Calcul symbolique et rigidité en courbure négative

Stéphane Grognet

6 décembre 2002

Université de Nantes, Département de Mathématiques, U. M. R. 6629, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes cedex 03.
grognet@math.univ-nantes.fr

ABSTRACT. - The Radon and Fourier transforms can be generalized to non-symmetric spaces with pinched negative curvature with hypotheses compatible with the universal coverings of compact manifolds. The constructions provide some rigidity for Lyapounoff exponents and differentiable conjugacies of geodesic flows.

RÉSUMÉ. - Les transformées de Radon et de Fourier peuvent être étendues aux espaces non symétriques à courbure négative pincée sous des hypothèses qui englobent les revêtements universels de variétés compactes. Les constructions fournissent quelque rigidité pour les exposants de Lyapounoff et les conjugaisons différentiables de flots géodésiques.

Contents

1 Introduction

En géométrie intégrale on rencontre le problème suivant : connaissant les intégrales d'une fonction sur une ou plusieurs familles de sous-variétés d'une variété différentielle, retrouver la fonction de départ. Les variétés différentielles considérées sont complètes, connexes, simplement connexes, munies d'une structure de variété riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$, et souvent appelées *espaces*.

La transformée de Radon avec sa réciproque consiste à retrouver une fonction scalaire (dans une classe convenable) en intégrant sur des sous-espaces affines d'un espace euclidien ou des sous-variétés caractéristiques (géodésiques, horosphères) d'un espace présentant suffisamment de symétrie. En particulier utiliser les hyperplans affines d'un espace euclidien permet de construire la transformée de Fourier multidimensionnelle à partir de celle sur $\mathbf{R}$ [6, 16, 17].

Sur les surfaces symétriques, Funk a présenté une transformée en géodésiques sur la 2-sphère ronde [2] ; et la transformée de Radon en géodésiques sur le plan hyperbolique est citée dans l'article original de Radon ([6], appendice A). Helgason a décrit une *transformée en horocycles plats* sur les espaces symétriques de type non compact [18]. La symétrie de l'espace ambiant permet d'utiliser des sous-variétés de dimension strictement supérieure à un.

Dans le cas *gauche* ou *hétérogène*, c'est-à-dire si la métrique ne possède aucune symétrie (ou pas suffisamment), l'utilisation des courbes comme sous-variétés d'intégration donne encore des résultats. Retrouver une fonction à valeurs scalaires ou tensorielles d'après sa moyenne sur des géodésiques est possible pour une métrique hétérogène et fait appel aux techniques de tomographie ou de transformée en rayons X [5, 27, 28]. On peut parfois retrouver une métrique à l'intérieur d'une boule sachant les distances entre paires de points du bord [1, 24].

Sur une variété connexe et complète M, simplement connexe, de dimension n, munie d'une métrique riemannienne g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure strictement négative pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$, telle que la dérivée covariante du tenseur de courbure soit uniformément bornée, on construit une transformée de Radon avec son inverse à gauche dans le théorème 4.1. La redondance d'information rend difficile les éventuelles caractérisation de l'image et construction d'un inverse à droite. La construction de la transformée de Radon gauche met en valeur une certaine forme de régularité pour la mesure à l'infini (théorème 3.1).

La transformée de Fourier a été étudiée sur les espaces symétriques [17, 19]. Pour faire une construction semblable dans le cas hétérogène, on suppose que la courbure est négativement 1/4-pincée, (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $k_0 > 0$ et $k_1 > 0$ telles que $k_1 < k_0 < 2k_1$ et que la courbure sectionnelle satisfasse à l'encadrement $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$), et on rajoute l'hypothèse que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable est bornée. La régularité des espaces stables dans le cas compact est abordée dans [21, 14, 15]. Les théorèmes qui suivent s'appliquent entre autres aux revêtements universels de variétés compactes à métrique négativement 1/4-pincée. La section 2 est consacrée aux notations et à certaines constructions utilisées dans la suite. Pour un vecteur unitaire tangent v, l'application *poussée stable* Φ_t^v (définition 7.1) de M dans M consiste à suivre les rayons géodésiques positivement asymptotes à l'orbite de v pendant un temps t. La fonction de Busemann associée à v est notée B_v, le champ de Jacobi stable le long de l'orbite de v et de condition initiale ξ est noté $Y_-(v,t)\xi$.

Théorème 7.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée, *telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Pour tout vecteur unitaire $v \in T^1M$, il existe une unique applica-*

tion E_v continue de M dans $T_{\pi(v)}M$ telle que

$$i) \qquad \forall y \in M \quad \langle E_v(y), v\rangle = B_v(y),$$

$$ii) \qquad \forall y \in M, \forall t \in \mathbf{R} \quad E_v\left(\Phi_t^v(y)\right) = tv + E_v(y),$$

$$iii) \quad \forall y \in H_v(0) \quad E_v(y) = \lim_{t\to+\infty} Y_-(v,t)^{-1} \prod_{\varphi_t v} \left(\exp_{\pi\varphi_t v}\right)^{-1} \Phi_t^v(y).$$

Cette linéarisation est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme (corollaire 7.1) et permet de construire une transformée de Fourier (théorème 10.1) à partir des horosphères centrées en un point donné, et avec la transformée inverse, un symbole pour le gradient (théorème 10.2). La régularité de cette linéarisation provient du fait que les champs de Jacobi à la fois stables et instables sont équivalents le long des orbites positivement asymptotes d'une certaine façon présentée dans la section 5. Les résultats de régularité ont des conséquences sur les objets dynamiques, comme les exposants de Lyapounoff [26].

Théorème 6.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée, *telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Si le vecteur $v \in T^1M$ admet des exposants de Lyapounoff positifs et négatifs sous l'opération du flot géodésique quand le temps tend vers $+\infty$, alors tout élément w de la variété centre-stable de v aussi et ce sont les mêmes. La filtration d'Oseledets associée aux exposants positifs se transporte par une application $\underline{X}(v,w)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété centre-stable de v, la filtration d'Oseledets associée aux exposants négatifs se transporte par une application $X(v,w)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété centre-stable de v. Les décompositions sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété centre-stable de v.*

Sur une surface, des hypothèses moins fortes suffisent (théorème 6.2). Enfin, la linéarisation fait ressortir de la rigidité pour les conjugaisons de flots. Dans le cas des variétés compactes à courbure négativement 1/4-pincée, une conjugaison entre les deux flots est de classe $\mathcal{C}^2$ [12]. Une conjugaison h préserve l'antipodie si $h(-v) = -hv$ pour tout v.

Théorème 9.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie de deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 à courbure négativement 1/4-pincée, telles que pour chacune la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée pour chacune des métriques. L'ensemble des $\mathcal{C}^1$-conjugaisons entre les deux flots géodésiques, qui préservent l'antipodie, peut être injecté dans une variété de dimension $2n^2 - 2n + 1$; une telle conjugaison est déterminée par sa dérivée en vecteur v de T_1^1M donné.*

Ce texte reprend le précédent rapport de recherche en corrigeant certaines erreurs.

2 Notations

Dans toute la suite M désigne une variété complète, connexe, simplement connexe, de dimension n, munie d'une métrique riemannienne g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure strictement négative pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$. Le théoréme de Cartan-Hadamard ([9], p.138) assure que M est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$.

On note ∂M le bord à l'infini de M [20, 23, 25], $\pi : T^1M \to M$ la projection canonique du fibré unitaire tangent, φ_t le flot géodésique, et pour $v \in T^1M$, $v_{+\infty}$ et $v_{-\infty}$ les extrémités à l'infini de la géodésique de condition initiale v, identifiées respectivement avec les variétés centre-stable et centre-instable de v.

La projection canonique de toute algèbre tensorielle de $TM, T^\star M$ sur M est notée π.

Pour $p \in M$ et $v \in T_p^1M$ la projection orthogonale de T_pM sur l'orthogonal de v est notée :

$$\prod_v : T_pM \to v^\perp.$$

Pour $a \in M$ et $b \in (M \cup \partial M) \setminus \{a\}$ on note $v(a,b)$ l'unique vecteur unitaire tangent à M en a qui dirige la géodésique orientée qui va de a à b. Pour $b \in M \setminus \{a\}$ et $w \in T^1M$ on a :

$$v(b,a) = -\varphi_{d(a,b)}v(a,b) = \varphi_{-d(a,b)}(-v(a,b)) \quad \text{et} \quad v(\pi(w), w_{+\infty}) = w.$$

Pour $v \in T^1M$, les variétés respectivement stable, instable, centre-stable et centre-instable de v sont notées $W^S(v), W^U(v), W^{CS}(v), W^{CU}(v)$.

La fonction de Busemann [10] est définie pour a, $b \in M$, $\theta \in \partial M$ par :

$$B_b(\theta, a) = \lim_{t \to +\infty} (t - d(a, \gamma(t)))$$

où γ est le rayon géodésique tel que $\gamma(0) = b$ et $\gamma(+\infty) = \theta$. Pour $v \in T^1M$, $a \in M$, on note $B_v(a) = B_{\pi(v)}(v_{+\infty}, a)$.

Les horosphères sont les projections sur M des variétés stables de T^1M pour le flot géodésique ; ce sont les hypersurfaces de niveau des fonctions de Busemann. Pour $x \in M$, $\theta \in \partial M$ et $p \in \mathbf{R}$, on note $H_x(\theta, p)$ l'horosphère formée des points y de M vérifiant $B_x(\theta, y) = p$. Pour $v \in T^1M$ on note $H_v(p) = H_{\pi v}(v_{+\infty}, p)$.

En un point x de M la mesure de Lebesgue sur la sphère unité euclidienne T_x^1M définit par l'intermédiaire de l'application $\theta \mapsto v(x,\theta)$ une mesure $d\mu_x(\theta)$ sur la sphère à l'infini ∂M, de volume total $\mathbf{V}$ qui ne dépend que de n.

L'espace des géodésiques orientées est identifié au carré de la sphère à l'infini privé de la diagonale : $(\partial M \times \partial M) \setminus \Delta$.

La fonction indicatrice d'une partie P d'un ensemble est notée $\mathbf{1}_P$.

La métrique riemannienne induite par g sur les fibrés tangent, cotangent, tangent unitaire et les algèbres tensorielles construites au-dessus de $TM, T^\star M$ est encore notée g. La dérivation covariante sur ces mêmes espaces est notée D.

2.1 Champs de Jacobi

L'équation des champs de Jacobi est

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + \mathcal{R}_v(t)J(t) = 0$$

avec

$$\mathcal{R}_v(t) = R_{\pi\varphi_t v}\left(\varphi_t v, \cdot\right)\varphi_t v.$$

Suivant Leon Green [11], pour $v \in T^1M$, on note $J(v,t)$ le champ d'endomorphismes de Jacobi le long de l'orbite de v (ou *résolvante*), de type *sinus hyperbolique*, qui vérifie

$$J(v,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{D}{dt}J(v,0) = \mathrm{Id}_{v^\perp}$$

où $\mathrm{Id}_{v^\perp}$ désigne l'identité de l'espace orthogonal à v.

Pour $v \in T^1M$ et $0 < t_1 < t_2$, les théorèmes de comparaison [4] entraînent :

$$e^{k_0(t_1-t_2)}\text{th } k_0t_1 \leq \frac{\text{sh } k_0t_1}{\text{sh } k_0t_2} \leq \left\|J(v,t_1)J(v,t_2)^{-1}\right\| \leq \frac{\text{sh } k_1t_1}{\text{sh } k_1t_2} \leq e^{k_1(t_1-t_2)},$$

$$\left\|\frac{D}{dt}J(v,t_1)J(v,t_2)^{-1}\right\| \leq \frac{k_1\text{ch } k_1t_1}{\text{sh } k_1t_2},$$

$$e^{k_0(t_1-t_2)}\text{th } k_0t_1 \leq \frac{\text{sh } k_0t_1}{\text{sh } k_0t_2} \leq \left\|J(v,-t_1)J(v,-t_2)^{-1}\right\| \leq \frac{\text{sh } k_1t_1}{\text{sh } k_1t_2} \leq e^{k_1(t_1-t_2)}.$$

et

$$\left\|\frac{D}{dt}J(v,-t_1)J(v,-t_2)^{-1}\right\| \leq \frac{k_1\text{ch } k_1t_1}{\text{sh } k_1t_2}, \tag{1}$$

On note $\underline{J}(v,t)$ le champ d'endomorphismes de Jacobi le long de l'orbite de v, de type *cosinus hyperbolique*, qui vérifie

$$\underline{J}(v,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{D}{dt}\underline{J}(v,0) = \mathrm{Id}_{v^\perp}.$$

Pour $v \in T^1M$ on note $Y_-(v,t)$ et $Y_+(v,t)$ les (résolvantes de) champs de Jacobi respectivement stable et instable le long de l'orbite de v, qui vérifient

$$Y_-(v,0) = Y_+(v,0) = \mathrm{Id}_{v^\perp}, \quad Y_-(v,+\infty) = 0, \quad Y_+(v,-\infty) = 0.$$

Pour $x, y \in M$ et $\theta \in \partial M$, on note

$$Y_-(x,\theta,y) = Y_-(\varphi_{B_y(\theta,x)}v(y,\theta), B_x(\theta,y)). \tag{2}$$

En utilisant la relation de cocycle

$$Y_+(v,t+s) = Y_+(\varphi_t v,s)\cdot Y_+(v,t), \quad Y_-(v,t+s) = Y_-(\varphi_s v,t)Y_-(v,s) \tag{3}$$

on note les solutions respectivement stable et instable

$$S(\varphi_t v) = \frac{DY_-(v,t)}{dt} Y_-(v,t)^{-1} \quad \text{et} \quad U(\varphi_t v) = \frac{DY_+(v,t)}{dt} Y_+(v,t)^{-1} \tag{4}$$

des équations de Ricatti :

$$\frac{D}{dt} V + V^2 + R(\varphi_t v, .)\varphi_t v = 0 \tag{5}$$

ou encore

$$\frac{D}{dt} V + V^2 + \mathcal{R}_v(t) = 0$$

avec

$$\mathcal{R}_v(t) = R_{\pi\varphi_t v}(\varphi_t v, \cdot)\, \varphi_t v.$$

Les champs $Y_-(v,t)$, $Y_+(v,t)$ satisfont l'encadrement exponentiel :

$$e^{-k_0 t}\ \|\xi\| \leq \|Y_-(v,t)\xi\| \leq e^{-k_1 t}\ \|\xi\| \quad \forall t \geq 0$$

$$e^{k_0 t}\ \|\xi\| \leq \|Y_+(v,t)\xi\| \leq e^{k_1 t}\ \|\xi\| \quad \forall t \leq 0. \tag{6}$$

Étant donnés deux vecteurs tangents unitaires v et w, leur produit local est noté $[v,w]$ et la quantité $\sigma(v,w)$ est l'unique t tel que $[v,w] \in \varphi_t W^S(w)$ [13].

