29/1/19 (Amiel) — **Diviseurs, faisceaux et fibrés en droite**

X : variété algébriq

K_X : diviseur canoniq

Avant propos

Analytiq	Algébriq
+ Variété analytiq := sous-ensemble d'une variété cplx M définie localem par lieux de zéros de fonct^{s} holomorphes.	+ Variété alg := lieux de zéros sur $\mathbb{CP}^n$ d'un polyn^{ô} homogène

Philosophie : GAGA (1956 : Géo alg et géo analytiq)
→ équivalence entre invariants analytiq et alg.

Ex. (Thm de Chow). Toute sous-variété analytiq de $\mathbb{CP}^n$ est algébriq.

Ex : Toute fonct^{o} ~~holomorphes~~ méromorphes sur $\mathbb{CP}^n$ est une fonction rationelle.

Outils : faisceau structurel des fonct^{o} holomorphes $\mathcal{O}_M(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : \text{holomorphes}\}$ → Analytiq

faisceau ———— régulières. → Alg

Théorème
$$\mathrm{Div}(M) / \sim_{\text{linéaire}} \longleftrightarrow \mathrm{Pic}(M) = \{\text{fibré en droites holomorphes } L \to M\}.$$
(M : var. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$)

Applicat^{o} : $K_X \longleftrightarrow \Omega^n_X$ = n-formes holomophes.

Lemme 1 $\mathrm{Div}(M) = \Gamma(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) = H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$

Def : $\mathcal{O}^*$ = faisc. des fcts holomorphes ne s'annullent pas.

⚠ $\mathcal{M}$ = ———— ~~méromorphes~~ (préfaisc)

$\mathcal{M}(U) = \{ f$ tel que $\forall x \in U, \exists V \ni x$ et g, h holomophes $V \to \mathbb{C}$ tq : $f|_V = \frac{g}{h}\big|_V \}$

$\mathcal{M}^*$ = faisc. des fonct^{s} méromorphes non-identiq^{t} nulles.

Étape 1 : $\Gamma(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathrm{Div}(M)$

- On se donne une sect^{o} globale de $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ (ie: un recouvrem ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ de M et des fcts méromophes $f_\alpha = \frac{g_\alpha}{h_\alpha}\big|_{U_\alpha}$

tels que : $\left.\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right|_{U_{\alpha\beta}} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.

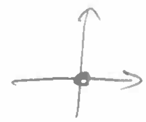
- On prend $V \subset M$ hypersurface irréductible

Rappel : + hypersurface : localem $V \cap U = \{x \in M \cap U : v(x) = 0,\ v \text{ holomorphe}\}$.

+ irréductible : $V = \underbrace{V_{lisse}}_{\uparrow} \cup V_{singulier}$

pts où V est une sous-variété glob

V irréductible $\iff$ V_{lisse} connexe



On prend $U_\alpha \cap V \ni p$, $\text{ord}_v(f_\alpha) = \text{ord}_v(g_\alpha) - \text{ord}_v(h_\alpha)$ où $\text{ord}_v(g_\alpha) = \max_{a \in \mathbb{N}} v^a / g_\alpha$

$\in \mathbb{Z}$ (indépendant de $p \in V$)

$\Rightarrow \text{ord}_V(f_\alpha)$ est bien définie (ordre du zéro/pôle de f le long de V génériquem)

$\text{ord}_V(f_\alpha) = \text{ord}_V(f_\beta)$ car $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*_i$ hol. qui ne s'annulle pas

Donc $\Gamma(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow \text{Div}(M)$ · p131 : for each V, choose α s.t. $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$

$f \longmapsto \sum_{V \text{ irréd.}} \text{ord}_V(f) \cdot V$ (+ conditᵒ de finitude (thm Prép. Weierstrass ?))

Étape 2 $\quad \text{Div}(M) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ $\quad$ (Cartier divisor ?)

$D = \sum a_i V_i$ $\quad$ locally finite

On choisit U_α tq : $U_\alpha \cap V_i = \{x \in U_\alpha : v_\alpha(x) = 0\}$, sur U_α : fonctᵒ méromorphe $\prod v_\alpha^{a_i} = f_\alpha$

On va vérifier $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$

↳ fct qui n'a aucun pôle et aucun zéro.

