13/11/18

(Marco)

Balayages Rationnels ("Scroll")

On va regarder $\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$

$$\mathbb{F} \downarrow \mathbb{P}^1$$

Cas plus simple $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$

On a le prolongement de Segre. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2 / \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$

$(x_1, \dots, x_n)$ (t_1, t_2) (λ, μ)

$$(\lambda, 1) \cdot (t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) = (\lambda t_1, \lambda t_2, x_1, \dots, x_n)$$

$$(1, \mu) \cdot (t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) = (t_1, t_2, \mu x_1, \dots, \mu x_n)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^n & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{N+1} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & & \mathbb{C}^* \end{array}$$

prend-on $1 + N = 2n$, coordonées (u_{ij}) $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,n}$ $(t_i \cdot x_j)$

Claim: $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$

$$(t_1, t_2), (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (t_i x_j)$$

$$\circlearrowleft (\lambda, \mu) \qquad \circlearrowleft \lambda\mu$$

$$\overline{\varphi} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$\Big(n = 2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^4$

$(t_1, t_2), (x_1, x_2) \longmapsto (t_1 x_1, t_1 x_2, t_2 x_1, t_2 x_2)$

$u_{11} \quad u_{12} \quad u_{21} \quad u_{22} \qquad : u_{11} u_{22} = u_{12} u_{21} \Big)$

$$u_{ij} u_{kl} = u_{il} u_{kj}, \quad \begin{cases} i, k \in \overline{1,2} \\ j, l \in \overline{1,n} \end{cases}$$

Claim: $\operatorname{Im} \overline{\varphi} = V(u_{ij} u_{kl} - u_{il} u_{kj})$

$\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) = (\mathbb{C}^{*2} \times \mathbb{C}^{*n}) / \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ où $(1, \mu)$ agit comme d'abord

mais $(\lambda, 1)(t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) = (\lambda t_1, \lambda t_2, \lambda^{-a_1} x_1, \dots, \lambda^{-a_n} x_n)$

$(t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\pi} (t_1, t_2) \in \mathbb{P}^1$ bien défini

vì có trong sơ đồ, [illegible]

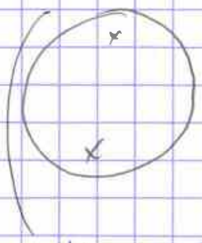
Si $a_i \neq a_j$ pour quelques $i \neq j$, la projection $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ne descend pas à $\mathbb{F} \to \mathbb{P}^{n-1}$

Balayages.

Tout fibre de π est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$: $\pi^{-1}(1, 0) = \{(1, 0, x_1, \dots, x_n)\} / \{(1, \mu)\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$

$\mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ si $a_1, \dots, a_n > 0$.

toujours $1 + N = 2n$?



$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \mathbb{C}$$

$\Downarrow$ $U_S = \mathbb{P}^1 \setminus N$ $\quad$ $\Downarrow$ $U_N = \mathbb{P}^1 \setminus S$

intersect° $\mathbb{C}^*$

U_S = fibré = $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^{n-1} \ni (t, \underline{x})$

U_N = —— $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^{n-1}$

Recollement : $\varphi : (t, \underline{x}) \longmapsto \left(\frac{1}{t}, \begin{pmatrix} t^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{a_n} \end{pmatrix} \underline{x} \right)$

Fonctions sur $\mathbb{F}$: $\langle t_1, t_2 \rangle$, t_1/t_2 : fonct° rationnelle $/\mathbb{F}$

$\alpha \in \langle t_1^{a_1} x_1, t_1^{a_1-1} t_2 x_1, \dots, t_2^{a_1} x_1 \rangle$ $\quad \deg_{x_1} = 1$

$\beta \in \langle t_1^{a_2} x_2, t_1^{a_2-1} t_2 x_2, \dots, t_2^{a_2} x_2 \rangle$ $\quad \deg_{x_2} = 1$

$\frac{\alpha}{\beta}$: fonct° rationnelle $/\mathbb{F}$.