2.2 Structure symplectique

Dans l'espace tangent TT^1M au fibré tangent unitaire, la variation de type sinus hyperbolique induit dans l'orthogonal à la direction du flot le champ

$$\mathcal{J}(v,t)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \left(J(v,t)\ \eta\ ,\ \frac{D}{dt}J(v,t)\ \eta\right).$$

De la même manière les champs relevés

$$\underline{\mathcal{J}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \left(\underline{J}(v,t)\ \xi\ ,\ \frac{D}{dt}\underline{J}(v,t)\ \xi\right),$$

$$\mathcal{Y}_-\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \left(Y_-(v,t)(U-S)^{-1}(v)\,(-\eta + U(v)\xi)\ ,\ \frac{DY_-}{dt}(v,t)(U-S)^{-1}(v)\,(-\eta + U(v)\xi)\right),$$

$$\mathcal{Y}_+\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \left(Y_+(v,t)(U-S)^{-1}(v)\,(\eta - S(v)\xi)\ ,\ \frac{DY_+}{dt}(v,t)(U-S)^{-1}(v)\,(\eta - S(v)\xi)\right)$$

sont associés respectivement aux champs de Jacobi

$$\underline{J}, \quad Y_-, \quad Y_+.$$

La dérivée du flot géodésique s'exprime dans l'orthogonal à la direction du flot :

$$d_v\varphi_t = \mathcal{J}(v,t) + \underline{\mathcal{J}}(v,t) = \mathcal{Y}_-(v,t) + \mathcal{Y}_+(v,t). \tag{7}$$

Pour tous $v \in T^1M$, $t \in \mathbf{R}$, $\xi \in v^\perp$ on a les relations de symétrie :

$$U(-v) = -S(v), \quad S(-v) = -U(v),$$

et

$$\mathcal{J}(-v,t) = -\mathcal{J}(v,-t) \quad \underline{\mathcal{J}}(-v,t) = \underline{\mathcal{J}}(v,-t),$$
$$\mathcal{Y}_+(-v,t)\begin{pmatrix}\xi \\ U(-v)\xi\end{pmatrix} = \mathcal{Y}_-(v,-t)\begin{pmatrix}\xi \\ S(v)\xi\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{Y}_-(-v,t)\begin{pmatrix}\xi \\ S(-v)\xi\end{pmatrix} = \mathcal{Y}_+(v,-t)\begin{pmatrix}\xi \\ U(v)\xi\end{pmatrix}.$$

Pour $v \in T^1M$ la forme symplectique naturelle sur $v^\perp \times v^\perp$

$$\omega\left(\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \eta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_2 \\ \eta_2\end{pmatrix}\right) = \langle \xi_1, \eta_2\rangle - \langle \xi_2, \eta_1\rangle$$

est invariante par le flot géodésique et vérifie pour tout réel t

$$\omega\left(\begin{pmatrix}\xi_1 \\ S(v)\xi_1\end{pmatrix}{}^tY_-(v,t), Y_+(v,t)\begin{pmatrix}\xi_2 \\ U(v)\xi_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= {}^t\xi_1(U-S)(v)\xi_2 = {}^t\xi_1{}^tY_-(v,t)(U-S)(\varphi_t v)Y_+(v,t)\xi_2.$$

Il en résulte les relations valables pour tous $v \in T^1M$ et $t \in \mathbf{R}$:

$$Y_+(v,t) = (U-S)^{-1}(\varphi_t v){}^tY_-^{-1}(v,t)(U-S)(v), \tag{8}$$

et en utilisant la formule (7) :

$$J(v,t) = (U-S)^{-1}(\varphi_t v){}^tY_-^{-1}(v,t) - Y_-(v,t)(U-S)^{-1}(v)$$
$$= Y_+(v,t)(U-S)^{-1}(v) - (U-S)^{-1}(\varphi_t v){}^tY_+^{-1}(v,t). \tag{9}$$

2.3 Variation dans un variété stable

Soit M une variété différentielle connexe sans bord, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$, à courbure strictement négative pincée : $-k_0^2 \le K \le -k_1^2 < 0$. Soient $v \in T^1M$, et $\theta = v_{+\infty} \in \partial M$. Soit $c(q)$ une courbe de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ dans $H_v(0)$, parcourue à vitesse un, telle que $c(0) = \pi(v)$. On pose $v_q = v(c(q), \theta)$. Soit $\tau(q,0)$ le transport parallèle le long de $c(q)$ de $T_{\pi(v)}M$ dans $T_{c(q)}M$. Soit $\psi(q,0)$ le composé de $\tau(q,0)$ avec la rotation $\rho(q,0)$ dans le plan $((\tau(q,0)v, v_q)$ qui amène $\tau(q,0)v$ sur v_q. L'application linéaire $\psi(q,0)$ se restreint à un isomorphisme de $v^\perp$ dans $v_q^\perp$, et c'est une isométrie. On a $\psi(0,0) = \mathrm{Id}_{v^\perp}$. La famille de courbes $c_t(q) = \pi\varphi_t v_q$ vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial q}c_t(q) = Y_-(v_q,t)\frac{dc}{dq}(q)$$

(avec $c_0 = c$) donc

$$\left\| \frac{\partial c_t}{\partial q}(q) \right\| \leq e^{-k_1 t} \left\| \frac{dc}{dq}(q) \right\| = e^{-k_1 t}. \tag{10}$$

Les champs de dérivation par rapport à t et q sont notés

$$T = \frac{\partial}{\partial t} c_t(q), \quad Q = \frac{\partial}{\partial q} c_t(q).$$

(Le deuxième est un champ de Jacobi stable.) Soit $\tau(q,t)$ le transport parallèle le long de la courbe $c_t(q)$, appliquant $T_{\pi(v_t)}M$ sur $T_{c_t(q)}M$. En le composant avec la rotation $\rho(q,t)$ dans le plan $((\tau(q,t)\varphi_t v, \varphi_t v_q)$ qui amène $\tau(q,t)\varphi_t v$ sur $\varphi_t v_q$, on obtient une isométrie $\psi(q,t)$ qui envoie $\varphi_t v^\perp$ dans $\varphi_t v_q^\perp$, avec la condition initiale $\psi(0,t) = \mathrm{Id}_{\varphi_t v^\perp}$. La majoration (10) entraîne l'existence de trois constantes $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'''$ indépendantes de v et de c telles que pour tout t positif et tout q dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ on ait :

$$d\left(\tau(q,t)\varphi_t v, \varphi_t v_q\right) \leq \mathcal{C}'' e^{-k_1 t}|q|, \quad \|\tau(q,t)\| \leq 1 + \mathcal{C}''' e^{-k_1 t}|q|,$$
$$\|\psi(q,t)\| \leq 1 + \mathcal{C}' e^{-k_1 t}|q|. \tag{11}$$

On peut aussi majorer la dérivée de ψ par rapport à t.

Lemme 2.1 *Avec les notations précédentes, il existe une constante $\mathcal{C}$ indépendante de v et de c telle que pour tout t positif et tout q dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ on ait :*

$$\left\| \frac{D}{dt}\psi(q,t) \right\| \leq \mathcal{C} e^{-k_1 t}|q|, \qquad \left\| \frac{D}{dq}\psi(q,t) \right\| \leq \mathcal{C} e^{-k_1 t}. \tag{12}$$

Démonstration : Pour un vecteur ξ de $T_{\pi(v_t)}M$, le champ de vecteurs $\tau(q,t)\xi$ est la solution $X(q,t)$ de :

$$\begin{cases} \frac{D}{dq} X(q,t) &= 0 \\ X(0,t) &= \xi. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs $\frac{D}{dt}\tau(q,t)\xi$ est la solution $\mathcal{X}(q,t)$ de :

$$\begin{cases} \frac{D}{dq} \mathcal{X}(q,t) &= R(T,Q)\tau(q,t)\xi \\ \mathcal{X}(0,t) &= 0 \end{cases}$$

puisque $\tau(0,t)$ est l'identité de $T_{\pi\varphi_t v}M$. On a donc

$$\|\mathcal{X}(q,t)\| \leq \int_{r=0}^{q} k_0^2 \|Q(r,t)\| \cdot \|\tau(r,t)\| \cdot \|\xi\| \, dr$$

ce qui, avec les inéquations (10) et (11), donne l'existence d'une constante $\mathcal{C}^{\iota\nu}$ telle que

$$\left\| \frac{D}{dt}\tau(q,t) \right\| \leq \mathcal{C}^{\iota\nu} e^{-k_1 t}|q| \left\| \frac{dc}{dq} \right\|_\infty.$$

Il en découle l'existence d'une constante $\mathcal{C}^\nu$ telle que

$$\left\| \frac{D}{dt}\rho(q,t) \right\| \leq \mathcal{C}^\nu e^{-k_1 t}|q| \left\| \frac{dc}{dq} \right\|_\infty ,$$

d'où le premier résultat par composition. On a

$$\left\| \frac{D}{dq}\psi(q,t) \right\| = \left\| \frac{D}{dq}\rho(q,t) \right\| \leq \left\| \frac{D}{dq}\varphi_t v_q \right\| = \left\| \frac{D}{dt}Q \right\| \leq k_0 e^{-k_1 t},$$

ce qui donne la deuxième majoration. ◇

Le champ d'isométries $\psi(q,t)$ est proche de l'identité au sens suivant.

Lemme 2.2 *Soit $A(v)$ un champ d'endomorphismes de $v^\perp$ de clase $\mathcal{C}^1$ sur T^1M. Avec les notations précédentes, il existe une constante $\underline{\mathcal{C}}$ indépendante de v et de c telle que pour tout t dans un segment I de $\mathbf{R}^+$ et tout q dans $[-\varepsilon,\varepsilon]$ on ait :*

$$\begin{aligned} &\|A(\varphi_t v_q)\psi(q,t) - \psi(q,t)A(\varphi_t v)\| \\ &\leq \underline{\mathcal{C}} e^{-k_1 t}|q| \sup\left\{ (\|A\| + \|DA\|)(\varphi_t v_q) \middle| q \in [-\varepsilon,\varepsilon], t \in I \right\} \end{aligned}$$

Démonstration : Il existe un système de coordonnées locales tel que la majoration (10) implique qu'on puisse y écrire de manière uniforme :

$$A(\varphi_t v_q) = A(\varphi_t v) + O\left(e^{-k_1 t}|q| \sup_{q\in[-\varepsilon,\varepsilon],\ t\in I} \|DA\|(\varphi_t v_q) \right),$$

et que la démonstration du lemme 2.1 implique qu'on puisse y écrire de manière uniforme :

$$\psi(q,t) = \mathrm{Id} + O\left(|q| e^{-k_1 t} \right).$$

◇

L'influence du choix de la courbe est limitée.

Lemme 2.3 *Soit $\underline{c}(q)$ une courbe ayant les mêmes contraintes que $c(q)$. L'isométrie associée est notée $\underline{\psi}(q,t)$. S'il existe deux éléments q_0 et q_1 de $[-\varepsilon,\varepsilon]$ tels que $c(q_0) = \underline{c}(q_1)$, alors on a*

$$\left\| \psi(q_0,t) - \underline{\psi}(q_1,t) \right\| \leq \mathcal{C}\left(|q_0| + |q_1| \right) e^{-k_1 t}.$$

Démonstration : Cela résulte de la condition $\psi(0,t) = \underline{\psi}(0,t)$ et de la majoration (12). ◇

3 Mesure à l'infini

3.1 Rappels sur la mesure à l'infini

La mesure à l'infini utilisée ici est celle de Liouville ([8], § 5.2).

Définition 3.1 *Soient a, $b \in M$ et $\theta \in \partial M$. Soit γ la géodésique de condition initiale $v(a,\theta)$: $\gamma(t) = \pi\varphi_t v(a,\theta)$. Le quotient*

$$\frac{\det J(v(a,\theta),t)}{\det J(v(b,\gamma(t)),d(b,\gamma(t)))}$$

converge quand t tend vers $+\infty$ vers une valeur réelle strictement positive

$$\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)$$

appelée densité de la mesure à l'infini.

La transformation classique ([11, 7], [3] p.3) fournit pour tous $v \in T^1M$, $t \in \mathbf{R}^+$ les relations

$$J(v,s) = Y_+(v,s) \cdot \int_0^s Y_+^{-1}(v,t) \cdot {}^tY_+^{-1}(v,t)\ dt \tag{13}$$

et

$$Y_-(v,s) = Y_+(v,s) \cdot \left(\int_s^{+\infty} Y_+^{-1}(v,t)^tY_+^{-1}(v,t)\ dt\right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} Y_+^{-1}(v,t)^tY_+^{-1}(v,t)\ dt\right)^{-1}.$$

De la seconde on déduit la formule

$$U(v) - S(v) = \left(\int_0^{+\infty} Y_+^{-1}(v,t) \cdot {}^tY_+^{-1}(v,t)\ dt\right)^{-1}. \tag{14}$$

Sachant $B_b(\theta,a) + B_a(\theta,b) = 0$, les formules (13) et (14) avec la relation de cocycle (3) permettent d'établir :

Proposition 3.1 *La densité de la mesure à l'infini possède les propriétés suivantes : Pour tous $a, b \in M$, $\theta \in M$, on a :*

$$\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\det J(v(a,\theta),t)}{\det J(v(b,\theta),t+B_b(\theta,a))}, \tag{15}$$

$$\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta) = \frac{\det(U-S)(v(b,\theta))}{\det(U-S)(v(a,\theta))} \lim_{t\to+\infty} \frac{\det Y_+(v(a,\theta),t)}{\det Y_+(v(b,\theta),t+B_b(\theta,a))}, \tag{16}$$

$$\text{et} \qquad \frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta) \cdot \frac{d\mu_a}{d\mu_b}(\theta) = 1. \tag{17}$$

L'application

$$(a,b,\theta) \mapsto \frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)$$

est continue.

La mesure des rayons géodésiques issus d'un point se transporte à l'infini :

Définition 3.2 *La mesure à l'infini $d\mu_x(\theta)$ en un point x de M, donnée par l'identification $\theta \mapsto v(x,\theta)$ avec la mesure de volume sur la sphère unité tangente en x, définit une classe d'équivalence de mesures sur la sphère à l'infini (indépendante du choix du point x), avec pour dérivées de Radon les densités définies précédemment.*

La mesure de volume sur le fibré unitaire tangent à M est appelée mesure de Liouville et est notée λ. On a pour tout $v \in T^1M$

$$d\lambda(v) = d\mathrm{vol}_{T^1M}(v) = d\mathrm{vol}_M(\pi v)\ d\mu_{\pi v}(v_{+\infty}).$$

3.2 Régularité de la mesure à l'infini

Dans toute la section la variété M est complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure strictement négative pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$ et telle que la dérivée covariante du tenseur de courbure soit uniformément bornée : $\|DR\|_\infty < \infty$.

La régularité que l'on se propose de démontrer permet de construire une transformée de Radon sur M.