Lemme 2 : $\text{Pic}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$

Remarque $\quad \text{Div}\, M \to \text{Pic}\, M$ est l'applicatᵒ de la longue suite exacte associé à :

$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0$

$\to H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to$

Dém (lemme 2) ⊛ $\text{Pic}(M) \longrightarrow \check{H}^1(M, \mathcal{O}^*)$

L : fibré en droite holomorphe $\quad \varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ $\quad$ morph. d'ev. $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : L_{U_{\alpha\beta}} \longrightarrow L_{U_{\alpha\beta}}$ donc $\varphi_\alpha^{-1} \varphi_\beta|_z : L|_z \xrightarrow{\sim} L|_z$

$= g_{\alpha\beta}(z) \in \mathbb{C}^*$

$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$

$\begin{cases} g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\alpha} = 1 \\ g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha} = 1 \end{cases} \Rightarrow \{g_{\alpha\beta}\}$ est un 1-cocycle de Čech du faisc. $\mathcal{O}^*$

↳ Si on a d'autre applicat° de transit°: $\varphi'_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha$ où $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$.

$\Rightarrow g'_{\alpha\beta} = \dfrac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow [g'_{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}] + \delta[f_\alpha]$. où f_α est un $\mathcal{O}$-cochaine de Čech.

Lemme 3 : $\mathrm{Div}(M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M)$ est :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(M) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \{(U_\alpha, f_\alpha)\} & \longmapsto & \{(U_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta})\} \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* & & \mathcal{O}^* \end{array}$$

$f_\alpha \longmapsto g_{\alpha\beta} = \dfrac{f_\alpha}{f_\beta}$.

Rappel : $\mathrm{Div}_{lin}(M) = \mathrm{div}(f)$ où f foncto méromorphe globale, $f = \frac{g}{h}$ globalem.

$\mathrm{Div}(M)/_{\sim lin} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Pic}(M)$ existe

$H^0(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{j} H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ $\qquad \mathrm{Im}\, j = \mathrm{Div}_{lin}(M)$

$H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) = \mathrm{Div}(M)$ $\qquad \Rightarrow \psi$ est injectiv.

$H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow$

$H^1(M, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(M)$, $\quad H^1(M, \mathcal{M}^*) \overset{\text{exo}}{=} 0$

$\mathrm{Div}(M)/_{\sim lin} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Pic}(M)$

$\mathrm{Div}(M)/_{\sim lin} \cong H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, $\quad \mathrm{Pic}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*)$

$\mathrm{Im}\,\psi = \{$fibrés en droites admettant secto méromorphe$\}$.

Applicat° (1) Classe de Chern d'un fibré en droites

$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$

$\mathbb{Z}$: faisc. loc. const $= \mathbb{Z}$

$\Rightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow[c_1]{} H^2(M, \mathbb{Z})$

Déf 2) K_X est le diviseur canoniq associé au fibré en droites ℓ_M^n
$\downarrow$
M

$K_X = \mathrm{div}(s)$ où s = n-forme méromorphe.

11/2/19

(Amiel)

Equivalence birationelle et surfaces complexes

But : Classifier les surfaces complexes à <u>equiv birationelle près</u>.

X, Y : variétés ... alg.

Applicat° rationelles :	App birationelle	Morphism rationel	Morphism birationelle
$\varphi : X \dashrightarrow Y$ définie sur un ouvert U maximal de X (plus grand U sur lequel φ défini)	$\varphi : X \dashrightarrow Y$ admettant $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$ appli. rationelle	$\varphi : X \longrightarrow Y$ définie partout	$\varphi : X \longrightarrow Y$ tq $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$

Isom. birationel $\varphi : X \longrightarrow Y$ tq $\varphi^{-1} : Y \longrightarrow X$

- Classificat° des surfaces se fera à <u>appli. birationelle près</u>.
  càd $S \sim S'$ s'il existe $\varphi : S \dashrightarrow S'$ birationelle.