$\{\alpha = 0\}$ est bien défini.

$\varphi : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ où $N = \sum_{i=1}^{n} (a_i + 1)$

$(t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\underbrace{t_1^{a_1} x_1}_{y_1} : \dots : \underbrace{t_2^{a_1} x_1}_{y_{a_1+1}} : \underbrace{t_1^{a_2} x_2}_{y_{a_1+2}} : \dots : \underbrace{t_2^{a_2} x_2}_{y_{a_1+a_2+2}} : \dots : t_2^{a_n} x_n)$

(λ, μ) $\quad \mu$

$\Downarrow$

$(\lambda t_1, \lambda t_2, \lambda^{a_1} \mu x_1, \dots, \lambda^{a_n} \mu x_n) \longmapsto \mu (\quad)$

Les fibres de π sont des sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}^{N-1}_{(y_1, \dots, y_{N-1} \text{ coor})}$

Par ex : $\pi^{-1}(1,0) = \{ (\underbrace{x_1 : 0 : \dots : 0}_{a_1+1} : \underbrace{x_2 : 0 : \dots : 0}_{a_2+1} : \dots : \underbrace{x_n : 0 : \dots : 0}_{a_n+1}) \}$

$\{ y_2 = \dots = y_{a_1+1} = 0, \; y_{a_1+2} = \dots = y_{a_1+a_2+2} = 0, \dots \}$

(fixe $\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1^{a_1} x_1}{t_1^{a_1-1} t_2 x_1} = \frac{t_1^{a_1-1} t_2 x_1}{t_1^{a_1-2} t_2^2 x_1} = \dots$) $= ($

$(y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{P}^{N-1}$ $\quad \underbrace{\overset{y_{a_1}}{t_1 t_2^{a_1-1} x_1} : \overset{y_{a_1+1}}{t_2^{a_1} x_1}}_{t_1/t_2} : \underbrace{\overset{y_{a_1+2}}{t_1^{a_2} x_2} : \overset{y_{a_1+3}}{t_1^{a_2-1} t_2 x_2}}_{t_1/t_2}$ $\Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} y_{a_1} & y_{a_1+1} \\ y_{a_1+1} & y_{a_1+2} \end{pmatrix}}$

$$\operatorname{rank} \left(\begin{array}{cccc|ccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_{a_1} & y_{a_1+2} & \cdots & y_{a_1+a_2+1} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{a_1+1} & y_{a_1+3} & \cdots & y_{a_1+a_2+2} \end{array} \right) \leq 1$$

équat° quadriq. $\begin{cases} y_1 y_3 = y_2^2 \\ \vdots \end{cases}$

Prenez les cartes $U_{ij} = \{t_i \neq 0, x_j \neq 0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$

$\hookrightarrow$ vous permet de regarder $(i=j=1)$ $\left(t_2/t_1, x_2/x_1, \dots, x_n/x_1\right) \in U_{ij}$

Ex 1

$\mathbb{F}(1,1) \simeq \mathbb{F}(0,0) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

- $\varphi : \mathbb{F}(1,1) \hookrightarrow \mathbb{P}^{4-1}$
- $\operatorname{Im}\varphi = \left\{ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} \leq 1 \right\} = V(y_1y_4 - y_2y_3 = 0) =$ quadriq $\subset \mathbb{P}^3$.
- Mq : Quadric $\subset \mathbb{P}^3$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Ex2