Théorème 3.1 *Pour $a, b \in M$, $\theta \in \partial M$, l'application $\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)$ est continue en (a,b,θ), elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, b, et les dérivées partielles par rapport à a et b sont continues en (a,b,θ) .*

Démonstration : La formule (17) entraîne la continue dérivabilité par rapport à a quand elle est acquise pour b. Celle-ci découle des deux résultats suivants. $\diamond$

Proposition 3.2 *Pour $a, b \in M$, $\theta \in \partial M$, l'application $\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)$ admet une dérivée partielle en b dans la direction $v(b,\theta)$, continue par rapport à a, b et θ. Sa dérivée logarithmique vaut*

$$-\mathrm{tr}\ S(v(b,\theta)).$$

Proposition 3.3 *Pour $a, b \in M$, $\theta \in \partial M$, l'application $\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)$ admet des dérivées partielles en b dans toutes les directions orthogonales à $v(b,\theta)$, elles sont continues par rapport à a, b, θ et les dérivées logarithmiques valent :*

$$\frac{\partial}{\partial q} \ln \det J(v(b_q,\theta),1) + \int_{t=1}^{+\infty} f_\infty(t)\ dt$$

où b_q est une variation de b dans l'horosphère centrée en θ passant par b, et où, avec $T(t) = \varphi_t v(b_q,\theta)$, et avec $\tilde{Q} = Y_-(v(b_q,\theta),t)db_q/dq$, la fonction f_∞ est la trace *de l'endomorphisme suivant de $T(t)^\perp$:*

$$\int_{\tau=0}^{t} {}^tJ(t)^{-1} \left[-{}^tJ(\tau)\left(D_{\tilde{Q}}R(T,.)T + R(S(T)\tilde{Q},.)T + R(T,.)S(T)\tilde{Q}\right)(\tau)J(\tau)\right.$$

$$+\left({}^tJR(T,\tilde{Q})\frac{DJ}{dt}\right)(\tau)\Bigg]\,J(t)^{-1}\;d\tau.$$

Remarque 3.1 La démonstration prouve de plus que la valeur de la dérivée orthogonale

$$\frac{\partial}{\partial q}\ln\det J(v(b_q,\theta),\alpha)+\int_{t=\alpha}^{+\infty} f_\infty(t)\;dt$$

ne dépend pas du choix de $\alpha>0$. Comme $J(v,t)=t\mathrm{Id}_{v^\perp}+O(t^3)$ quand t tend vers zéro, uniformément en v, on a : $\ln\det J(v,t)=(n-1)\ln t+\ln(1+O(t^2))$ quand t tend vers zéro, uniformément en v. La valeur de la dérivée orthogonale vaut donc aussi

$$\int_{t=0}^{+\infty} f_\infty(t)\;dt=\lim_{t\to+\infty}\frac{\partial}{\partial q}\ln\det J(v(b_q,\theta),t)$$

avec une intégrale de f_∞ convergente en zéro.

3.2.1 Régularité tangentielle : démonstration de la proposition 3.2

Soient : $a,\ b\in M,\ \theta\in\partial M,\ \gamma$ la géodésique $\gamma(s)=\pi\varphi_s v(b,\theta)$. D'après la relation

$$Y_+(v(b,\theta),t)=Y_+(\varphi_s v(b,\theta),t-s)\cdot Y_+(v(b,\theta),s),$$

et grâce à la formule (16) on a :

$$\frac{d\mu_{\gamma(s)}}{d\mu_a}(\theta)\left(\frac{d\mu_b}{d\mu_a}(\theta)\right)^{-1}=\frac{\det\left[U(v(\varphi sb,\theta))-S(\varphi sv(b,\theta))\right]}{\det\left[U(v(b,\theta))-S(v(b,\theta))\right]}\det Y_+(v(b,\theta),s).$$

La dérivée logarithmique de l'application en question vaut :

$$\frac{d}{ds}\bigg]_{s=0}\ln\frac{d\mu_{\gamma(s)}}{d\mu_a}(\theta)=\mathrm{tr}\;U(v(b,\theta))+\mathrm{tr}\;\left[(U'-S')(U-S)^{-1}\right](v(b,\theta)).$$

L'équation de Ricatti (5) entraîne :

$$\frac{d}{ds}\bigg]_{s=0}\ln\frac{d\mu_{\gamma(s)}}{d\mu_a}(\theta)=\mathrm{tr}\;U(v(b,\theta))+\mathrm{tr}\;\left[(S^2-U^2)(U-S)^{-1}\right](v(b,\theta)).$$

Or l'identité

$$(U+S)(U-S)+(U-S)(U+S)=2(U^2-S^2)$$

entraîne

$$\frac{d}{ds}\bigg]_{s=0}\ln\frac{d\mu_{\gamma(s)}}{d\mu_a}(\theta)=\mathrm{tr}\;U-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\;\left(\left[(U+S)(U-S)+(U-S)(U+S)\right](U-S)^{-1}\right)$$

$$=\mathrm{tr}\;U-\mathrm{tr}\;(U+S)=-\mathrm{tr}\;S(v(b,\theta)).$$

Les applications $(a,\theta)\mapsto v(a,\theta)$ et $v\mapsto S(v)$ sont continues ; la proposition est démontrée.

3.2.2 Régularité orthogonale : démonstration de la proposition 3.3

On suit la méthode utilisée en dimension deux par Eberhard Hopf [20]. Soient :

i) a, $b \in M$, $\theta \in \partial M$,

ii) c une courbe $q \mapsto c(q)$ paramétrée à vitesse un, à valeurs dans $H_b(\theta, 0)$ et passant par b en $q = 0$; la courbe c est définie sur l'intervalle d'intérieur non vide $[-\varepsilon, \varepsilon]$,

iii) $v = v(a, \theta)$,

iv) $w(q,p) = v(c(q), \pi\varphi_p v)$,

v) $l(q,p) = d(c(q), \pi\varphi_p v)$,

vi) $\gamma_{q,p}$ la géodésique telle que $\gamma_{q,p}(0) = c(q)$ et $\gamma_{q,p}(l(q,p)) = \pi\varphi_p v$, c'est-à-dire $\gamma q, p(t) = \pi\varphi_t w(q,p)$.

Pour obtenir la proposition 3.3 il suffit de démontrer la convergence, quand p tend vers $+\infty$, de la dérivée par rapport à q de l'application f :

$$f(q,p) = \frac{\det J(w(q,p), l(q,p))}{\det J(v,p)},$$

vers une application continue par rapport à $q \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\theta \in \partial M$, et a, b appartenant à deux compacts quelconques de M. (Dans la suite de cette section, l'uniformité des convergences est toujours prise tacitement pour ces mêmes variables dans ces mêmes ensembles.) En effet, d'après la définition 3.1 on a

$$\lim_{p \to +\infty} f(q,p) = \frac{d\mu_a}{d\mu_{c(q)}}(\theta).$$

On note $Q = \partial_q$, $P = \partial_p$, $T = \partial_t$, les champs des dérivées partielles de $\gamma_{q,p}(t)$. On note le champ d'endomorphismes $\mathcal{R} = R(T, .)T$. Tous les champs d'endomorphismes s'entendent restreints à $T^\perp$. On a pour tous p, q

$$Q(q, p, l(q,p)) = 0.$$

Soit L la solution de Ricatti de type *cotangente hyperbolique* associée à J :

$$L(w(q,p), t) = \frac{DJ}{dt}(w(q,p), t) \cdot J(w(q,p), t)^{-1}.$$

Soit

$$M = \frac{DL}{dq}.$$

On a :

$$\frac{DL}{dt}+L^2+\mathcal{R}=0,\quad L(w(q,p),t)=\frac{1}{t}\mathrm{Id}_{T^\perp}+O(t)\ [t\to 0,\ \text{uniformément}],$$

donc

$$M(q,p,t)\to 0\quad [t\to 0] \tag{18}$$

uniformément par rapport à a, b, q, p, θ.

Pour des réels t,α tels que $t\alpha>0$ et $v\in T^1M$ on a

$$\frac{\det J(v,t)}{\det J(v,\alpha)}=\exp\int_\alpha^t \mathrm{tr}\ L(v,\tau)\ d\tau.$$

Si l'application $q\mapsto v(q)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\frac{\partial \det J(v(q),t)}{\partial q}=\frac{\det J(v(q),t)}{\det J(v(q),\alpha)}\frac{\partial \det J(v(q),\alpha)}{\partial q}+\det J(v(q),t)\int_\alpha^t\frac{\partial \mathrm{tr}\ L(v,\tau)}{\partial q}d\tau.$$

Donc pour $\alpha=1$ et $p>0$ on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial q}f(q,p)=\frac{(\mathrm{tr}\ L(w(q,p),l(q,p)))\det J(w(q,p),l(q,p))}{\det J(v,p)}\frac{\partial l}{\partial q}(q,p)$$

$$+\frac{\det J(w(q,p),l(q,p))}{\det J(v,p)\det J(w(q,p),1)}\frac{\partial}{\partial q}\det J(w(q,p),1)$$

$$+\frac{\det J(w(q,p),l(q,p))}{\det J(v,p)}\int_1^{l(q,p)}\mathrm{tr}\ M(q,p,\tau)\ d\tau,$$

d'où la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{f(q,p)}\frac{\partial}{\partial q}f(q,p)=\frac{\partial l}{\partial q}(q,p)\cdot \mathrm{tr}\ L(w(q,p),l(q,p))$$

$$+\frac{\partial}{\partial q}\ln\det J(w(q,p),1)+\int_1^{l(q,p)}\mathrm{tr}\ M(q,p,\tau)\ d\tau. \tag{19}$$

On a

$$\frac{\partial l}{\partial q}(q,p)=-\left\langle w(q,p),\frac{dc}{dq}(q)\right\rangle, \tag{20}$$

ce qui converge uniformément vers

$$-\left\langle v(c(q),\theta),\frac{dc}{dq}(q)\right\rangle=0$$

quand p tend vers $+\infty$. On sait [4] que la valeur

$$\mathrm{tr}\ L(w(q,p), l(q,p))$$

est uniformément bornée par $k_0 \coth k_0$ quand $l(q,p) \geq 1$. *Donc le premier terme du second membre de l'égalité (19) converge uniformément vers* 0. L'application $v \mapsto \ln\det J(v,1)$ est lisse. Le champ $x \mapsto v(x,\theta)$ est lisse comme les variétés centre-stables ; on note $D^x v(x,\theta)$ sa dérivée covariante. L'application $\frac{D}{dq} w(q,p)$ converge uniformément vers

$$D^x \frac{dc}{dq} v(c(q),\theta).$$

Par suite le deuxième terme du second membre de l'égalité (19) converge uniformément vers une application continue.

On a

$$D_T M = D_T DQL = D_Q D_T L - R(T,Q)L$$

d'après $[Q,T] = 0$. Donc

$$D_T M = D_Q(-L^2 - \mathcal{R}) - R(T,Q)L,$$

c'est-à dire

$$\frac{D}{dt} M = -ML - LM - \frac{D}{dq}\mathcal{R} - R(T,Q)L. \tag{21}$$

La matrice L est symétrique [7], et avec l'ordre des formes quadratiques, satisfait pour $t > 0$ à l'encadrement

$$k_1 \coth k_1 t \cdot \mathrm{Id}_{T^\perp} \leq L(q,p,t) \leq k_0 \coth k_0 t \cdot \mathrm{Id}_{T^\perp}.$$

Sachant que ${}^t J^{-1}$ et J^{-1} sont respectivement les uniques solutions F et G des équations

$$\frac{D}{dt} F = -LF \quad \text{et} \quad \frac{D}{dt} G = -GL$$

vérifiant

$$F(t) = \frac{1}{t}\mathrm{Id}_{T^\perp} + o(1) \quad \text{et} \quad G(t) = \frac{1}{t}\mathrm{Id}_{T^\perp} + o(1) \quad [t \to 0], \tag{22}$$

on pose

$$N = {}^t JMJ\ ; \quad \text{on a} \quad M = {}^t J^{-1} N J^{-1} = FNG. \tag{23}$$

Il vient

$$\frac{D}{dt} M = -ML - LM + F \cdot \frac{D}{dt} N \cdot G,$$

et d'après (21)

$$\frac{D}{dt}N = -{}^tJ\left(\frac{D}{dq}\mathcal{R} + R(T,Q)L\right)J = -{}^tJ\frac{D}{dq}\mathcal{R}\cdot J - {}^tJR(T,Q)\frac{D}{dt}J.$$

D'après les conditions (18) et (23), on a

$$N(t) = o(t^2) \quad [t \to 0],$$

ce qui donne l'expression

$$N(t) = \int_0^t \left(-{}^tJ\frac{D}{dq}\mathcal{R}\cdot J - {}^tJR(T,Q)\frac{D}{dt}J\right)\ d\tau. \tag{24}$$

On a

$$\frac{D}{dq}\mathcal{R} = DQR(T,.)T + R(\frac{D}{dt}Q,.)T + R(T,.)\frac{D}{dt}Q. \tag{25}$$

Le dernier terme de l'égalité (19) est l'intégrale sur $[1,+\infty[$ de l'application

$$h_p(t) = \mathbf{1}_{[1,l(q,p)]}(t)\mathrm{tr}\ M(t).$$

Étant donnée la projection orthogonale Π sur l'orthogonal de T (elle commute avec D_T ; on a $\Pi dc/dq = dc/dq$) ; pour tous p, t, q, on a les relations

$$\|Q(q,p,0)\| = 1, \quad \langle Q(q,p,t),T\rangle = -\frac{\partial l}{\partial q}(q,p), \quad \Pi Q(q,p,l(q,p)) = 0. \tag{26}$$

Les champs Q et $\Pi Q(q,p,t)$ convergent tous les deux quand p tend vers l'infini vers le champ de vecteurs

$$\tilde{Q} = Y_-((v(c(q),\theta),t)\cdot\frac{dc}{dq}.$$

D'après les expressions (23) et (24), quand p tend vers l'infini, l'application h_p converge simplement vers

$$h_\infty(t) = \mathrm{tr}\ \int_0^t {}^tJ(t)^{-1}\left[-{}^tJ\left(D\tilde{Q}R(T,.)T + R\left(\frac{D\tilde{Q}}{dt},.\right)T + R(T,.)\frac{D\tilde{Q}}{dt}\right)J\right.$$

$$\left. +{}^tJR(T,\tilde{Q})\frac{DJ}{dt}\right](\tau)J(t)^{-1}\ d\tau.$$

D'après le théorème de Lebesgue de convergence dominée ([22] p.44), il suffit de démontrer qu'il existe une constante C indépendante de q, p, θ et t telle que

$$\sup_{p\in[1,+\infty]} |h_p(t)| \le Ce^{-k_1t} \tag{27}$$

pour que le dernier terme de l'égalité (19) converge vers une application continue.