Théorème A1 : (élimination / résolut° des indéterminées)
Si $\varphi : S \dashrightarrow X$ (surface, variété alg) appli rationelle alors $\exists$ des blow ups $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ et un <u>morphisme rationelle</u> $\tilde{\varphi}$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} S_n & & \\ \downarrow \varepsilon_n & \searrow \tilde{\varphi} & \\ \vdots & & \\ \downarrow \varepsilon_1 & & \\ S & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Théorème A2 (Factorisat° des morphismes birationells)
Si $f : S \longrightarrow S'$ <u>morphisme birationelle</u> alors $\exists$ des blow-up $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ et un <u>isomorphism birationel</u> u tels que

$$\begin{array}{ccc} & S_n & \\ \overset{u}{\nearrow} & & \downarrow \varepsilon_n \\ & & \vdots \ \varepsilon_1 \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array}$$

Corollaire Si $f : S \dashrightarrow S'$ appli birationelle alors il existe des blowups $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m'$ et u isom birationel tels que

$$\begin{array}{ccc} S_n & \underset{\sim}{\xrightarrow{u}} & S'_m \\ \varepsilon_n \downarrow & & \downarrow \varepsilon_m' \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_1' \\ S & \overset{f}{\dashrightarrow} & S' \end{array}$$

Déf : Si $\nexists$ S ne possède ~~pas~~ aucune diviseur exceptionnel, on dit S est une surface minimal

Théorème : Il existe des surfaces minimale dans toute classe d'équivl de surfaces à appli biratonelle près

↳ Si on étudie bien les surfaces minimale, on a la classificat°.

↳ 3 types — (1) $\mathbb{CP}^2$
(2) $\mathbb{CP}^1$ au dessus d'une courbe alg..
(3) K_X nef

Dém//

$\boxed{A_1}$ 1^e étape : Équivl entre appli. rationelles et système linéaires.

On se ramène via un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^m$ au cas d'une appli $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$

Rqe : φ est définie partout sauf ~~en~~ nbe fini de points F $\left(\in \text{adh}\begin{pmatrix}\text{zéros}\\ \text{de } \varphi\end{pmatrix} \cap \text{adh}\begin{pmatrix}\text{pôles}\\ \text{de}\\ \varphi\end{pmatrix}\right)$

On note $\varphi : S \setminus F \longrightarrow \mathbb{CP}^m$

Idée : Si on connait les $\varphi^{-1}(H_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{CP}^m$ où $H_\lambda = \{[x_0 : \dots : x_m] : \sum \lambda_i x_i = 0\}$.
On connait de manière unique φ : $\underbrace{\{\lambda \in \mathbb{CP}^m, x \in \varphi^{-1}(H_\lambda)\}}_{\text{permet de retourner } \varphi(x).}$ ⇝

De plus, $F = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{CP}^m} \overline{\varphi^{-1}(H_\lambda)}$ ⇝ on ne peut pas assigner de valeurs à $\varphi(x)$ car $\varphi(x) \in$ tout les hyperplanes de $\mathbb{CP}^m$ (impossible)

Rappel : diviseurs $\sim_{\text{lin}}$ sur diviseurs (défini par $\text{div}(f)$ où $f : S \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$) diviseurs effectifs

Déf : Le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ associé à un div. $D = \sum n_\Gamma \Gamma$ de variété X est déf. par
$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ tels que si } U \cap \Gamma \neq \emptyset : v_\Gamma(f) \geq -n_\Gamma\}$.

Rqe
- $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{CP}^1 : \text{div}(f) + D \geq 0\}$.
$= H^0(\mathcal{O}_X(D))$ esp. vect.
- $\underbrace{P}_{\text{projectivisat°}}(H^0(\mathcal{O}_X(D))) = \{\text{diviseurs effectifs linéairem équivl à } D\}$
$\{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \xmapsto{\sim} \text{div}(\lambda f) + D$

Déf Un système linéaire sur X est un sous-esp projectif de $P(H^0(\mathcal{O}_X(D)))$

Exemple • $X = \mathbb{CP}^n$, $D = \mathbb{CP}^{n-1}$, $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)$

$$P(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1))) = \{H_\lambda, \lambda \in \mathbb{CP}^n\}$$

↳ hyperplanes $\sum \lambda_i x_i = 0$

$\forall y \in \mathbb{CP}^n : \{H_\lambda, y \in H_\lambda\} \subset \{H_\lambda\}$ codim 1 (sous-esp. vect. de dim $n-1$)

$y_1, \dots, y_{n-1}$ en posit° général : $\{H_\lambda, y_i \in H_\lambda, \forall i\} =$ Pinceau d'hyperplanes.

