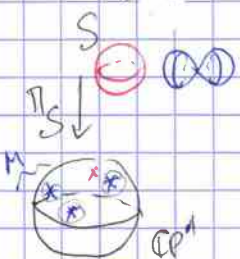
$\# \text{ conic} \cap L = \#$

$\pi|_S: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$



$n := \# \text{ fibres singulières de } \pi|_S$

$\chi(\text{non-sing}) = 2$, $\chi(\text{singulière}) = 3$



$\chi(S) = \chi(\mathbb{CP}^1 \setminus \{n \text{ points}\}) \times 2 + n \times 3$

$= 2(2-n) + 3n$

$\chi(S) = 4+n = 4+5=9$

$\begin{matrix} \pi: \mathbb{CP}^2 \setminus \{pt\} \rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ \pi|_C: C \setminus \{pt\} \rightarrow \mathbb{CP}^1 \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \{x=0\} \\ \rightarrow \{x=0\} \end{matrix}$

tangent

- Rappel
- ① $A, B \subset X$ fermés : $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$
 - ② $F \subset X$ fermé, $\chi(X) = \chi(B) \cdot \chi(F)$
 - $\downarrow$
 B
 - ③ χ est invariante par rétract par déformation

Théorème $\left\{ \begin{array}{l} S \subset \mathbb{CP}^3 \text{ surface } \text{cubique} \\ \text{non-sing.} \end{array} \right.$ Alors S est rationnelle c.à.d. S est birationnelle à $\mathbb{CP}^2$

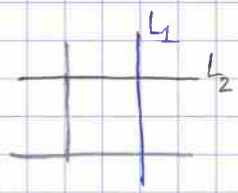
Déf X, Y sont ^{irréd.} birationnelles si $\exists U$ sous-variété stricte de X et $\exists \varphi : X \setminus U \rightarrow Y \setminus V$ isomorphisme algébrique.

ex $\mathbb{CP}^2 \sim \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

car $\mathbb{CP}^2 \setminus \text{droite} = \mathbb{C}^2$

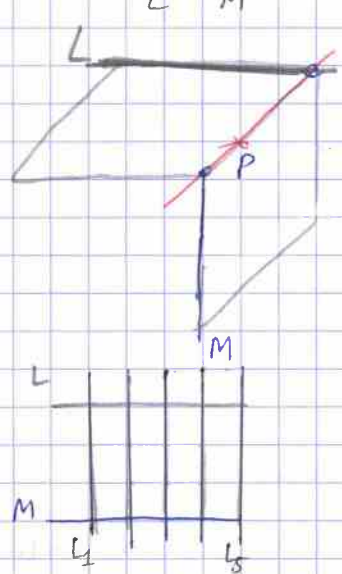
$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \setminus (\{pt\} \times \{droite\} \cup \{droite\} \times \{pt\}) = \mathbb{C}^2$

c'est quoi réservé par l'app birationnelle (gp fondamental?)



Rem. $\exists L, M \subset S$: 2 droites disjointes

Donc, $\pi = \pi_L \times \pi_M : S \rightarrow L \times M = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$



π contracte $L_1, \dots, L_5$ sur $Q_1, \dots, Q_5$

et $\pi : S \setminus \bigcup_{i=1}^5 L_i \rightarrow L \times M \setminus \{Q_1, \dots, Q_5\}$ est un isomorphisme

Rappel Éclatement

Éclater de $\mathbb{C}^2$ en $(0,0)$ $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 ; X : vx = uy$

$(x,y) \quad (u,v)$

$\downarrow$

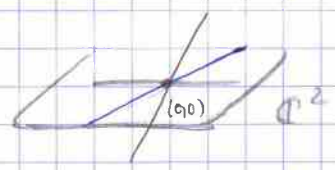
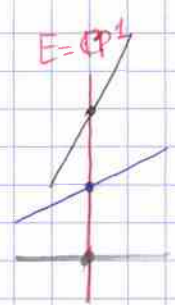
$\mathbb{C}^2$

$$\begin{cases} \text{bl}^{-1}(0) = \mathbb{CP}^1 = E \\ \text{bl}^{-1}(x,y) = [x:y] \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Thm : (Castelnuovo) X : surface alg non-sing, $E \subset X$ courbe rationnelle non-sing.

Alors $\exists \text{bl}_p : X \rightarrow Y$ éclatant en un point tq $E = \text{bl}^{-1}(p)$

$\Rightarrow E^2 = -1$



16/10/18

$C_1, C_2 \subset S$: 2 courbes dans la surface cubique.