$\mathbb{F}(0,a)$: surface reglé $\quad \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{F}(0,a)$

$$\mathbb{F}(0,a) \downarrow \mathbb{P}^1$$

$\varphi : \mathbb{F}(0,a) \hookrightarrow \mathbb{P}^{a+1}$

$\left\{\operatorname{rank}\begin{pmatrix} y_2 & \dots & y_{a+1} \\ y_3 & \dots & y_{a+2} \end{pmatrix} \leq 1 \right\} = V\Big(\underbrace{y_2y_4 = y_3^2, \dots, y_a y_{a+2} = y_{a+1}^2}_{I}\Big)$

ie 1 coordonné libre

$\operatorname{Im}\varphi =: \operatorname{Cone}(V(I)) \subset \mathbb{P}^{a+1}$

$\hookrightarrow$ regardé comme sous variété de $\mathbb{P}^a$

$\hookrightarrow$ courbe rationnelle normale de degré a ds $\mathbb{P}^a$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^a \\ (t_1, t_2) \longmapsto (t_1^a : t_1^{a-1}t_2 : \dots : t_2^a) \end{array}\right)$$

$\varphi : \mathbb{F}(0,a) \longrightarrow \mathbb{P}^{a+1}$ est birationnelle sur $\mathbb{F}(0,a) \setminus \{x_2 = 0\}$.

φ est le résolution de singularité de $\operatorname{Im}\varphi$.

Ex Cubiq normal rationnelle (Twisted cubic / cubiq gauche) n'est pas une intersection complete

$C \subset \mathbb{P}^3 \quad \dim C = 1$,

C est défini par 2 éq. $\quad \deg C = C$

$H \cap C$ par 3 pts

$C : a_1y_1 + \dots + a_4y_4 \qquad (y_1, \dots, y_4) = (t_1^3, t_1^2t_2, t_1t_2^2, t_2^3)$

$a_1 t_1^3 + \dots + a_4 t_2^3$

$t_2 = 1 \quad a_1 t^3 + \dots + a_4$.

deg 3 + int. complète $H_0 \cap (\text{cubiq})$

$(1,0,0,0)$	$(1,0)$
$(0,0,0,1)$	$(0,1)$
$(1,-1,1,-1)$	$(1,-1)$
$(1,1,1,1)$	$(1,1)$

20/11/18

Def Groupe de Picard

X : variété complexe projective non-singulière (pour Cartier Div $\equiv$ Picard div)

$\mathrm{Div}(X)$ = engendré par les diviseurs premiers comme gp abélien libre

$D \subset X$: sous-variété irréd de codim 1

$\sim$: équivalence linéaire / $\mathrm{Div}\, X$

Les diviseur principaux sont associées aux fct rationnelles $f \in k(X)$: $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$

$\mathrm{div}\, f = \overline{f^{-1}(0)} - \overline{f^{-1}(\infty)}$ comptés avec mult

$D \sim D' \overset{\text{def}}{\iff} D = D' + \mathrm{div} f$.

$\mathrm{Pic}\, X = \mathrm{Div}\, X/\sim$

Ex $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2_{x_1x_2x_3}) = \mathbb{Z}$ engendré par les droite $H = \{x_1 = 0\}$

D : diviseur premier ; lieu de zero d'un polyn P de degré d

$D \sim dH$ car $\frac{P}{x_1^d} \in k(\mathbb{P}^2)$

Thm $\mathrm{Pic}(\mathbb{F}) = ?$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n) = \mathbb{C}_k^{*2} \times \mathbb{C}_k^{*n} / (t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda t_1, \lambda t_2, \mu\lambda^{-a_1} x_1, \dots, \mu\lambda^{-a_n} x_n)$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}$.

$\mathrm{Div}\, \mathbb{F} = ?$,
fonct° rationnelle$/\mathbb{F} = ?$

$$\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{F} \downarrow \mathbb{P}^1$$

$$* \quad \frac{\sum t_1^{e_1} t_2^{e_2} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}}{\sum t_1^{e_1'} t_2^{e_2'} x_1^{d_1'} \dots x_n^{d_n'}}$$

+ est invariante sous l'act° de μ si tous monômes ont le même degré $d = \sum d_i$.