$\left\{\varphi : S \overset{\text{appli rationnelle}}{\dashrightarrow} \mathbb{CP}^m\right\}$ avec image ne contient pas ds un hyperplanes $\longleftrightarrow$ {systèmes linéaires de dim m sur S} sans parties fixes.

$$\varphi \longmapsto \underbrace{\varphi^* P(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^m}(1)))}_{= \{\varphi^{-1}(H_\lambda)\}}$$

$$\mathrm{Div}(S)/\sim \; = \mathrm{Pic}(S) \ni \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^m}(1) \qquad \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^m}(1)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ S & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \mathbb{CP}^m \end{array}$$

$\varphi^* \mathrm{div} f = \mathrm{div}(f \circ \varphi)$ si $f : \mathbb{CP}^m \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$

$\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{CP}^* \longleftarrow P \subset [D]_{\text{eff, lin}}$ ← esp. projectif de dim. m

$x \longmapsto \underbrace{\{D' \in P, x \in D'\}}_{\text{sous-esp de } P \text{ de dim } (m-1)}$

$\longleftrightarrow$ un élément du dual projectif.

Syst. linéaire = sous esp de l'ensemble des diviseurs effectifs lin. equival à un diviseur D fixé.

↳ On prend un base projectif $D_0, \dots, D_m$ de P : $P \longmapsto (f_0 : \dots : f_m)$

$\updownarrow \qquad \updownarrow$

$f_0, \dots, f_m : S \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$

Revenons à $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{CP}^m \longleftrightarrow P = \varphi^*[\mathbb{CP}^{m-1}]_{\text{lin. eff}}$

Rqe : $\underbrace{\text{Points bases de } P}_{\{x \in S, x \in D, \forall D \in P\}} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ points F où φ n'est pas syst. linéaire défini.

↳ on prend un point base p, on éclate en p.

$$\begin{array}{c} \hat{S} \\ \varepsilon \downarrow \\ S \end{array}$$

$\varepsilon^* P =$ syst. linéaire sur $\hat{S}$

E = diviseur except. : $\forall D \in \varepsilon^* P$, $E \subset D$

↳ E est ce qu'on appelle une partie fixe de $\varepsilon^* P$.

On prend $k \geq 1$ tel que $\varepsilon^* P - kE$ n'ait plus E comme partie fixe.

$\varepsilon^* P \subset \{ \sum n_\Gamma \Gamma + \underbrace{k_E}_{\geq 1} E \}$, on choisit $k = \min_{\varepsilon^* P} k_E$

Rqe : $\varepsilon^* P - kE$ n'a plus de parties fixes donc définit une appli rationelle $\varphi_1 : \hat{S} \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$

- $\varphi_1^* [\mathbb{CP}^{m-1}]_{lin.\text{-}eff.}$ vérifie : $\forall D_1 \in \varphi_1^* [\mathbb{CP}^{m-1}]_{lin.\text{-}eff}$
  - (i) $D_1^2 \geq 0$
  - (ii) $D_1^2 = D^2 - k^2$ où $D \in \varphi^* [\mathbb{CP}^m]_{lin.\text{-}eff.}$ $\to m-1$?

$D_1 = \varepsilon^* D - kE$, $D \underset{lin}{\sim} D'$

$D_1^2 = \underbrace{(\varepsilon^* D)^2}_{= D^2} - 2k \underbrace{\varepsilon^* D \cdot E}_{= 0} + \underbrace{k^2 E^2}_{-k^2}$ $D \underset{num}{\sim} D'$ càd $D\Gamma = D' \Gamma \; \forall \Gamma$.

en choisissant représentant lin.-éq. qui évitent p.

$D_1^2 = D^2 - k^2 \geq D^2$

En choisissant D et $D' \in [\;]_{lin}$ qui s'intersectent = fini # pts.

$\Rightarrow \geq 0$ par ≥ 0 des intersecto.

$\Rightarrow$ Thm $\boxed{A_1}$ $\square$ $\leadsto$ le processus s'arrête au bout d'un # fini étapes

Rqe . On peut reprendre preuve sans syst. linéaire et avec juste éq. locales