

Courbes en surfaces & nombres d'intersection

X : surface non-sing projective

$$\begin{array}{ccc} \text{Div } X \times \text{Div } X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (D_1, D_2) & \longmapsto & D_1 \cdot D_2 \end{array}$$

↗ bilinéaire, symétrique

$$D_1 \sim D_2' \Rightarrow D_1 \cdot D_2 = D_2' \cdot D_2$$

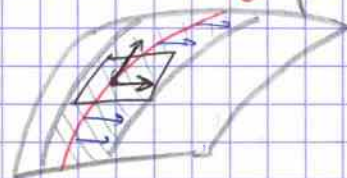
$$(\text{Pic } X = \text{Div } X / \sim)$$

- $D_1 = G_1, D_2 = C_2$ courbes différentes

$$D_1 \cdot D_2 = \sum_p (C_1 \cdot C_2)_p \quad \text{ou } p \in C_1 \cap C_2, (C_1 \cdot C_2)_p \text{ est la multiplicité d'intersection local}$$

- $D_1 = D_2 = C$

$$C^2 = \deg N_{X/C} \quad \text{(fibres normal)}$$



$$C_1 : \{f_1 = 0\}$$

$$C_2 : \{f_2 = 0\}$$

Autour du pt p

$$(C_1 \cdot C_2)_p := \dim \mathcal{O}_{X,p} / (f_1, f_2) \quad (\text{kg vector})$$

Remarque : $D \geq 0$ effectif

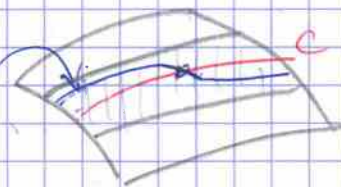
- Si $D_1, D_2 \geq 0$ sans composantes communes

Alors $D_1 \cdot D_2 \geq 0$ ("=" ssi ils sont disjoints)

- Si C courbe irréductible (◦) nœud non-sing

$$C \xrightarrow{\sim} C' \Rightarrow C^2 = C \cdot C' \geq 0$$

(non-sing) $\Leftrightarrow N_{X/C}$ a une sect° globale



Ex: $F(0, a)$ surface de ~~Flückner~~ ~~Flückner~~

$$\begin{array}{ccc} & E & E^2 = -a \\ F & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & E \cdot Z = 0 \\ & Z & F^2 = 0 \\ & \downarrow & Z^2 = -a \\ & \mathbb{CP}^1 & \end{array}$$

$$\text{Pic } F(0, a) = \mathbb{Z}F \oplus \mathbb{Z}E$$

$$\begin{array}{cc} E & F \\ E & \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ F & \end{array}$$

$$F \simeq \mathbb{CP}^1, Z = \{\omega \in \mathbb{CP}^1\} \text{ } C\text{-sect°}$$

$$= aF - E$$

$$E = \{\omega \in \mathbb{CP}^1\} \text{ } \omega\text{-sect°}$$

Ex 2: $S = \text{Surface alig} = \text{bl}_{p_1 \dots p_6}(\mathbb{P}^2)$

$$\begin{array}{c}
 L \quad E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \quad E_6 \\
 L \begin{pmatrix}
 1 & & & & & & \\
 & -1 & & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & \\
 & & & & & -1 & \\
 & & & & & & -1
 \end{pmatrix} \\
 E_i^2 = -1
 \end{array}$$

$$(L + E_i + E_j)^2 = -1$$

$$(2L + \sum_{i \neq j} E_i)^2 = -1$$

Thm (negativité de lieu exceptionnel)

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$: courbes d'une surface non-singulière Y .

Si $\exists f: Y \rightarrow X$ birationnelle & projective tel que $f(\Gamma_i) = \text{pt}$.

Alors, $q: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie négative. ($q(\mathbb{Z}^k \setminus 0) \subseteq \mathbb{Z}_{<0}$) $q(n_1, \dots, n_k) = D^2$
 $(n_1, \dots, n_k) \mapsto (\sum n_i \Gamma_i)^2$

Hypothèses additionnelles.

+ $\Sigma := \cup \Gamma_i$ est connexe

+ $f(\Sigma) = Q$, $f: Y \setminus \Sigma \rightarrow X \setminus Q$ est isomorphisme.