$C_1 \sim C_2$ (équival-linéaire) si $\exists f: S \dashrightarrow \mathbb{CP}^2$ alg. tq:

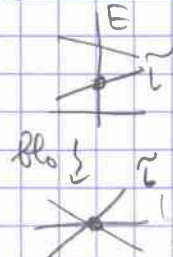
$$\begin{cases} C_1 = \overline{f^{-1}(\infty)} \\ C_2 = \overline{f^{-1}(0)} \end{cases}$$

Pour calculer E^2 par un diviseur exceptionnel, prenons l'éclatement de $\mathbb{CP}^2$ et regardons

$$L = (L - E) + E = \tilde{L} + E \text{ et donc:}$$

$$0 = E \cdot L = E \cdot \tilde{L} + E \cdot E = 1 + E \cdot E$$

$$\Rightarrow E^2 = -1 \quad \square$$



lemme

$\tilde{S} \xrightarrow{\text{bl}} S$, E = diviseur exempt. $C \subset \tilde{S}$ tq: $C \cdot E = 1$ alors $(\text{bl}(C))^2 = C^2 + 1$
car $\mathbb{CP}^2 \xrightarrow{\text{bl}} \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

Prop. Si $L \subset S \subset \mathbb{CP}^3$ une droite dans la surface cubique, alors $L^2 = -1$

Dém//. $\pi: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ fibré en conique, F dessus d'une fibre et alors $F \cdot F = 0$

On a: $(L + F)^2 = 3$ car il est donné par une intersection hyperplane

$$\text{Mais } (L + F)^2 = L^2 + 2 \underbrace{L \cdot F}_{=2} + \underbrace{F^2}_{=0} = 3$$

$$\Rightarrow L^2 + 4 = 3$$

$$\Rightarrow L^2 = -1 \quad \square$$

fait: Si a pas $C^2 = -2$

les 27 droites dans S sont :

- les 6 diviseurs exceptionnels

- le $\binom{6}{2} = 15$ (transformation propre de l'espace) droites $(p_i p_j)$

- le $\binom{6}{5} = 6$ () coniques $(p_i \dots p_5)$

$S \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ birationnelle

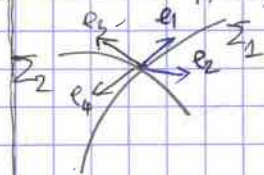
On veut mg : l'auto-intersect des 5 droites est (-1) (Thm Castelnuovo)

$\uparrow$
 $\uparrow$
 mg S est le blow-up de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ en 5 points.

✓ Comme $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ n'est pas singulière, on sait que les droites contractées sont (-1)-courbes.

Rappel ① M^4 : variété dim 4 orientée.

$\xrightarrow{top} \sum_1, \sum_2 \subset M^4$ orientées tq $\sum_1 \cap \sum_2, \sum_1 \cdot \sum_2 \in \mathbb{Z}$.



Si e_1, e_2, e_3, e_4 base directe de $M^4 \rightarrow +1$

$\sum_3$ tq $\exists W \subset M^4 : \partial W = \sum_1 - \sum_3$ sinon $\rightarrow -1$

alors $\sum_1 \cdot \sum_2 = \sum_3 \cdot \sum_2$.

} noir vñ signe d'intersection
 $\sum_1 \bigcirc W \bigcirc \sum_3$

(de cette façon, je peut toujours intersecter 2 surfaces à classe de co-bordisme près)

② Alg $S \supset C_1, C_2$

surface

curves alg

pas définie par tout (meromorphe)

$C_1 \sim C_3$ si $\exists f : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ alg. tq : $\begin{cases} f^{-1}(\infty) = C_1 \\ f^{-1}(0) = C_3 \end{cases}$

est W

à détails technique près la préimage



$\mathbb{CP}^2$

$\frac{L_1(x,y,z)}{L_2(x,y,z)}$

gct rationelle pas déj.

les pts d'intersection des 2 droites



$\mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$

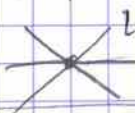
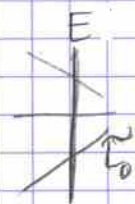
$\mathbb{CP}^2 \setminus \{pts\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$\begin{cases} f^{-1}(0) = L_1 \\ f^{-1}(\infty) = L_2 \end{cases} \Rightarrow L_1 \sim L_2$

$\tilde{\mathbb{C}}^2$

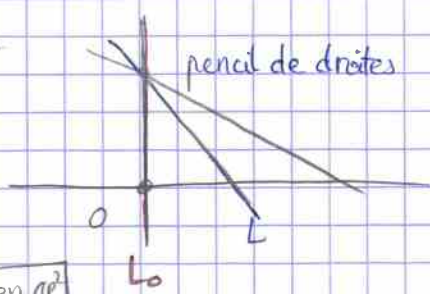
bl_0

$\mathbb{C}^2$



verse offre de ce que je fait en $\mathbb{CP}^2$

$\mathbb{CP}^2$



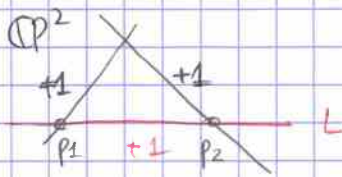
$bl_0^{-1}(L) \sim bl_0(L_0) = \tilde{L}_0 + E$