D'après les conditions (26) et les théorèmes de comparaison des champs de Jacobi [4], il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que de k_1 et k_0 telle que

$$\forall t \in [0, l(q,p)] \quad \left\| \frac{D}{dt} \Pi Q(q,p,t) \right\| \leq C_1 e^{-k_1 t} \quad \text{et} \quad \|\Pi Q(q,p,t)\| \leq e^{-k_1 t}.$$

D'autre part il existe une constante $C_2 > 0$ qui ne dépend que de k_1, k_0 et $B_a(\theta, b)$ telle que

$$\|w(q,p) - v(c(q), \theta)\| \leq C_2 e^{-k_1 p}.$$

D'après l'égalité (20) on a

$$\left| \frac{\partial l}{\partial q}(q,p) \right| \leq C_2 e^{-k_1 p}.$$

En résumé, pour $t \in [0, l(q,p)]$ on a :

$$\left\| \frac{D}{dt} Q(q,p,t) \right\| \leq C_1 e^{-k_1 t} \quad \text{et} \quad \|Q(q,p,t)\| \leq e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_1 p},$$

donc il existe une constante $C_3 > 0$ qui ne dépend que de k_1, k_0 et $B_a(\theta, b)$ telle que pour $t \in [0, l(q,p)]$ on ait :

$$\left\| \frac{D}{dt} Q(q,p,t) \right\| \leq C_3 e^{-k_1 t} \quad \text{et} \quad \|Q(q,p,t)\| \leq C_3 e^{-k_1 t}.$$

Ces majorations sont encore vraies en remplaçant Q par $\tilde{Q}$ et ce pour $t \in \mathbf{R}^+$. Par suite, il existe une constante $C_4 > 0$ qui ne dépend que de k_1, k_0 et $B_a(\theta, b)$ telle qu'avec les normes linéaires naturelles pour les endomorphismes de $T^\perp$:

$$\forall q, \forall p > 0, \forall t \in [0, l(q,p)] \quad \|R(T,Q)\|_{lin} \leq C_4 e^{-k_1 t}.$$

et en utilisant (25), il existe une constante $C_5 > 0$ qui ne dépend que de k_1, k_0, $B_a(\theta, b)$ et $\|DR\|$, telle que

$$\forall q, \forall p > 0, \forall t \in [0, l(q,p)] \quad \left\| \frac{D}{dq} \mathcal{R} \right\|_{lin} \leq C_5 e^{-k_1 t}.$$

Pour $t \geq 1$ et $0 \leq \tau \leq t$ les théorèmes de comparaison des champs de Jacobi [4] entraînent l'existence d'une constante C_6 qui ne dépend que de k_1, telle que

$$\left\| J(\tau) J^{-1}(t) \right\| \leq e^{k_1(\tau - t)} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{DJ}{dt}(\tau) J^{-1}(t) \right\| \leq C_6 e^{k_1(\tau - t)}\,;$$

donc pour $t \geq 1$

$$\|M(t)\|_{lin} \leq \int_{\tau=0}^{t} e^{k_1(\tau - t)} (C_5 + C_6 C_4) e^{-k_1 t} e^{k_1(\tau - t)} \, d\tau \leq \frac{C_5 + C_6 C_4}{2k_1} e^{-k_1 t}.$$

En raisonnant de la même manière pour h_∞, on obtient la majoration (27). La proposition est démontrée.

4 Transformée de Radon gauche

Dans toute la section la variété M est complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure strictement négative pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$ et telle que la dérivée covariante du tenseur de courbure soit uniformément bornée : $\|DR\|_\infty < \infty$.

4.1 Transformée et inverse à gauche

4.1.1 Définitions

L'ensemble des paires de points distincts de M est noté $(M \times M) \setminus \Delta$. On se donne un espace

$$\mathcal{X} = L^1_{loc}\left(((M \times M) \setminus \Delta) \times \partial M \times \mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R}\right)$$

d'applications localement Lebesgue-intégrables.

On note $\mathcal{C}^0_{comp}(M, \mathbf{R})$ l'espace des applications continues à support compact, de M dans $\mathbf{R}$, et $\mathcal{C}^1_{comp}(M, \mathbf{R})$ le sous-espace de celles qui sont de classe $\mathcal{C}^1$. A tout élément ξ de $\mathcal{X}$ on associe l'application fonctionnelle

$$\begin{array}{cccc} \Xi : & \mathcal{C}^0_{comp}(M, \mathbf{R}) & \to & L^1_{loc}\left(M \times \partial M \times \mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R}\right) \\ & f & \mapsto & \Xi f \end{array}$$

avec

$$\Xi f(x, \theta, p) = \int_{y \in H_x(\theta, p)} f(y)\xi(y, x, \theta, p)\ dy$$

en notant $dy = i_{v(y,\theta)} d\mathrm{vol}_M(y)$ la mesure de volume positive induite par la métrique riemannienne sur l'horosphère $H_x(\theta, p)$. D'après la notation (2), si le point y est sur l'horosphère $H_x(\theta, p)$, on a

$$Y_-(x, \theta, y) = Y_-(\varphi_{-p} v(y, \theta), p).$$

L'application $(v, t) \mapsto Y_-(v, t)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les produits des variétés centre-stables par $\mathbf{R}$, l'application $(x, \theta, y) \mapsto Y_-(x, \theta, y)$ admet à tous les ordres des dérivées partielles par rapport à (x, y), continues en tout $(x, \theta, y) \in M \times \partial M \times M$. On définit l'application $\xi_1 \in \mathcal{X}$ par

$$\xi_1(y, x, \theta, p) = \det Y_-(x, \theta, y)^{-1}.$$

Pour $x \in M$ on définit l'ensemble

$$E_x = \left\{(\theta, p, y) \in \partial M \times \mathbf{R}_+^\star \times M \mid y \in H_x(\theta, p)\right\}.$$

Soit $\mathcal{B}(v(x, \theta)) = \cup p > 0 H_x(\theta, p)$ l'horoboule ouverte de centre θ effleurant x. Pour $(\theta, p, y) \in \partial M \times \mathbf{R}_+^\star \times M$ on a les équivalences :

$$(\theta,p,y)\in E_x \Longleftrightarrow B_x(\theta,y)=p$$

et

$$y\in\mathcal{B}(v(x,\theta))\Longleftrightarrow B_x(\theta,y)>0.$$

Pour $(x,y)\in(M\times M)\setminus\Delta$ on définit la calotte sphérique

$$A(x,y)=\{\theta\in\partial M|y\in\mathcal{B}(v(x,\theta))\}.$$

Elle est homéomorphe à un disque ouvert et contient $v(x,y)_{+\infty}$.

Pour $x\in M$ on a

$$E_x=\{(\theta,p,y)\mid y\in M,\ \theta\in A(x,y),\ B_x(\theta,y)=p\}$$

et on définit le champ V_x, de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $M\setminus\{x\}$:

$$V_x(y)=v(y,v(x,y)_{+\infty})=\varphi_{d(x,y)}v(x,y).$$

Pour $\theta\in\partial M$, $x\in M$, $p\in\mathbf{R}$ on note $\gamma_{x,\theta}(p)=\pi\varphi_p v(x,\theta)$ la géodésique joignant x à θ. On a $V_x(\gamma_{x,\theta}(p))=\partial\gamma_{x,\theta}/\partial p(p)$.

Pour $x\in M, y\in M\setminus\{x\}$ on note $D(x,y)$ l'hémisphère fermée de pôle $V_x(y)$ dans T^1yM. On a $\mu_y(D(x,y)_{+\infty})=\mathbf{V}/2$. La convexité des horosphères assure l'inclusion

$$D(x,y)_{+\infty}\subset A(x,y).$$

4.1.2 Construction liminaire

La fonctionnelle associée à $\xi_1(y,x,\theta,p)=\det Y_-(x,\theta,y)^{-1}$ est notée $\Xi_1 f(p)=\Xi_1 f(x,\theta,p)$. Soient $p>0$ et $t\geq -p$. L'application $\rho : y\mapsto \pi\varphi_t v(y,\theta)$ envoie $H_x(\theta,p)$ sur $H_x(\theta,p+t)$. Pour $y\in H_x(\theta,p)$ on a

$$i_{v(y,\theta)}\mathrm{dvol}_M(y)\det Y_-(v(y,\theta),t)=i_{\varphi_t v(y,\theta)}\ \rho_\star\mathrm{dvol}_M(y). \tag{28}$$

Étant donnée $f\in\mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})$ on a

$$\Xi_1 f(p+t)=\int_{z\in H_x(\theta,p+t)} f(z)\det Y_-(x,\theta,z)^{-1}\ i_{v(z,\theta)}\mathrm{dvol}_M(z).$$

Posant $z=\rho(y)$, $y=\pi\varphi_{-t}v(z,\theta)$, il vient $v(z,\theta)=\varphi_t v(y,\theta)$ et $Y_-(x,\theta,z)=Y_-(v(y,\theta),t)Y_-(x,\theta,y)$, d'où

$$\Xi_1 f(p+t)=\int_{y\in H_x(\theta,p)} f(\rho(y))\det Y_-(v(y,\theta),t)^{-1}\det Y_-(x,\theta,y)^{-1}\ i_{v(\rho(y)),\theta)}\mathrm{dvol}_M(\rho(y))$$

et

$$\Xi_1 f(p+t) = \int_{y\in H_x(\theta,p)} f(\rho(y)) \det Y_-(x,\theta,y)^{-1}\; i_{v(y,\theta)} \mathrm{dvol}_M(y) = \Xi_1(f\circ\rho)(p),$$

d'après la formule (28). Puisque le support de f est compact, le quotient $(\Xi_1 f(p+t) - \Xi_1 f(p))/t$ converge uniformément par rapport à $(x,\theta,p)\in M\times\partial M\times\mathbf{R}_+^\star$, quand t tend vers 0, vers

$$\int_{y\in H_x(\theta,p)} \langle\nabla f(y), v(y,\theta)\rangle\, \xi_1(y,x,\theta,p)\; dy.$$

C'est-à-dire que $\Xi_1 f$ admet une dérivée partielle par rapport à p continue, et qui vaut :

$$\frac{\partial \Xi_1 f}{\partial p}(x,\theta,p) = \Xi_1 \left\langle \nabla f(.), v(.,\theta)\right\rangle (x,\theta,p). \tag{29}$$

On se donne une fonction $\alpha\in\mathcal{X}$, on suppose qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à $(y,x,p)\in((M\times M)\setminus\Delta)\times\mathbf{R}_+^\star$ localement Lebesgue-intégrable sur $((M\times M)\setminus\Delta)\times\partial M\times\mathbf{R}_+^\star$.

Soit F l'ensemble des quadruplets (y,x,θ,p) vérifiant l'inéquation

$$V_x(y).v(y,\theta) > 0.$$

Notons $\hat{F}(x,\theta)$ le fuseau, hypersurface de M de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par l'équation

$$V_x(y).v(y,\theta) = 0.$$

Ce fuseau intersecte transversalement le feuilletage $H_x(\theta,p)$ à x, θ fixés en des sous-variétés lisses difféomorphes à S^{n-2}. On note $\underline{dy}$ la mesure de volume positive induite par la métrique riemannienne sur ces intersections.

D'après l'équation (29), en posant

$$\xi(y,x,\theta,p) = \alpha(y,x,\theta,p)\xi_1(y,x,\theta,p)\mathbf{1}_F(y,x,\theta,p),$$

on a pour toute application $f\in\mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})$:

$$\frac{\partial \Xi f}{\partial p}(x,\theta,p) = \int_{y\in H_x(\theta,p)} \langle\nabla f(y), v(y,\theta)\rangle\, \xi(y,x,\theta,p)\; dy$$

$$+ \int_{y\in H_x(\theta,p)} f(y)(\xi_1\mathbf{1}_F)(y,x,\theta,p)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}(y,x,\theta,p) + \langle\nabla_y\alpha(y,x,\theta,p), v(y,\theta)\rangle\right) dy$$

$$+ \int_{y\in H_x(\theta,p)\cap\hat{F}(x,\theta)} f(y)\xi(y,x,\theta,p)\zeta(y,x,\theta,p)\; \underline{dy} \tag{30}$$

où ζ est une fonction continue et où ∇_y désigne le gradient pris par rapport à la variable $y \in M$. Grâce à la stricte convexité géodésique des horosphères, la fonction ζ est lisse par rapport à y, x, p. La normale extérieure à $\hat{F}(x,\theta)$ étant notée $n(y)$, le coefficient ζ vaut :

$$\zeta(y,x,\theta,p) = -\mathrm{cotan}\ \left(\widehat{n(y), v(y,\theta)}\right).$$

Notant $\beta(y,x,\theta,p)$ le facteur entre parenthèses dans la deuxième intégrale de (30), posant $\psi = \beta\xi_1$, et notant $\mathcal{Z}$ l'opérateur qui à f associe le troisième terme, il vient :

$$\frac{\partial \Xi f}{\partial p}(x,\theta,p) = \Xi \left\langle \nabla f(.), v(.,\theta)\right\rangle (x,\theta,p) + \Psi f(x,\theta,p) + \mathcal{Z} f(x,\theta,p).$$

Il s'agit de choisir α de façon que la connaissance pour tout triplet (x,θ,p) de la quantité $\Xi \left\langle \nabla f(.), v(.,\theta)\right\rangle (x,\theta,p)$ permette de retrouver f.

Remarque 4.1 Il existe des applications C_1 et C_2 continues sur $M \times \partial M$ donnant les équivalences quand p tend vers 0 par valeurs strictement positives :

$$\mathrm{diam}\left(\hat{F}(x,\theta) \cap H_x(\theta,p)\right) \sim C_1(x,\theta)\sqrt{p} \quad \text{et} \quad \zeta \sim \frac{C_2(x,\theta)}{\sqrt{p}}.$$

4.1.3 Définition et injectivité d'une transformée de Radon

Théorème 4.1 et définition *Soit f un élément de $\mathcal{C}^1_{comp}(M, \mathbf{R})$. La* transformée de Radon gauche *de f est le triplet $\mathcal{T} = (\Xi f, \Psi f, \mathcal{Z} f)$ d'applications appartenant à l'espace $L^1_{loc}\left(M \times \partial M \times \mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R}\right)$ comme défini dans la section 4.1.2 pour l'application ξ (indépendante de la quatrième variable) :*

$$\xi(y,x,\theta,p) = \frac{\mathbf{1}_{D(x,y)_{+\infty}}(\theta)\ \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\theta)}{\frac{\mathbf{V}}{2}\det J(v(x,y), d(x,y))} \tag{31}$$

où $\mathbf{1}_Z$ désigne l'application indicatrice de la partie Z :

$$\Xi f(x,\theta,p) = \int_{y\in H_x(\theta,p)} f(y)\xi(y,x,\theta,p)\ dy, \quad \Psi f(x,\theta,p) = \int_{y\in H_x(\theta,p)} f(y)\psi(y,x,\theta,p)\ dy,$$

$$\mathcal{Z} f(x,\theta,p) = \int_{y\in H_x(\theta,p)\cap \hat{F}(x,\theta)} f(y)\xi(y,x,\theta,p)\zeta(y,x,\theta,p)\ \underline{dy}.$$

La transformée réciproque à gauche *est la* fonction *$\mathcal{I}$ qui à un triplet (α,β,γ) de $L^1_{loc}\left(M \times \partial M \times \mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R}\right)$ associe l'application de M dans $\mathbf{R}$:*

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta,\gamma)(x) = f(x) = -\frac{2}{\mathbf{V}} \int_{\theta\in\partial M, p\in\mathbf{R}_+^\star} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p} - \beta - \gamma\right)(x,\theta,p)\ dp\ d\mu_x(\theta). \tag{32}$$

Son domaine de définition contient l'image de $\mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})$ par la transformée de Radon gauche $\mathcal{T}$ et on a

$$\mathcal{I}\circ\mathcal{T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})}.$$

L'application ψ est calculée dans la section 4.2.

