Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Maths Classiques, module LC4

Liste d'exercices n°1

Chap. 1 : Généralités sur les équations différentielles.

Exercice 1 a) Soit $I = \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle (ED) définie sur $I \times \Omega$ par $x' = 2\sqrt{x}$.
Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, rechercher la ou les solutions maximales de condition initiale (t_0, x_0). Préciser quand il y a unicité.
b) Même question pour l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $2\,x' = x^2 - 1$.
c) Même question pour l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $x' = 3\,(x^2)^{1/3}$.

Chap. 2 : Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exercice 2) On rappelle que si deux matrices A et B vérifient la relation $B = P^{-1}AP$ alors $\mathrm{e}^B = P^{-1}\mathrm{e}^A P$. Soit A une matrice réelle. Montrer que $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{trace}(A)}$. (On peut penser à la décomposition "$D + N$" de A, vue comme matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$).

Exercice 3) 1) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer l'exponentielle de la matrice A et donner un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $x' = Ax$.
$a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d)$ $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$
$e)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $f)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel.
2) Représenter le portrait de phase des solutions pour $a), b), c), d)$.

Exercice 4) Donner un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $x' = Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire e^{tA}.

Exercice 5) On considère l'équation différentielle (ED), $x' = A\,x$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
a) Montrer que si n est impair, alors $\det A = 0$ et (ED) admet des solutions constantes autres que 0.
b) Soient x et y deux solutions de (ED). Montrer que le produit scalaire $< x(t), y(t) >$ est constant. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'orbite $\mathcal{O}_{x_0}$ se trouve sur une sphère passant par x_0.

Exercice 6) Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & 2x - 3y \\ y'' & = & x - 2y\,. \end{array}\right.$$

Exercice 7) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer l'exponentielle de la matrice A et résoudre le système $x' = Ax + B(t)$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8) Résoudre sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ l'équation linéaire du 3^{eme} ordre suivante:

$$\text{(E.D)} \qquad y''' + y'' + y' + y = \cos t.$$

Montrer que (E.D) admet une solution et une seule de la forme $A\,t\cos t + B\,t\sin t$.

Exercice 9) Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont différentes de $2ik\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application continue périodique de période 1. On veut montrer que l'équation différentielle (E) : $x' = A\,x + B(t)$ admet une solution périodique de période 1 et une seule.

a) Donner une expression générale des solutions de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.

b) Montrer que dire qu'une solution est 1-périodique équivaut à l'égalité (*) :

$$(\mathrm{e}^A - I)\left(x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-u\,A} B(u)\,du\right) = -\mathrm{e}^A \int_t^{t+1} \mathrm{e}^{-u\,A}\,B(u)\,du\,.$$

c) Montrer que (*) équivaut au système :

$$(\mathrm{e}^A - I)x_0 = -\mathrm{e}^A \int_0^1 \mathrm{e}^{-u\,A}\,B(u)\,du\,,$$

$$(\mathrm{e}^A - I)\,(\,\mathrm{e}^{-t\,A}\,B(t)\,) = -\mathrm{e}^A\left(\mathrm{e}^{-A(t+1)}\,B(t+1) - \mathrm{e}^{-At}\,B(t)\right).$$

d) Conclure.