Faisceaux algébriques cohérents

11/12/2018 ①
GT Surfaces algébriques.

déf

X espace topologique. $\mathrm{ouvert}(X) \longrightarrow$ Groupe abélien

$\mathcal{F}$ Préfaisceau (en groupe abélien) : $\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{F}(U)$.

$V \subseteq U$, ~~il existe~~ $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ morphismes de groupes abéliens avec conditions.

* $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
* $W \subseteq V \subseteq U$ $\quad \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$

Morphisme de préfaisceau : $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. $\forall U \subseteq X$, $f_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ morphisme de gpe

compatible avec les restrictions : $V \subseteq U$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

commute.

déf

Catégorie des préfaisceaux est additive : (a) $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ groupe abélien

(b) $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{H})$ bilinéaire

(c) $\mathrm{Hom}(0,\mathcal{F}) \cancel{=} \mathrm{Hom}(\mathcal{F},0) = 0$

Sous-préfaisceau : $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ si $\forall U$ $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ sous-groupe t.q. $\forall V \subseteq U$ $\rho_{V,U}(\mathcal{F}'(U)) \subseteq \mathcal{F}'(V)$

déf

(dans ce cas $\mathcal{F}'$ muni de $\rho_{V,U}\big|_{\mathcal{F}'(U)}^{\mathcal{F}'(V)} : \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(V)$ est un préfaisceau)

Catégorie des préfaisceaux est abélienne : si f morphisme de préfaisceau, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{coker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bien définis avec déf. naturelles et vérifient les bonnes propriétés.

~~Faisceau~~

Faisceau

$\mathcal{F}$ est un préfaisceau. ~~si $\forall U$~~ $\mathcal{F}$ est un faisceau si $\forall U$ ouvert, $\forall (U_i)_{i\in I}$ recouvrement de U : (où $U_{ij} = U_i \cap U_j$) si la suite

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(U_{ij})$$

$$s \longmapsto s|_{U_i}$$

$$(s_i)_{i\in I} \longmapsto s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}}$$

est exacte.

déf

Autrement dit, les sections locales s_i sur U_i qui coincident sur les U_{ij} se recollent de manière unique en une section sur $\mathcal{U}$.

Problème universel : $\mathcal{F}$ ~~pré~~faisceau $\forall \mathcal{G}$ faisceau, $\forall \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ morphisme de préfaisceau, $\exists! g$ t.q.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[d, "i^+"'] \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(où $\mathcal{F}^+$ faisceau, i^+ objet universel)

Construction : $x \in X$, $\mathcal{F}$ préfaisceau $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \ni x}} \mathcal{F}(U)$ germe

Autrement dit,
$\mathcal{F}_x$ est le quotient $\coprod_{\substack{U \\ U \ni x}} \mathcal{F}(U)$ par la relation d'équivalence

$a \in \mathcal{F}(U) \sim b \in \mathcal{F}(V)$ s'il existe $W \subseteq U \cap V$ t.q. $a|_W = b|_W$

Si $x \in \mathcal{U}$ et $s \in \mathcal{F}(U)$ alors s_x est classe d'équivalence dans $\mathcal{F}_x$.

$\mathcal{F}^+(U)$ le groupe des familles $(s_x)_{x\in U}$ t.q. $\forall x \in U, \exists V_x \subseteq U$ et $t \in \mathcal{F}(V_x)$ t.q. $\forall y \in V_x \quad s_y = t_y$.

<u>Lemme</u> : $U \mapsto \mathcal{F}^+(U)$ solution du problème universel ci-dessus.

<u>Lemme</u> : $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morphisme de faisceaux.
Si $\forall x \in X$, $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est un isomorphisme
alors f est un isomorphisme

<u>Dém</u> : <u>injectivité</u> $s \in \mathcal{F}(U)$ $\quad f_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ et $f_U(s) = 0$.

$f_x(s_x) = 0 \ \forall x \in U. \underset{f_x \text{ injective}}{\Longrightarrow} s_x = 0 \ \forall x \in U.$

$\Rightarrow \exists$ recouvrement (U_i) de U t.q. $s|_{U_i} = 0 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} s = 0$ sur U
$\mathcal{F}$ faisceau.