Démonstration : Pour $\theta \in \partial M$, $x \in M$, $f \in \mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})$ on a

$$-f(x) = \int_{p=0}^{+\infty} \left\langle \nabla f(\gamma x,\theta(p)), \frac{\partial \gamma x,\theta}{\partial p}(p) \right\rangle\, dp,$$

donc

$$f(x) = -\frac{1}{\mathbf{V}} \int_{\theta\in\partial M} \int_{p=0}^{+\infty} \left\langle \nabla f(\gamma x,\theta(p)), \frac{\partial \gamma x,\theta}{\partial p}(p) \right\rangle\, dp\; d\mu_x(\theta).$$

De la formule en coordonnées radiales autour de x :

$$d\mathrm{vol}_M(\gamma x,\theta(p)) = \det J(v(x,\theta),p)\; dp\; d\mu_x(\theta)$$

on déduit le changement de variables

$$f(x) = -\frac{1}{\mathbf{V}} \int_{y\in M\setminus\{x\}} \langle \nabla f(y), V_x(y)\rangle \frac{d\mathrm{vol}_M(y)}{\det J(v(x,y),d(x,y))}.$$

Un calcul euclidien donne :

$$\int_{w\in D(x,y)} w\; \frac{d\mu_y(w_{+\infty})}{\frac{\mathbf{V}}{2}} = \frac{1}{2} V_x(y),$$

donc

$$\frac{1}{2}V_x(y) = \int_{\theta\in A(x,y)} v(y,\theta)\mathbf{1}_{D(x,y)_{+\infty}}(\theta)\; \frac{d\mu_y(\theta)}{\frac{\mathbf{V}}{2}}.$$

Par suite

$$f(x) = -\frac{1}{\mathbf{V}} \int_{y\in M\setminus\{x\}} \left\langle \nabla f(y), 2\int_{\theta\in A(x,y)} v(y,\theta)\mathbf{1}_{D(x,y)_{+\infty}}(\theta)\; \frac{d\mu_y(\theta)}{\frac{\mathbf{V}}{2}} \right\rangle$$

$$\times \frac{1}{\det J(v(x,y),d(x,y))}\; d\mathrm{vol}_M(y),$$

et donc

$$f(x) = -\frac{2}{\mathbf{V}} \int_{y\in M\setminus\{x\}} \int_{\theta\in A(x,y)} \langle \nabla f(y), v(y,\theta)\rangle\, \xi(y,x,\theta,p)\; d\mu_x(\theta)\; d\mathrm{vol}_M(y).$$

Or on a un isomorphisme d'espaces mesurés entre

$$\left(\left\{(y,\theta)\;\middle|\; y\in M\setminus\{x\},\theta\in A(x,y)\right\}, d\mu_x(\theta)\otimes \mathrm{dvol}_M(y)\right)$$

et

$$\left(E_x, d\mu_x(\theta)\otimes dp\otimes i_{v(y,\theta)}\mathrm{dvol}_M(y)\right).$$

Il vient

$$f(x) = -\frac{2}{\mathbf{V}}\int_{(\theta,p,y)\in E_x} \langle \nabla f(y), v(y,\theta)\rangle\, \xi(y,x,\theta,p)\; d\mu_x(\theta)\; dp\; i_{v(y,\theta)}\mathrm{dvol}_M(y),$$

ce qui donne la formule d'inversion (32) par le théorème de Fubini et d'après les définitions des coefficients ψ et ζ à la fin de la section 4.1.2. $\diamond$

4.2 Propriétés

L'application ψ s'exprime en fonction de ξ.

Proposition 4.1 *On a partout où ξ est dérivable par rapport à y, donc presque partout :*

$$\psi(y,x,\theta,p) = \langle \nabla_y \xi(y,x,\theta,p), v(y,\theta)\rangle + \xi(y,x,\theta,p)\ \mathrm{tr}\ S(v(y,\theta)).$$

Démonstration : D'après les formules (30) et (31), on a

$$\psi(y,x,\theta,p) = \xi_1(y,x,\theta,p)\left\langle \nabla_y \frac{\xi}{\xi_1}(y,x,\theta,p), v(y,\theta)\right\rangle$$

donc l'application ψ est indépendante de p, et

$$\psi(y,x,\theta,p) = \left\langle \left(\nabla_y\xi - \frac{\xi}{\xi_1}\nabla_y\xi_1\right)(y,x,\theta,p), v(y,\theta)\right\rangle.$$

Or les équations (2) et (4) entraînent

$$\langle \nabla_y \xi_1(y,x,\theta,p), v(y,\theta)\rangle = \xi_1(y,x,\theta,p)\mathrm{tr}\ \left(-S(v(y,\theta))\right),$$

d'où le résultat. $\diamond$

La mesure de volume riemannien est transportée par la transformée. La formule d'inversion (32) avec la définition 3.2 entraînent directement :

Théorème 4.2 *Soit $f\in \mathcal{C}^1_{comp}(M,\mathbf{R})$. On a :*

$$\int_M f\ \mathrm{dvol}_M = \int_{p>0, v\in T^1M} -\frac{2}{\mathbf{V}}\left(\frac{\partial \Xi f}{\partial p} - \Psi f - \mathcal{Z} f\right)(\pi v, v_{+\infty}, p)\ dp\ \mathrm{dvol}_{T^1M}(v).$$

4.3 Extensions

Une origine o est fixée dans M. À une application $F \in \mathcal{C}^1_{comp}(T^1M, \mathbf{R})$ on associe les applications

$$f^o(x,\eta) = F(v(x,\eta))\frac{d\mu_x}{d\mu_o}(\eta) \quad \text{et} \quad f(x,\eta) = F(v(x,\eta))$$

qui sont continues, à support compact sur $M \times \partial M$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en $x \in M$. La définition 4.1 permet deux extensions au fibré tangent unitaire de la transformée de Radon et de son inverse à gauche.

Définition 4.1 *La première transformée de $F \in \mathcal{C}^1_{comp}(T^1M, \mathbf{R})$ est définie comme l'application qui à $(\eta, x, \theta, p) \in \partial M \times M \times \partial M \times \mathbf{R}^\star_+$ associe*

$$\mathcal{T}oF(\eta, x, \theta, p) = (\Xi, \Psi, \mathcal{Z})f^o(., \eta)(x, \theta, p).$$

La deuxième transformée est définie par

$$\hat{\mathcal{T}}F(\eta, x, \theta, p) = (\Xi, \Psi, \mathcal{Z})f(., \eta)(x, \theta, p).$$

La première transformée réciproque à gauche est la fonction $\mathcal{I}o$ qui à un triplet (α, β, γ) de $L^1_{loc}\left(\partial M \times M \times \partial M \times \mathbf{R}^\star_+, \mathbf{R}\right)$ associe l'application de T^1M dans $\mathbf{R}$:

$$\mathcal{I}o(\alpha, \beta, \gamma)(v(x,\eta) = F(v(x,\eta))$$

$$= -\frac{2}{\mathbf{V}}\frac{d\mu_o}{d\mu_x}(\eta)\int_{\theta\in\partial M, p\in\mathbf{R}^\star_+}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p} - \beta - \gamma\right)(\eta, x, \theta, p)\; dp\; d\mu_x(\theta). \tag{33}$$

La deuxième transformée réciproque à gauche est définie par

$$\hat{\mathcal{I}}(\alpha, \beta, \gamma)(v(x,\eta) = F(v(x,\eta))$$

$$= -\frac{2}{\mathbf{V}}\int_{\theta\in\partial M, p\in\mathbf{R}^\star_+}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p} - \beta - \gamma\right)(\eta, x, \theta, p)\; dp\; d\mu_x(\theta). \tag{34}$$

Les domaines de définition respectifs de $\mathcal{I}o$ et $\hat{\mathcal{I}}$ contiennent respectivement l'image de $\mathcal{C}^1_{comp}(T^1M, \mathbf{R})$ par $\mathcal{T}o$ et $\hat{\mathcal{T}}$ et on a

$$\mathcal{I}o \circ \mathcal{T}o = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^1_{comp}(T^1M,\mathbf{R})} = \hat{\mathcal{I}} \circ \hat{\mathcal{T}}.$$

4.3.1 Transformée de la mesure de Liouville

Pour $F \in \mathcal{C}^1_{comp}(T^1M, \mathbf{R})$ on a

$$\lambda(F) = \int_{v \in T^1M} F(v)\ d\lambda(v) = \int_{x \in M} \mathcal{F}(x)\ \mathrm{dvol}_M(x)$$

en posant

$$\mathcal{F}(x) = \int_{\eta \in \partial M} F(v(x,\eta))\ d\mu_x(\eta) = \int_{\eta \in \partial M} f^o(x,\eta)\ d\mu_o(\eta).$$

En appliquant le théorème 4.2 on obtient :

$$\lambda(F) = \int_{p>0, v \in T^1M} -\frac{2}{\mathbf{V}} \left(\frac{\partial \Xi}{\partial p} - \Psi - \mathcal{Z} \right) \mathcal{F}(\pi v, v_{+\infty}, p)\ dp\ \mathrm{dvol}_{T^1M}(v).$$

Il en résulte l'expression de la transformée de la mesure de Liouville :

Théorème 4.3 *Soit $F \in \mathcal{C}^1_{comp}(T^1M, \mathbf{R})$. On a :*

$$\lambda(F) = \int_{\eta \in \partial M, p>0, v \in T^1M} -(2/\mathbf{V}) \left(\frac{\partial \Xi}{\partial p} - \Psi - \mathcal{Z} \right) f^o(.,\eta)(\pi v, v_{+\infty}, p)\ dp\ \mathrm{dvol}_{T^1M}(v) d\mu_o(\eta).$$

4.3.2 Transformée d'une géodésique

Soit γ une orbite du flot géodésique et $\pi(\gamma)$ la géodésique associée sur M. Par sa mesure de longueur, l'orbite γ s'identifie à une mesure sur le fibré unitaire tangent :

$$\gamma(F) = \int_{v \in \gamma} F(v)\ d\gamma(v) = \int_{x \in \pi(\gamma)} f(x, \gamma_{+\infty})\ d\pi(\gamma)(x)$$

$$= \int_{x \in \pi(\gamma)} f^o(x, \gamma_{+\infty}) \frac{d\mu_o}{d\mu_x}(\gamma_{+\infty})\ d\pi(\gamma)(x).$$

On en déduit la première expression de la transformée de γ :

$$\gamma(F) = \int_{x \in \pi(\gamma), p>0, \theta \in \partial M} -\frac{2}{\mathbf{V}} \left(\frac{\partial \Xi}{\partial p} - \Psi - \mathcal{Z} \right) f(., \gamma_{+\infty})(x, \theta, p)\ dp\ d\mu_x(\theta)\ d\pi(\gamma)(x).$$

Il en résulte la deuxième expression de la transformée de γ :

$$\gamma(F) = \int_{x \in \pi(\gamma), p>0, \theta \in \partial M} (-2/\mathbf{V}) \left(\frac{\partial \Xi}{\partial p} - \Psi - \mathcal{Z} \right) f^o(., \gamma_{+\infty})(x, \theta, p)$$

$$\frac{d\mu_o}{d\mu_x}(\gamma_{+\infty})\ dp\ d\mu_x(\theta)\ d\pi(\gamma)(x).$$

5 Fluctuation des champs de Jacobi stables du flot géodésique

Dans toute la section, la variété M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g *négativement* $1/4$*-pincée* (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $k_0 > 0$ et $k_1 > 0$ telles que $k_1 < k_0 < 2k_1$ et que la courbure sectionnelle satisfasse à l'encadrement $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$), telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée.

Le théorème qui suit s'applique entre autres aux revêtements universels de variétés compactes à métrique négativement 1/4-pincée.

Théorème 5.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante des endomorphismes de Ricatti stables soit uniformément bornée. Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à la même variété stable, et pour toute courbe lisse $c(q)$ paramétrée à vitesse un joignant $c(0) = \pi v$ à $c(q) = \pi v'$ dans l'horosphère associée, avec l'application $\psi(q,t)$ définie dans la section 2.3, le champ d'isomorphismes*

$$Y_-^{-1}(v',t)\psi(q,t)Y_-(v,t)$$

de $v^\perp$ vers $v'^\perp$ converge quand t tend vers $+\infty$ vers une limite indépendante du choix de la courbe c, uniformément par rapportà v,v' parcourant des compacts de la même variété stable.

Démonstration : Soit $Z(q,t) = Y_-(v_q,t)^{-1}\psi(q,t)Y_-(v,t)$. On a $Z(q,0) = \psi(q,0)$ et

$$\frac{D}{dt}Z(q,t) = -Y_-(v_q,t)^{-1}S(\varphi_t v_q)\psi(q,t)Y_-(v,t)$$

$$+Y_-(v_q,t)^{-1}\frac{D\psi}{dt}(q,t)Y_-(v,t) + Y_-(v_q,t)^{-1}\psi(q,t)S(\varphi_t v)Y_-(v,t)$$

donc

$$\left\|\frac{D}{dt}Z(q,t)\right\| \leq$$

$$\left\|Y_-(v_q,t)^{-1}\right\| \left(\|S(\varphi_t v_q)\psi(q,t) - \psi(q,t)S(\varphi_t v)\| + \left\|\frac{D\psi}{dt}(q,t)\right\|\right) \|Y_-(v,t)\|.$$

D'après les lemmes 2.2 et 2.1, cette quantité peut être majorée par :

$$\leq e^{k_0 t}\left(\underline{\mathcal{C}}e^{-k_1 t}|q|\,(k_0 + \|DS\|_\infty) + \mathcal{C}e^{-k_1 t}|q|\right)e^{-k_1 t}$$

donc il existe une constante C telle que

$$\left\|\frac{D}{dt}Z(q,t)\right\| \leq C\;|q|\;e^{(k_0-2k_1)t}, \tag{35}$$

d'où la convergence vers une application continue de q quand t tend vers $+\infty$, par le théorème de Lebesgue de convergence dominée ([22] p.44). Si $\underline{c}(q)$ est une autre courbe joignant $\underline{c}(0) = \pi v$ à $\underline{c}(\underline{q}) = \pi v'$ avec les mêmes conditions, le lemme 2.3 entraîne la majoration :

$$\left\| Z(q,t) - \underline{Z}(\underline{q},t) \right\| \leq \mathcal{C}\left(|q| + |\underline{q}| \right) e^{(k_0 - 2k_1)t}.$$

La limite obtenue est donc indépendante du choix de la courbe. $\diamond$

Définition 5.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée, *telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à la même variété* stable, *la limite obtenue dans le théorème 5.1 est notée*

$$X(v,v').$$

Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à la même variété centre-stable, *avec les notations de [13] rappelées dans la section 2.2, on a $v \in \varphi_{\sigma(v,v')} W^S(v')$. L'isomorphisme*

$$X(v,v') = Y_-(\varphi_{\sigma(v,v')}v', -\sigma(v,v'))X(v, \varphi_{\sigma(v,v')}v')$$

$$= Y_-^{-1}(v', \sigma(v,v'))X(v, \varphi_{\sigma(v,v')}v') = X(\varphi_{-\sigma(v,v')}v, v')Y_-(v, -\sigma(v,v'))$$

de $v^\perp$ dans $v'^\perp$ est appelé transfert stable de v vers v'.