+ est invariante sous l'act° de λ.

$$\lambda(t_1^{e_1} t_2^{e_2} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}) = \lambda^{\overbrace{e_1 + e_2 - \underbrace{(a_1 d_1 + \dots + a_n d_n)}_{\underline{a} \cdot \underline{d}}}^{e}} (t_1^{e_1} t_2^{e_2} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n})$$

Def rem Pic $\left\{\begin{array}{l} P(t_1, t_2, x_1, \dots, x_n) \text{ est de bidegré } (d, e) \text{ s'il est de degré } d \text{ sur } x \\ \text{et } (e_1+e_2) \text{ sur } t \text{ où } e_1 + e_2 - \underline{a} \cdot \underline{d} = e \ (1, 0) \end{array}\right.$

$*$ Les diviseurs effectifs (càd $D = \sum_{n_P \geq 0} n_P P$ où P est premier)

exo $D \sim$ (union de $n_P P$)

Prop Les diviseurs effectifs sur $\mathbb{F}$ sont définis par une équat° dans $t_1, t_2, x_1, \dots, x_n$

Thm $\mathrm{Pic}(\mathbb{F}) = \mathbb{Z} F \oplus \mathbb{Z} M$ $(\simeq \mathbb{Z}^2)$ (comme hyperplan$/\mathbb{C}^{n+2}$)

F : fibré $\{t_1 = 0\}$; M : sect° hyperplane $\{t_1^{a_1} x_1 = 0\}$.

$F^2 = 0$, $FM^{n-1} = 1$, $M^n = \sum a_i$ $\qquad \{t_1^{0} x_1 = 0\}$

Dém//. D diviseur $\Rightarrow$ $D \sim eF + dM$.

D est donné par $\frac{P}{Q}$ $^{(d',e')}_{(d'',e'')}$ quotient de 2 polyn.

$\frac{P}{Q} \cdot (t_1^{e-da_1} x_1^{d}) \in k(\mathbb{F})$ où $\begin{cases} d = d' - d'' \\ e = e' - e'' \end{cases}$

donne une eq. linéaire entre D et $dM + (e - da_1)F$

$F \cap M^{n-1} \quad \underline{\qquad} \quad 1$

$(t_1 = 0) \quad (x_1 = \dots = x_{n-1} = 0)$

$(t_1, t_2) = (0,1) \quad (x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad (0, 1; 0, \dots, 0, 1)$

$H_{2n-2}(X) \simeq Pic(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z})$ isom si $X = \mathbb{P}^n, \mathbb{F}$.

dualité

$D \longmapsto [D]$ $\quad$ $\operatorname{Ker}\partial / \operatorname{Im}\partial$

$D' \sim D \longmapsto [D'] = [D]$

Ex. $\mathbb{F} = \mathbb{F}(0, a)$, $a \geq 0$

$Pic(\mathbb{F}) = \mathbb{Z}F \oplus \mathbb{Z}M$

$\Rightarrow F^2 = 0$, $FM = 1$, $M^2 = \overset{+}{-}a$

* $F = \{t_1 = 0\}$

$F' = \{t_2 = 0\} \to$ lin. eq. à F $(F' \sim F)$ car $\frac{t_1}{t_2} \in k(\mathbb{F})$

$F^2 = F \cdot F' = 0$

* $M = \{x_1 = 0\}$

$F \cdot M = |F \cap M| = |(0:1;0:1)| = 1$

* $M \cdot (M \underline{\oplus} aF)$

$M = \{x_1 = 0\} \sim \{t_1^a x_2 = 0\} \sim aF + \underbrace{\{x_2 = 0\}}_{M'} = aF + M'$ so $M' = M - aF$

lideg (1, 0)

$M \cdot M' = |M \cap M'| = |\{x_1 = x_2 = 0\}| = |\phi| = 0$

$\Rightarrow M \cdot M - aM \cdot F = 0 \Rightarrow M^2 = a$