<u>Surjectivité</u> : $t \in \mathcal{G}(U)$ $\quad \exists$ recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de U
$\exists s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $f(s_i) = t|_{U_i}$.

Sur U_{ij} : $t_i|_{U_{ij}} = t_j|_{U_{ij}} \Rightarrow s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$

$\mathcal{F}$ faisceau $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$ t.q. $s|_{U_i} = s_i$

$f(s)|_{U_i} = t|_{U_i} \Rightarrow f(s) = t.$

X variété algébrique. $\mathcal{O}_X$ faisceau des fonctions régulières

On munit $\mathbb{C}^n$ de la topologie de Zariski.

Fonctions régulières : $X \subseteq \mathbb{C}^n$ localement fermée
($\Leftrightarrow X =$ intersection ouvert $\cap$ fermé)

$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est régulière si $\forall x \in X$, $\exists V_x \subseteq X$ voisinage et $P_x, Q_x \in \mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$, $f|_{V_x} = \frac{P_x}{Q_x}\Big|_{V_x}$ avec $Q_x(y) \neq 0$ $\forall y \in V_x$

<u>Rmq</u> : Si $X \subseteq \mathbb{C}^n$ est fermé alors $f = P|_X$ $P \in \mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$

<u>Dém</u> : $\forall x \in X$, $\exists V_x$ $f|_{V_x} = \frac{P_x}{Q_x}$ quitte à multiplier par ??

$f Q_x|_X = P_x|_X$ ~~$\mathbb{1}_X$~~

$J = \langle Q_x ; x \in X \rangle$. Les polynômes de J n'ont aucun zéro en commun sur X.

$I = I(X) = \{P \in \mathbb{C}[X_1 \dots X_n] / P(y) = 0 \ \forall y \in X\}$.

$I + J = (1)$.

Hilbert : $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$ idéal maximal

Preuve Hilbert $\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x = \{R \in \mathbb{C}[X_1 \dots X_n] ; R(x) = 0\}$.

~~$1 \bmod I = \sum_{i=1}^{k} R_i Q_{x_i}$~~ et donc $I + J$ n'est inclus dans aucun idéal maximal $\rightarrow I + J = (1)$

Donc $1 \bmod I = \sum_{i=1}^{k} R_i Q_{x_i}$

Donc dans $\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]/_I$ $f = \sum_{i=1}^{k} R_i P_{x_i}|_X \longrightarrow$ restriction d'un polynôme $\square$

X variété algébrique si :
X ensemble avec cartes $\varphi : U \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{C}^n$ (fermé) bijection carte
avec compatibilité entre cartes ($\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ fonction <u>bi-régulière</u>)

déf

$\rightsquigarrow$ Topologie sur X : $\mathcal{U}$ source de cartes. ouvertes. et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ homéomorphisme.

topologie la plus petite qui rend les sources de cartes ouverts.

On demande :

* X est noethérien ($\Leftrightarrow \exists$ ensemble de cartes finies)
* $X \subseteq X \times X$ est fermé (remplace notion de <u>séparé</u>)

$\mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C}$ régulière si régulière dans chaque carte $\}$.

X variété algébrique

$\mathcal{O}_X$ faisceau des fonctions régulières

déf

$\mathcal{F}$ faisceau algébrique si $\forall U \subseteq X$ $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}(U)$-module et on demande $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ morph de $\mathcal{O}(U)$-modules (comme morphisme de restriction $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$, tout $\mathcal{O}(V)$-module est un $\mathcal{O}(U)$-module).

$\rightsquigarrow$ catégorie abélienne

<u>On veut</u> : Si X est affine $A = \mathcal{O}_X$ — définition de A-module de type fini

~~[illegible]~~

On veut aussi que si M est un $\mathcal{O}_X(X)$-module de type fini alors $U \mapsto M \otimes \mathcal{O}(U)$ est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini.

= définition de faisceau algébrique cohérent.