Lemme $\exists D \geq 0$, $D = \sum a_i \Gamma_i$ tq $D \cdot \Gamma_i \leq 0, \forall i$

Dém, Soit $g \in \mathcal{O}_{X,a}$

$$C := \text{div}(g)$$

$$f^*g = g \circ f$$

$$f^*C = C' + D, \quad D = \sum a_i \Gamma_i$$

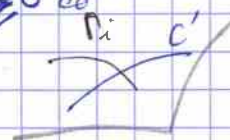
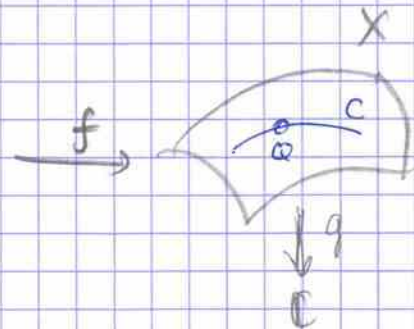
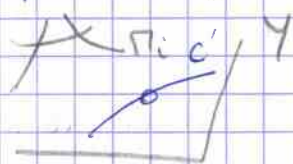
transforme stricte

$$\text{Div}_Y(g \circ f) \cdot \Gamma_i = 0$$

$$(C' + D) \cdot \Gamma_i = 0$$

$$-C' \cdot \Gamma_i = +D \cdot \Gamma_i \leq 0$$

carabre (quand 2 courbes)



Dém(Thm) ④ $D = \sum a_i \Gamma_i$ $a_i \geq 0$ but 1

Si $a_i = 0$, $D, \Gamma_i \geq 0$ sans composantes communes $D \cdot \Gamma_i \geq 0$

$$\Rightarrow D \cdot \Gamma_i = 0$$

$\Rightarrow D$ et Γ_i sont disjoints (∇ connexe of Σ)



④ On suppose $E = \sum b_i \Gamma_i$ tq $E^2 \geq 0$ but 2

$E = E_1 - E_2$ avec $E_i \geq 0$ sans composantes communes

$$0 \leq E^2 = E_1^2 + E_2^2 - \underbrace{2E_1 E_2}_{\geq 0} \leq E_1^2 + E_2^2$$

Ops: $E \geq 0$

④ E avec un nombre minimal de composantes Γ_i

$$c := \min \{b_i/a_i\} \geq 0$$

$$E' := E - cD \geq 0 \text{ car } b_i' = b_i - ca_i \geq 0$$

$$(E')^2 = (E - cD) \cdot E' = EE' - cDE' = \underbrace{\left(\sum b_i \underbrace{D \cdot \Gamma_i}_{\geq 0} \right)}_{\leq 0} \text{ (lemme)}$$

$$\geq E \cdot E' \geq 0$$

$$(E \cdot E' = E \cdot (E - cD) = E^2 - cE \cdot D \geq E^2 \geq 0)$$

+ $E' \neq 0 \Rightarrow$ minimalité des composantes ie $E' \geq 0$ and $E'^2 \geq 0$ but $E' < E$ (visly)

+ $E' = 0 \Rightarrow E = cD$

$$\Rightarrow E^2 = cED < 0 \text{ (mâu thuẫn vs } E'^2 \geq 0, \text{ OKAY)}$$

Kết luận: $\exists E = \sum b_i \Gamma_i$ tq $E \geq 0, E^2 \geq 0 \Rightarrow \forall E \geq 0, E^2 \geq 0$

Def: X variété alg (ou complex) nonsing de $\dim_{\mathbb{C}} = n$

qdx: forme volume $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$

alg: forme méromorphe $\int g df_1 \wedge \dots \wedge df_n$ $\left\{ \begin{array}{l} g \in k(X), \\ f_1, \dots, f_n \text{ forme méromorphe, indépendantes} \end{array} \right.$

$$\mathcal{S} := g J d\bar{z}$$

$$K_X := \text{div}(\mathcal{S}) \in \text{Pic}(X)$$

$$s' = g' d\bar{f}' = g' J' d\bar{z} = h \cdot \mathcal{S}$$

Formule d'adjonction $X \subset Y$ hypersurface, X, Y non-sing

$$\Rightarrow K_X := (K_Y + X)|_X$$

Formule de genre $C \subset X$ courbe dans surface

$$2g - 2 = (K_X + C) \cdot C$$