Le transfert stable vérifie la relation de réciprocité :

$$X(v,v')X(v',v) = \mathrm{Id}_{v^\perp}. \tag{36}$$

Proposition 5.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée, *telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Le transfert stable est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables, parcourant une variété centre-stable donnée.*

Démonstration : Soient $v \in T^1M$ et $v' \in W^{CS}(v)$. De la relation

$$X(v, \varphi_t v') = Y_-(v',t)X(v,v')$$

découle l'équation différentielle ordinaire linéaire

$$\frac{D}{dt} X(v, \varphi_t v') = S(\varphi_t v')X(v, \varphi_t v'). \tag{37}$$

La dérivée partielle de $X(v,v')$ dans la direction du flot appliqué à v' est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $W^S(v)$. L'application $v' \mapsto Y_-(v',t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $W^S(v)$. En reprenant les notations du théorème 5.1, soit $W(q,t)$ le champ d'endomorphismes tel que

$$\frac{D}{dq}Y_-(v_q,t)^{-1} = W(q,t)Y_-(v_q,t)^{-1}.$$

Dériver cette équation par rapport à t donne

$$R(Q,T)Y_-(v_q,t)^{-1} + \frac{D}{dq}\left(-Y_-(v_q,t)^{-1}S(\varphi_t v_q)\right)$$

$$= \frac{DW(q,t)}{dt}Y_-(v_q,t)^{-1} - W(q,t)Y_-(v_q,t)^{-1}S(\varphi_t v_q),$$

d'où

$$\frac{DW(q,t)}{dt} = R(Q,T) - Y_-(v_q,t)^{-1}\frac{DS(\varphi_t v_q)}{dq}Y_-(v_q,t),$$

donc

$$\left\|\frac{DW(q,t)}{dt}\right\| \leq k_0^2 e^{-k_1 t} + \|DS\|_\infty e^{(k_0-2k_1)t}.$$

La relation $Y_-(v_q,0) = \mathrm{Id}_{v_q^\perp}$ donne $W(q,0) = 0$, donc par le théorème de Lebesgue de convergence dominée ([22] p.44), le champ $W(q,t)$ converge vers une application continue de q quand t tend vers $+\infty$. On a

$$\frac{D}{dq}Z(q,t) = W(q,t)Z(q,t) + Y_-(v_q,t)^{-1}\frac{D\psi}{dq}(q,t)Y_-(v,t).$$

D'après le lemme 2.1, le deuxième terme est majoré en norme par :

$$\mathcal{C}|q|e^{(k_0-2k_1)t}.$$

Par conséquent le champ $\frac{D}{dq}Z(q,t)$ converge quand t tend vers $+\infty$ vers une application continue de q. Le transfert stable $X(v,v')$ admet donc une dérivée partielle continue par rapport à v' dans la direction $W^S(v)$. Le champ d'endomorphismes S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $W^{CS}(v)$, donc l'application $v' \mapsto X(v,v')$ qui vérifie l'équation différentielle ordinaire linéaire (37) avec condition initiale en $t=0$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W^S(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W^{CS}(v)$. La formule(36) permet de conclure. ◇

Remarque 5.1 Avec plus de persévérance, peut-être peut-on obtenir la même régularité pour le transfert stable X que pour les feuilles centre-stables, c'est-à-dire la classe $\mathcal{C}^\infty$.

5.1 Espace tangent à la sphère à l'infini 1/4-pincée

Pour un point x de la variété M négativement 1/4-pincée, l'application $\theta \mapsto v(x,\theta)$ est par définition la carte en x de la sphère à l'infini de M. Pour $x, y \in M$ et $\theta \in \partial M$, soit c une courbe joignant le point $c(0) = \pi v(x,\theta)$ au point $c(q) =$

$\pi\varphi_{-\sigma(v(y,\theta),v(x,\theta))}v(y,\theta)$ dans l'horosphère associée. Avec les notations de la section 2.3, le changement de carte de l'espace tangent en θ de la carte en x vers la carte en y vaut

$$\lim_{t\to+\infty} J\left(v(y,\theta), t + B_x(\theta, y)\right)^{-1} \cdot \psi(q,t) \cdot J\left(v(x,\theta), t\right).$$

indépendamment du choix de la courbe c (comme l'assure la section 2.3). L'invariance de la forme symplectique sous l'opération du flot géodésique étend la portée du transfert stable.

Théorème 5.2 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée, *telle que la dérivée covariante des endomorphismes de Ricatti stables soit uniformément bornée. Pour $x, y \in M$, $\theta \in \partial M$, le changement de carte de l'espace tangent en θ de la carte en x vers la carte en y est égal au transposé du transfert stable :*

$$^tX^{-1}\left(v(x,\theta), v(y,\theta)\right) = {}^tX\left(v(y,\theta), v(x,\theta)\right).$$

Démonstration : Soit c une courbe paramétrée à vitesse un joignant le point $c(0) = \pi v(x,\theta)$ au point $c(q) = \pi\varphi_{-\sigma(v(y,\theta),v(x,\theta))}v(y,\theta)$ dans l'horosphère associée. Avec les notations de la section 2.3, et d'après la relation (9), le changement de carte de l'espace tangent en θ de la carte en x vers la carte en y est égal à la limite quand t tend vers $+\infty$ de la quantité

$$\begin{aligned} A(t) = {} & (U-S)(v(y,\theta))Y_+^{-1}\left(v(y,\theta), t + B_x(\theta,y)\right) \\ & \cdot \psi(q,t) \cdot Y_+\left(v(x,\theta),t\right)(U-S)^{-1}(v(x,\theta)). \end{aligned}$$

L'équation (8) entraîne :

$$\begin{aligned} A(t) = {} & {}^tY_-\left(v(y,\theta), t + B_x(\theta,y)\right)(U-S)\left(\varphi_{t+B_x(\theta,y)}v(y,\theta)\right) \\ & \cdot \psi(q,t) \cdot (U-S)^{-1}\left(\varphi_t v(x,\theta)\right){}^tY_-^{-1}\left(v(x,\theta),t\right). \end{aligned}$$

Le lemme 2.2 entraîne l'existence d'une constante C telle que :

$$\left\|(U-S)\left(\varphi_{t+B_x(\theta,y)}v(y,\theta)\right)\psi(q,t) - \psi(q,t)(U-S)\left(\varphi_t v(x,\theta)\right)\right\| \leq C|q|e^{-k_1 t},$$

d'où l'estimation quand t tend vers $+\infty$:

$$A(t) = {}^tY_-\left(v(y,\theta), t + B_x(\theta,y)\right) \cdot \psi(q,t) \cdot {}^tY_-^{-1}\left(v(x,\theta),t\right) + O\left(|q|e^{(k_0-2k_1)t}\right).$$

Puisque $\psi(q,t)$ est une isométrie, on a $\psi(q,t) = {}^t\psi(q,t)^{-1}$, donc

$$A(t) = {}^t\!\left(Y_-^{-1}\left(v(y,\theta), t + B_x(\theta,y)\right) \cdot \psi(q,t) \cdot Y_-\left(v(x,\theta),t\right)\right)^{-1} + O\left(|q|e^{(k_0-2k_1)t}\right).$$

Le résultat découle du théorème 5.1 et de la définition 5.1. $\diamond$

5.2 Fluctuation croisée

Champ et variation de stabilités opposées fonctionnent de la même manière que ce qui précède.

Théorème 5.3 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante des endomorphismes de Ricatti stables soit uniformément bornée.*

> *i) Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à une même variété stable, et pour toute courbe lisse $c(q)$ joignant $c(0) = \pi v$ à $c(q) = \pi v'$ dans l'horosphère associée, avec l'application $\psi(q,t)$ définie dans la section 2.3, le champ d'isomorphismes*
>
> $$Y_+(v',t)^{-1}\psi(q,t)Y_+(v,t)$$
>
> *converge quand t tend vers $+\infty$ vers la fonction continue de v, v' :*
>
> $$\begin{aligned}\underline{X}(v,v') &= (U-S)^{-1}(v')\,{}^t\!X(v,v')^{-1}(U-S)(v) \\ &= (U-S)^{-1}(v')\,{}^t\!X(v',v)(U-S)(v) \qquad (38)\end{aligned}$$
>
> *indépendamment du choix de la courbe c.*
>
> *ii) Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à une même variété instable, et pour toute courbe lisse $c(q)$ joignant $c(0) = \pi v$ à $c(q) = \pi v'$ dans l'horosphère associée, avec l'application $\psi(q,t)$ définie dans la section 2.3, le champ d'isomorphismes*
>
> $$Y_-(v',t)^{-1}\psi(q,t)Y_-(v,t)$$
>
> *converge quand t tend vers $-\infty$ vers la fonction continue de v, v' :*
>
> $$\begin{aligned}\underline{X}(-v,-v') &= (U-S)^{-1}(-v')\,{}^t\!X(-v,-v')^{-1}(U-S)(-v) \\ &= (U-S)^{-1}(v')\,{}^t\!X(-v',-v)(U-S)(v)\end{aligned}$$
>
> *indépendamment du choix de la courbe c.*

Démonstration : Les rôles de v et v' s'échangent en inversant la matrice. La démonstration du théorème 5.2 fournit directement le premier cas. Le deuxième cas s'en déduit en inversant le sens de parcours des géodésiques. ◇

Définition 5.2 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Pour tout couple de vecteurs v et v' appartenant à la même* *variété* centre-stable*, avec les notations de [13] rappelées dans la section 2.2, on a* $v \in \varphi_{\sigma(v,v')} W^S(v')$*. L'isomorphisme*

$$\underline{X}(v,v') = Y_+(\varphi_{\sigma(v,v')}v', -\sigma(v,v'))X(v, \varphi_{\sigma(v,v')}v')$$

$$= Y_+^{-1}(v', \sigma(v,v'))\underline{X}(v, \varphi_{\sigma(v,v')}v') = \underline{X}(\varphi_{-\sigma(v,v')}v, v')Y_+(v, -\sigma(v,v'))$$

de $v^\perp$ *dans* $v'^\perp$ *est appelé* transfert instable de v vers v'.

Le transfert instable vérifie la relation de réciprocité :

$$\underline{X}(v,v')\underline{X}(v',v) = \mathrm{Id}_{v^\perp}. \tag{39}$$

Proposition 5.2 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Le transfert instable est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables, parcourant une variété centre-stable donnée.*

Démonstration : Cela résulte de la formule (38), de la proposition 5.1 et de la régularité des espaces stables et instables. ◇

5.3 Extension

Les transferts stable et instable peuvent être prolongés dans la direction longitudinale.

Définition 5.3 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Étant donnés un vecteur $v \in T^1M$ et un point $p \in M$, avec $\theta = v_{+\infty}$, le* transfert stable (*resp.* instable) étendu *de p vers v est l'isomorphisme $\widetilde{X}_v(p)$ (resp. $\widetilde{\underline{X}}_v(p)$) de T_pM dans $T_{\pi v}M$ qui à tout vecteur ξ associe*

$$\widetilde{X}_v(p)\xi = \langle \xi, v(p,\theta)\rangle\, v + X(v(p,\theta), v) \prod_{v(p,\theta)} \xi,$$

$$\widetilde{\underline{X}}_v(p)\xi = \langle \xi, v(p,\theta)\rangle\, v + \underline{X}(v(p,\theta), v) \prod_{v(p,\theta)} \xi.$$

Ils ont la même régularité que les transferts stable et instable.

Proposition 5.3 *Pour tout $v \in T^1M$, les transferts stable et instable étendus sont de classe $\mathcal{C}^1$ en p.*

Démonstration : Cela résulte des propositions 5.1 et 5.2. ◇

6 Exposants de Lyapounoff du flot géodésique

Sous les hypothèses des théorèmes 5.1 et 5.3, si le vecteur v admet des exposants de Lyapounoff (dans le futur), alors tous les éléments de sa variété centre-stable en admettent et ce sont les mêmes. On se réfère dans cette section aux définitions de

Théorème 6.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g* négativement 1/4-pincée*, telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée. Si le vecteur $v \in T^1M$ admet des exposants de Lyapounoff positifs et négatifs sous l'opération du flot géodésique quand le temps tend vers $+\infty$, alors tout élément w de la variété centre-stable de v aussi et ce sont les mêmes. La filtration d'Oseledets associée aux exposants positifs se transporte par $\underline{X}(v,w)$, la filtration d'Oseledets associée aux exposants négatifs se transporte par $X(v,w)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W^{CS}(v)$.*

Sur une surface, des hypothèses moins fortes suffisent, d'après la section 3.

Théorème 6.2 *Soit M une surface complète connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure strictement négative pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, et dont le gradient ∇K est uniformément borné. Quand ils sont définis en un vecteur tangent unitaire v, les exposants de Lyapounoff positifs et négatifs sous l'opération du flot géodésique quand le temps tend vers $+\infty$ sont définis et constants le long de sa variété centre-stable.*

Démonstration : Soient $x, y \in M$, $\theta \in \partial M$. Le théorème 5.2 assure que le transfert stable $X(v(x,\theta), v(y,\theta))$ existe et coïncide avec la densité de la mesure à l'infini $d\mu_x/d\mu_y(\theta)$. Ces applications sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x et y d'après le théorème 3.1. Il en résulte que le transfert instable $\underline{X}(v(x,\theta), v(y,\theta))$ existe aussi et est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et y , d'après la formule (38). $\diamond$

7 Linéarisations des variétés négativement 1/4-pincées

Dans toute la section, la variété M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g *négativement* 1/4*-pincée* (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $k_0 > 0$ et $k_1 > 0$ telles que $k_1 < k_0 < 2k_1$ et que la courbure sectionnelle satisfasse à l'encadrement $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0$), telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée.