$(\tilde{L}_0 + E)^2 = 1$ car $[\tilde{L}_0 + E = bl_0^{-1}(L)]$ $(\tilde{L}_0 + E)^2 = (bl_0^{-1}(L))^2 \stackrel{(\text{Shaperev})}{=} L^2 = 1$

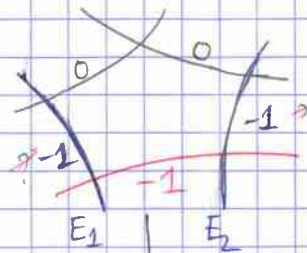
$\tilde{L}_0^2 + 2\tilde{L}_0 \cdot E + E^2 \Rightarrow 2 + E^2 = 1 \Rightarrow E^2 = -1$

lemme: S sur alg. $\tilde{S} \xrightarrow{bl_p} S$, E : diviseur exp.

Si $\tilde{C} \subset \tilde{S}$, $\tilde{C} \cap E$ en un point alors $\tilde{C}^2 = (bl_p(C))^2 - 1$
(if $C \cdot E = 1$)

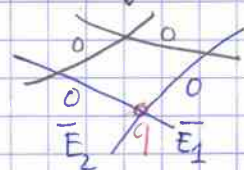


bl_{p_1, p_2}



Caractéristique

Thm. Castelnuovo (blow-down)



$CP^1 \times CP^1$

classifié
l'espace réglé

Prop: S : surface cubique non-sing, $L \subset S$ droite $L^2 = -1$

Dém: $\pi_L: S \rightarrow CP^1$ fibre en coniq, F : classe d'une fibre.
 $\pi_L^{-1}(x) = \text{coniq}$

$F^2 = 0$

$(L+F)^2 = 3$ car $L+F$ classe d'une sect^o hyperplane

ou $(L+F)^2 = L^2 + F^2 + 2L \cdot F$
intersector 2 sections hyperplans qui s'intersectent en 1 droite qui intersecte le cubiq en 3 pts.

$\Rightarrow L^2 = -1$

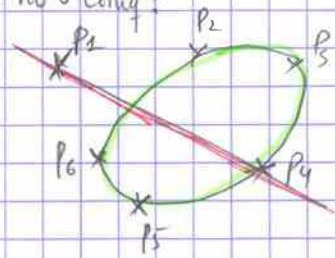
$CP^3 \supset S \xrightarrow{bl_{p_1, \dots, p_6}} CP^2$, $p_1, \dots, p_6$ gen^{er} (pour formule d'adjuncto)

les 27 droites de S sont/correspondent à

$\rightarrow E_1, \dots, E_6 : 6$

$\rightarrow$ droites $(p_i, p_j) \binom{6}{2} = 15$

$\rightarrow$ coniques $(p_{i_1}, \dots, p_{i_5}) \binom{6}{5} = 6$



Surfaces cubiques réelles $RP^3 \subset CP^3$

SMITH-THOM: $\sum b_i(IRS, \mathbb{Z}_2) \leq \sum b_i(S, \mathbb{Z}_2)$

$1+0+7+1=9$

ex

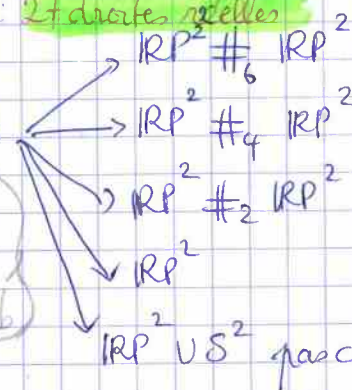
bl $(\mathbb{R}P^2)$

27 droites réelles

$p_1, \dots, p_6$
réelles

RS homeomorphe à

CLASSIFICATION
orientable/non-orientable



27

bl $p_1, \dots, p_6$

15

$\{p_1, \dots, p_4$ réelles,
 p_5, p_6 cplx conj.
 p_1, p_2 réelles

7

3

tout cplx conj.



SERGE

droites elliptiq

15 9 5 3 3

hyperboliq

12 6 2 0 0

déf. droite



Fact $\#$ droites elliptiq - $\#$ droites hyperboliq = 3

$E_i \leftarrow p_i$

$$E_i^2 = -1$$

$L - E_1 - E_2 \leftarrow L_{ij}$

$2L - \sum_{i=1}^5 E_i \leftarrow p_{k_1} \dots k_5$

$$\begin{aligned}
 (L - E_1 - E_2)^2 &= L^2 + E_1^2 + E_2^2 - 2LE_1 - 2LE_2 + 2E_1E_2 \\
 &= 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2L - \sum E_i)^2 &= 4L^2 + \sum E_i^2 - 4L(\sum E_i) + 2\sum E_i E_j \\
 &= 4 - 5 + 0 + 0 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$