Définition 7.1 *Pour $\theta \in \partial M$ et $t \in \mathbf{R}$, l'application* poussée stable *Φ_t^θ est définie par la relation suivante :*

$$\Phi_t^\theta y = \pi \varphi_t v(y,\theta).$$

Pour $v \in T^1M$ et $t \in \mathbf{R}$, on définit $\Phi_t^v = \Phi_t^{v+\infty}$.

La poussée stable est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée dans la direction orthogonale à $v(y,\theta)$ vaut $Y_-(v(y,\theta),t)$.

Lemme 7.1 *Pour $\theta \in \partial M$, $y \in M$ et $\xi \in v(y,\theta)^\perp$, on a*

$$d\Phi_t^\theta(y)\cdot\xi = Y_-\left(v(y,\theta),t\right)\xi.$$

La construction de la linéarisation s'appuye dessus.

Théorème 7.1 *Pour tout vecteur unitaire $v \in T^1M$, il existe une unique application E_v continue de M dans $T_{\pi(v)}M$ telle que*

$$\begin{aligned}
&i) && \forall y \in M \quad \langle E_v(y), v\rangle = B_v(y),\\
&ii) && \forall y \in M, \forall t \in \mathbf{R} \quad E_v\left(\Phi_t^v(y)\right) = tv + E_v(y),\\
&iii) && \forall y \in H_v(0) \quad E_v(y) = \lim_{t\to+\infty} Y_-(v,t)^{-1} \prod_{\varphi_t v} \left(\exp_{\pi\varphi_t v}\right)^{-1} \Phi_t^v(y).
\end{aligned} \tag{40}$$

Démonstration : Il suffit de démontrer la construction $iii)$. Soient $v \in T^1M$ et $c(q)$ une courbe lisse, à valeurs dans l'horosphère associée $H_v(0)$, telle que $c(0) = \pi v$ et que sa vitesse soit toujours inférieure à un. Soient $c_t(q) = \Phi_t^v c(q)$, $v_q = v\left(c(q), v_{+\infty}\right)$. Pour $t > 0$ on définit les champs de vecteurs avec les notations de la section 2.3 :

$$X_q = \int_{\rho=0}^{q} \psi(\rho,0)\frac{dc}{dq}(\rho)\ d\rho, \quad X_q^t = \int_{\rho=0}^{q} \psi(\rho,t)\frac{\partial c_t}{\partial q}(\rho)\ d\rho,$$

$$E_v^t(c(q)) = Y_-(v,t)^{-1}X_q^t. \tag{41}$$

On commence par démontrer que le champ $E_v^t(c(q))$ possède la propriété de Cauchy uniforme par rapport à q parcourant les compacts quand t tend vers $+\infty$. En reprenant les notations de la démonstration du théorème 5.1, on a :

$$E_v^0(c(q)) - E_v^t(c(q)) = \int_{\rho=0}^{q} \left(\psi(\rho,0) - Z(\rho,t)\right)\frac{dc}{dq}(\rho)\ d\rho$$

avec $Z(\rho,0) = \psi(\rho,0)$. La majoration (35) entraîne l'existence d'une constante C_1 telle que, pour tout vecteur unitaire v, toute courbe de vitesse inférieure à un sur l'horosphère $H_v(0)$, tous $(t,q) \in \mathbf{R}^+ \times [-1,1]$:

$$\left\|\frac{D}{dt}Z(q,t)\right\| \leq C_1 d\left(\pi v, c(q)\right) e^{(k_0-2k_1)t}.$$

On en déduit l'existence d'une constante C_2 telle que sous les mêmes hypothèses :

$$\|\psi(\rho,0) - Z(\rho,t)\| \leq \int_{\tau=0}^{t} \left\|\frac{D}{dt}Z(q,\tau)\right\|\ d\tau \leq C_2 d\left(\pi v, c(q)\right),$$

donc

$$\left\|E_v^0(c(q)) - E_v^t(c(q))\right\| \leq \int_{\rho=0}^{q} C_2 d\left(\pi v, c(\rho)\right) \left\|\frac{dc}{dq}(\rho)\right\| \; d\rho \leq \frac{C_2}{2} d\left(\pi v, c(q)\right)^2 .$$

Pour $\tau > 0$, la courbe $c_\tau(q)$ vérifie encore les hypothèses, donc

$$\begin{aligned}\left\|E_v^\tau(c(q)) - E_v^{t+\tau}(c(q))\right\| &\leq \left\|Y_-(v,\tau)^{-1}\left[E_v^0(c(q)) - E_v^t(c(q))\right]\right\| \\ &\leq e^{k_0\tau}\frac{C_2}{2}\left(e^{-k_1\tau} d\left(\pi v, c(q)\right)\right)^2 \leq \frac{C_2}{2} e^{(k_0-2k_1)\tau} d\left(\pi v, c(q)\right)^2 .\end{aligned}$$

La famille $E_v^t(c(q))$ vérifie donc la condition de Cauchy uniforme, il faut démontrer que la limite $E_v(c(q))$ est indépendante du choix de la courbe. Pour $w \in T^1M$, $r \in \mathbf{R}$, $\xi \in T_{\pi w}M$, si $\tilde{J}(w,r)$ est le champ de jacobi le long de l'orbite de w tel que $J(w,0) = 0_{T_{\pi w}M}$ et $J'(w,0) = \mathrm{Id}_{T_{\pi w}M}$, l'application linéaire tangente à l'exponentielle vérifie ([9], 3.46 p.117) :

$$T_\xi \exp_{\pi w} rw = \frac{1}{r}\tilde{J}(w,r)\xi. \tag{42}$$

Des bornes sur la courbure sectionnelle résulte l'existence d'une constante C_3 telle que pour tout r inférieur à un :

$$\left\|\tilde{J}(w,r) - r\mathrm{Id}_{T_{\pi w}M}\right\| \leq C_3 r^3.$$

La dérivée de l'exponentielle en tout vecteur nul est l'identité de l'espace vectoriel tangent, et on a $\psi(0,t) = \mathrm{Id}_{\varphi_t v^\perp}$. Quitte à se placer dans une carte au voisinage de $c_t(q)$, on observe l'existence d'une constante C_4 telle que

$$\begin{aligned}&\left\|\exp^{-1}_{\pi\varphi_t v} c_t(q) - \int_{\rho=0}^{q} \psi(\rho,t)\frac{\partial c_t}{\partial q}(\rho)\; d\rho\right\| \\ &\leq C_4 d\left(\pi\varphi_t v, c_t(q)\right)^2 + C_4 e^{-k_1 t} d\left(\pi\varphi_t v, c_t(q)\right).\end{aligned} \tag{43}$$

Le premier terme du second membre provient de l'effet des bornes de la courbure sectionnelle sur l'exponentielle, et le deuxième de la seconde inéquation (12). De même que pour l'estimation (43) il existe une constante C_5 telle que :

$$\left\|\left(\mathrm{Id}_{\varphi_t v^\perp} - \prod_{\varphi_t v}\right)\exp^{-1}_{\pi\varphi_t v} c_t(q)\right\| \leq C_5 d\left(\pi\varphi_t v, c_t(q)\right)^2 .$$

On en déduit donc l'inégalité

$$\begin{aligned}&\left\|E_v^t(c(q)) - Y_-(v,t)^{-1}\prod_{\varphi_t v}\exp^{-1}_{\pi\varphi_t v}\Phi_t^v(c(q))\right\| \\ &\leq (C_5 + C_4)e^{(k_0-2k_1)t}\left(d\left(\pi v, c(q)\right) + d\left(\pi v, c(q)\right)^2\right),\end{aligned}$$

ce qui donne la formule *iii)* du théorème et démontre que la limite $E_v(c(q))$ est indépendante du choix de la courbe c. ◇

Théorème 7.2 *L'application de linéarisation E_v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur M, sa dérivée en un point $y \in M$ vaut le transfert stable étendu $\widetilde{X}_v(y)$ de la section 5.3.*

Démonstration : La dérivée dans la direction ξ orthogonale à $v(y, v_{+\infty})^\perp$ découle de la formule (41) et du lemme 7.1. La dérivée dans la direction longitudinale découle immédiatement du point ii) de la formule (40). Comme ces dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur M d'après la proposition 5.1, on en déduit que la linéarisation E_v est de classe $\mathcal{C}^2$. ◇

De ce qui précède on déduit :

Corollaire 7.1 *Pour tout $v \in T^1M$ la linéarisation E_v est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de M dans $T_{\pi(v)}M$.*

Démonstration : Il est clair que l'application E_v est surjective. C'est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local d'après le théorème 7.2, c'est donc un revêtement de $T_{\pi(v)}M$ (qui est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$), c'est donc un difféomorphisme. ◇

Remarque 7.1 D'après la remarque 5.1, il se pourrait que la linéarisation soit bien plus régulière.

8 Applications géométriques des linéarisations

Dans toute la section, la variété M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g *négativement* $1/4$-*pincée*, telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée.

8.1 Description d'une géodésique

Soit $v \in T^1M$. Soit $c(t)$ une courbe lisse dans M. L'image de la courbe c par la linéarisation est la courbe dans l'espace vectoriel $T_{\pi v}M$:

$$\xi(t) = E_v(c(t)).$$

Sa dérivée vaut :

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \widetilde{X}(c(t), v)\ \frac{dc}{dt}(t).$$

Son accélération vaut :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}(t) = D_{\frac{dc}{dt}(t)}\widetilde{X}(c(t), v)\ \frac{dc}{dt}(t) + \widetilde{X}(c(t), v)\ \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}(t).$$

On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 8.1 *Soit $\xi(t)$ une courbe dans l'espace vectoriel $T_{\pi v}M$ et $c(t)$ son image réciproque par la linéarisation E_v. Celle-ci est une géodésique si et seulement si la courbe ξ satisfait l'équation différentielle :*

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}(t) = D_{\frac{dc}{dt}(t)}\widetilde{X}(c(t),v)\ \frac{dc}{dt}(t)$$

$$= \left[D_{\widetilde{X}(E_v^{-1}\xi(t),v)^{-1}\frac{d\xi}{dt}(t)}\widetilde{X}(E_v^{-1}\xi(t),v)\right]\ \widetilde{X}(E_v^{-1}\xi(t),v)^{-1}\ \frac{d\xi}{dt}(t).$$

8.2 Cartes vectorielles de la sphère à l'infini et du fibré tangent unitaire

La linéarisation de la variété M permet de construire des cartes vectorielles de la sphère à l'infini.

Définition 8.1 *À un vecteur unitaire $v \in T^1M$ et un point à l'infini $\theta \in \partial M\setminus\{v_{+\infty}\}$ on associe l'unique point z intersection de la géodésique qui joint θ à $v_{+\infty}$ avec l'horosphère $H_v(0)$. On définit $E_v(\theta) = E_v(z)$.*

On en déduit immédiatement des cartes sur l'espace des géodésiques orientées de M.

Définition 8.2 *À un vecteur $v \in T^1M$ et une géodésique γ allant d'un point à l'infini θ_1 vers un point à l'infini θ_2, tels que $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1 \neq v_{+\infty}$, $\theta_2 \neq v_{-\infty}$, on associe le couple de vecteurs $E_v(\gamma) = (E_v(\theta_1), E_{-v}(\theta_2))$.*

Définition 8.3 *À deux vecteurs $v, w \in T^1M$ tels que $v_{-\infty} \neq w_{+\infty}$ et $v_{+\infty} \neq w_{-\infty}$, on associe l'unique point y intersection de la géodésique qui joint $w_{-\infty}$ à $v_{+\infty}$ avec l'horosphère $H_w(0)$. On défint :*

$$E_v(w) = (E_v(y), E_{-v}(w_{+\infty})).$$

Proposition 8.2 *Pour des vecteurs unitaires v et w tels que dans la définition précédente et pour tout réel t on a*

$$E_v(\varphi_t w) = E_v(w) + (tv, 0).$$

8.3 Cartes vectorielles du fibré vectoriel tangent au fibré tangent unitaire

La dérivée de la carte de la définition 8.3 donne une carte du fibré vectoriel tangent au fibré tangent unitaire ; la dérivée dans la direction du flot géodésique est fournie par la proposition 8.2 ; dans la direction orthogonale on a le résultat suivant.

Proposition 8.3 *Soient des vecteurs unitaires v et w tels que $v_{-\infty} \neq w_{+\infty}$ et $v_{+\infty} \neq w_{-\infty}$, et $\xi = \xi_+ + \xi_-$ un vecteur tangent à T^1M en w tel que $\xi_+ \in E^U(w)$, et $\xi_- \in E^S(w)$. La dérivée de la carte vectorielle de T^1M vaut, avec les notations de la section précédente :*

$$dE_v(w)\xi =$$

$$(X(v(y, v_{+\infty}), v)\underline{X}(-w, v(y, w_{-\infty}))d\pi\xi_-,$$
$$X(-v(z, v_{-\infty}), -v)\underline{X}(w, v(z, w_{+\infty}))d\pi\xi_+)$$

où le point y est l'intersection de la géodésique qui joint $w_{-\infty}$ à $v_{+\infty}$ avec l'horosphère $H_w(0)$ et le point z est l'intersection de la géodésique qui joint $w_{+\infty}$ à $v_{-\infty}$ avec l'horosphère $H_{-v}(0)$.

Remarque 8.1 La dérivée à l'origine v de la carte vectorielle en v dans la direction $\xi = \xi_+ + \xi_-$ vaut $(d\pi\xi_+, d\pi\xi_-)$.

9 Conjugaison de flots géodésiques

Définition 9.1 *Étant donnée deux métriques riemanniennes g_1, g_2 sur une variété différentielle M et un vecteur tangent v unitaire pour g_1, soit $\mathcal{F}_{g_1,g_2,v}$ le fibré vectoriel au-dessus du fibré tangent T_2^1M unitaire pour g_2, dont la fibre au-dessus d'un vecteur V est formée des couples de morphismes linéaires de l'orthogonal de v dans celui de V.*

On a $\dim \mathcal{F}_{g_1,g_2,v} = 2n - 1 + 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1$. L'uniformité des objets stables pour les métriques négativement 1/4-pincées entraîne une certaine forme de rigidité géométrique. Sa description est rassemblée dans les deux théorèmes qui suivent.

Théorème 9.1 *Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie de deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 à courbure négativement 1/4-pincée, telles que pour chacune la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée pour chacune des métriques. Soit v un élément de T_1^1M. L'ensemble des $\mathcal{C}^1$-conjugaisons entre les deux flots géodésiques, qui préservent l'antipodie, peut être injecté dans la variété $\mathcal{F}_{g_1,g_2,v}$; une telle conjugaison est déterminée par sa dérivée en v.*

Démonstration : La conjugaison $h : T_1^1M \to T_2^1M$ vérifie $h\varphi_t^1 v = \varphi_t^2 hv$ pour tous $t \in \mathbf{R}$ et $v \in T_1^1M$. Étant donné un vecteur $v \in T_1^1M$ et une variation v_q de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $v_0 = v$, avec

$$j_1(t) = \frac{\partial \pi\varphi_t^1 v_q}{\partial q}(0, t) = Y_{-,1}(v, t)x + Y_{+,1}(v, t)y,$$

la différentielle de la conjugaison dh envoie le champ de Jacobi relevé

$$\frac{\partial \varphi_t^1 v_q}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_1' \end{pmatrix}(t) = \mathcal{Y}_{-,1}(v,t)\begin{pmatrix} x \\ S_1(v)x \end{pmatrix} + \mathcal{Y}_{+,1}(v,t)\begin{pmatrix} y \\ U_1(v)y \end{pmatrix} \tag{44}$$

sur le champ

$$\frac{\partial h\varphi_t^1 v_q}{\partial q}(0,t) = \frac{\partial \varphi_t^2 h v_q}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix} j_2 \\ j_2' \end{pmatrix}(t)$$

$$= \mathcal{Y}_{-,2}(hv,t)\begin{pmatrix} \mathcal{A}(v)x \\ S_2(hv)\mathcal{A}(v)x \end{pmatrix} + \mathcal{Y}_{+,2}(hv,t)\begin{pmatrix} \mathcal{B}(v)y \\ U_2(hv)\mathcal{B}(v)y \end{pmatrix} \tag{45}$$

où $\mathcal{A}(v)$ et $\mathcal{B}(v)$ sont des isomorphismes linéaires de $v^\perp$ dans $(hv)^\perp$ qui ne dépendent que de v, et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $T_1^1 M$. La préservation de l'antipodie par la conjugaison h entraîne la propriété

$$\mathcal{A}(-v) = \mathcal{B}(v) \tag{46}$$

pour tout vecteur $v \in T_1^1 M$. Soit θ_q une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ à valeurs dans la sphère à l'infini ∂M de M, avec $\theta_0 = \theta$. Étant donnés deux points z et $\tilde{z}$ de M, tels que les vecteurs $v^1(z,\theta)$ et $v^1(\tilde{z},\theta)$ appartiennent à la même variété stable, les conjugués $hv^1(z,\theta)$ et $hv^1(\tilde{z},\theta)$ appartiennent à une même variété stable pour le flot φ_t^2 ; son centre est noté $h(\theta)$. Le champ

$$\frac{\partial \varphi_t^1 v^1(z,\theta_q)}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_1' \end{pmatrix}(t)$$

$$= \mathcal{Y}_{-,1}(v^1(z,\theta),t)\begin{pmatrix} x \\ S_1(v^1(z,\theta))x \end{pmatrix} + \mathcal{Y}_{+,1}(v^1(z,\theta),t)\begin{pmatrix} y \\ U_1(v^1(z,\theta))y \end{pmatrix}$$

est envoyé par dh sur le champ

$$\frac{\partial h\varphi_t^1 v^1(z,\theta_q)}{\partial q}(0,t) = \frac{\partial \varphi_t^2 h v^1(z,\theta_q)}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix} j_2 \\ j_2' \end{pmatrix}(t)$$

$$= \mathcal{Y}_{-,2}(hv^1(z,\theta),t)\begin{pmatrix} \mathcal{A}(v^1(z,\theta))x \\ S_2(hv^1(z,\theta))\mathcal{A}(v^1(z,\theta))x \end{pmatrix}$$

$$+\mathcal{Y}_{+,2}(hv^1(z,\theta),t)\begin{pmatrix} \mathcal{B}\left(v^1(z,\theta)\right)y \\ U_2(hv^1(z,\theta))\mathcal{B}\left(v^1(z,\theta)\right)y \end{pmatrix}.$$

De même le champ

$$\frac{\partial \varphi_t^1 v^1(\tilde{z},\theta_q)}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix} \widetilde{j_1} \\ \widetilde{j_1'} \end{pmatrix}(t)$$

$$= \mathcal{Y}_{-,1}(v^1(\tilde{z},\theta),t)\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ S_1(v^1(\tilde{z},\theta))\tilde{x} \end{pmatrix} + \mathcal{Y}_{+,1}(v^1(\tilde{z},\theta),t)\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ U_1(v^1(\tilde{z},\theta))\tilde{y} \end{pmatrix}$$

est envoyé par dh sur le champ

$$\begin{aligned}\frac{\partial h\varphi_t^1 v^1(\tilde z,\theta_q)}{\partial q}(0,t) &= \frac{\partial \varphi_t^2 h v^1(\tilde z,\theta_q)}{\partial q}(0,t) = \begin{pmatrix}\widetilde{j_2}\\ \widetilde{j_2'}\end{pmatrix}(t)\\ &= \mathcal{Y}_{-,2}(hv^1(\tilde z,\theta),t)\begin{pmatrix}\mathcal{A}(v^1(\tilde z,\theta))\tilde x\\ S_2(hv^1(\tilde z,\theta))\mathcal{A}(v^1(\tilde z,\theta))\tilde x\end{pmatrix}\\ &+\mathcal{Y}_{+,2}(hv^1(y,\theta),t)\begin{pmatrix}\mathcal{B}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right)\tilde y\\ U_2(hv^1(\tilde z,\theta))\mathcal{B}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right)\tilde y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

À la limite quand t tend vers $+\infty$, d'après le théorème 5.3, on a :

$$\tilde y = \underline{X_1}\left(v^1(z,\theta), v^1(\tilde z,\theta)\right) y$$

puisque $B_{\tilde z}(\theta,z)=0$, et

$$\mathcal{B}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right)\tilde y = \underline{X_2}\left(hv^1(z,\theta), hv^1(\tilde z,\theta)\right)\mathcal{B}\left(v^1(z,\theta)\right) y,$$

d'où l'on déduit par la généralité des hypothèses :

$$\mathcal{B}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right)\underline{X_1}\left(v^1(z,\theta), v^1(\tilde z,\theta)\right) = \underline{X_2}\left(hv^1(z,\theta), hv^1(\tilde z,\theta)\right)\mathcal{B}\left(v^1(z,\theta)\right).$$

Il en résulte le fait suivant, où la deuxième assertion résulte de la formule (46).

Lemme 9.1 *Le champ d'endomorphismes $\mathcal{B}$ commute avec le transfert instable dans une variété stable, et même centre-stable, donnée. Le champ d'endomorphismes $\mathcal{A}$ commute avec le transfert instable dans une variété instable, et même centre-instable, donnée.*

Soient $\theta \in \partial M$, et $z, \tilde z$ deux points de M appartenant à une même horosphère pour g_1 centrée en θ. Soient v_q et $\widetilde{v_q}$ deux courbes de $W_1^S(v^1(z,\theta))$ telles que $v_0 = v^1(z,\theta)$, $\widetilde{v_0} = v^1(\tilde z,\theta)$ et vérifiant l'équivalence :

$$\left.\frac{\partial \varphi_t^1 v_q}{\partial q}\right]_{q=0} \sim \left.\frac{\partial \varphi_t^1 \widetilde{v_q}}{\partial q}\right]_{q=0} \qquad [t\to+\infty].$$

Puisque la conjugaison h est différentiable, on a :

$$\left.\frac{\partial \varphi_t^2 h v_q}{\partial q}\right]_{q=0} \sim \left.\frac{\partial \varphi_t^2 h\widetilde{v_q}}{\partial q}\right]_{q=0} \qquad [t\to+\infty].$$

En reprenant les notations précédentes avec

$$x = \left.\frac{\partial \pi v_q}{\partial q}\right]_{q=0}, \quad \tilde x = \left.\frac{\partial \pi \widetilde{v_q}}{\partial q}\right]_{q=0},$$

cela donne pour les champs de Jacobi associés :

$$Y_{-,1}\left(v^1(z,\theta),t\right)x \sim Y_{-,1}\left(v^1(\tilde z,\theta),t\right)\tilde x \qquad [t\to+\infty],$$

$$Y_{-,2}\left(v^1(z,\theta),t\right)\mathcal{A}\left(v^1(z,\theta)\right)x \sim Y_{-,2}\left(v^1(\tilde z,\theta),t\right)\mathcal{A}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right)\tilde x \quad [t\to+\infty].$$

Le théorème 5.2 fournit les identités qui en découlent :

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_1\left(v^1(z,\theta),v^1(\tilde z,\theta)\right) & x & = & & \tilde x \\ \mathcal{A}\left(v^1(z,\theta)\right) & x & = & X_2\left(hv^1(z,\theta),hv^1(\tilde z,\theta)\right)\cdot\mathcal{A}\left(v^1(\tilde z,\theta)\right) & \tilde x, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit par la genéralité des hypothèses le résultat suivant.

Lemme 9.2 *Le champ d'endomorphismes $\mathcal{A}$ commute avec le transfert stable dans une variété stable, et même centre-stable, donnée. Le champ d'endomorphismes $\mathcal{B}$ commute avec le transfert stable dans une variété instable, et même centre-instable, donnée.*

On peut joindre deux vecteurs unitaires quelconques en se déplaçant le long des variétés stables et instables. De la relation (46), des lemmes 9.1 et 9.2 il résulte que la connaissance des matrices carrées $\mathcal{A}(v)$ et $\mathcal{B}(v)$ d'ordre $n-1$ en un élément v suffit à déterminer la différentielle dh de la conjugaison h en tout point. La donnée de $h(v)\in T^1_2M$ avec dh détermine la conjugaison h. Une conjugaison quelconque est donc déterminée par un élement de $\mathcal{F}_{g_1,g_2,v}$. $\diamond$

10 Transformées de Fourier gauches

Dans toute la section, la variété M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ complète, connexe, simplement connexe, munie d'une métrique riemannienne g *négativement* $1/4$*-pincée* (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $k_0>0$ et $k_1>0$ telles que $k_1<k_0<2k_1$ et que la courbure sectionnelle satisfasse à l'encadrement $-k_0^2\le K\le -k_1^2<0$), telle que la dérivée covariante de l'endomorphisme de Ricatti stable soit bornée.

Définition 10.1 *Soient f une application continue à support compact de M dans $\mathbf{C}$, $p\in M$ et $v\in T^1_pM$. La transformée de Fourier en v de f est l'application de $T^\star_pM$ dans $\mathbf{C}$ définie par la formule :*

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{\xi\in T_pM} f(E_v^{-1}\xi)\ e^{i\omega\xi}\ d\lambda_p(\xi).$$

Le résultat suivant découle du théorème 7.2.

Théorème 10.1 *Soient f une application de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact de M dans $\mathbf{C}$, $p\in M$ et $v\in T^1_pM$. Pour tout $\omega\in T^\star_pM$ on a la relation :*

$$i\omega\widehat{f}(\omega)=-\int_{\xi\in T_pM} df(E_v^{-1}\xi)\widetilde{X}_v^{-1}(E_v^{-1}\xi)\ e^{i\omega\xi}\ d\lambda_p(\xi).$$

On peut retrouver les données, en appliquant directement les résultats connus pour la transformée de Fourier euclidienne .

Théorème 10.2 *Soient f une application continue à support compact de M dans $\mathbf{C}$, $p \in M$ et $v \in T^1_p M$. Pour tout $q \in M$ on a :*

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\omega \in T^*_p M} \widehat{f}(\omega)\ e^{i\omega E_v(q)}\ d\lambda_p(\omega).$$

Si de plus l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $q \in M$ on a :

$$df(q) = \frac{-1}{(2\pi)^n} \int_{\omega \in T^*_p M} i\omega\ \widetilde{X}_v(q)\ \widehat{f}(\omega)\ e^{i\omega E_v(q)}\ d\lambda_p(\omega).$$

Le symbole en v du gradient en $a \in M$ est donc $\omega \mapsto {}^t(-i\omega \widetilde{X}_v(a))$.

Références bibliographiques

[1] M. Arcostanzo. Des métriques finsleriennes sur le disque à partir d'une fonction distance entre les points du bord. *Comment. Math. Helv.* **69** (1994), 229–248.

[2] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed.* Springer : Berlin, 1978, 123–126.

[3] O. Boruvka *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften : Berlin, 1967.

[4] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in riemannian geometry*, North-Holland Mathematical Library, 1975, 29–30.

[5] C. Croke,V. Sharafutdinov. Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold. *Topology* **37** (1998), 1265–1273.

[6] S. Deans, *The Radon transform and some of its applications*, John Wiley and sons : New York, 1983, Krieger Publishing Co. : Malabar, 1993.

[7] P. Eberlein. When is a geodesic flow of Anosov type ? I. *Journal of Differential Geometry* **8** (1973), 437–463.

[8] P. Eberlein, U. Hamenstädt, V. Schroeder. Manifolds of nonpositive curvature. *Proc. Symp. Pure Math.* **54**, Part 3 (1993), 179–227.

[9] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian Geometry* second edition. Universitext, Springer : Berlin, 1987.

[10] E. Ghys, P. de la Harpe éditeurs. *Sur les groupes hyperboliques d'aprés Mikhael Gromov.* Birkhaüser : Boston, 1990.

[11] L. Green. The generalized geodesic flow. *Duke Mathematical Journal* **41** (1974), 115–126.

[12] U. Hamenstädt. Regularity of time-preserving conjugacies for contact Anosov flows with C^1-Anosov splitting. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **13** (1993), 65–72.

[13] U. Hamenstädt. Regularity at infinity of compact negatively curved manifolds. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14** (1994), 493–514.

[14] B. Hasselblatt Regularity of the Anosov splitting. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14** (1994), 645–666 .

[15] B. Hasselblatt Regularity of the Anosov splitting. II. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997), 169–172 .

[16] S. Helgason. *The Radon transform* second edition. Progress in Mathematics, Birkhäuser : Boston, 1999, 1–26 et 93–112.

[17] S. Helgason. *Groups and geometric analysis* Academic Press : Orlando, 1984, 150–180.

[18] S. Helgason. The flat horocycle transform for a symmetric space. *Adv. Math.* **91** (1992), 232–251.

[19] S. Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces.* AMS Providence, Rhode Island (1994), 221–227.

[20] E. Hopf. Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus II. *Mathematische Annalen* **117** (1940), 590–608.

[21] M. Hirsch, C. Pugh. Smoothness of horocycle foliations. *Journal of Differential Geometry* **10** (1975), 225–238.

[22] P. Malliavin *Intégration et probabilités-analyse de Fourier et analyse spectrale.* Masson : Paris, 1982, 129–132.

[23] J.-P. Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Annals of Mathematics* **131** (1990), 151–162.

[24] J.-P. Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), 334–347.

[25] J.-P. Otal. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. *Revista Matemática Iberoamericana* **8** (1992), 441–456.

[26] Y. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surveys* **32** (1977), 55–114 ; from *Uspekhi Mat. Nauk* **32** (1977) 55–112.

[27] V. Sharafutdinov. On emission tomography of inhomogeneous media. *SIAM J. Appl. Math.* **55** (1995), 707–718 ; from *Tr. Inst. Mat.* **14** (1989) 221–245.

[28] V. Sharafutdinov. The X-ray transform of symmetric tensor fields. *Sib. Adv. Math.* **1** (1991), 160–184.