Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Maths Classiques, module LC4

Liste d'exercices n°2

Chap. 3 : Equations différentielles linéaires non autonomes.

Exercice 1) Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la dimension de l'espace des solutions *définies sur* $\mathbb{R}$.
(a) $tx' + 2x = 0$,
(b) $(t^2 - 1)x' - 2tx = 0$,
(c) $x' \sin^3 t - 2x \cos t = 0$.

Exercice 2) 1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $B : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ une fonction continûment dérivable sur I. Montrer que si $B'(t)B(t) = B(t)B'(t)$, alors $\left(\mathrm{e}^{B(t)}\right)' = B'(t)\mathrm{e}^{B(t)} = \mathrm{e}^{B(t)}B'(t)$.
2) Soit l'équation différentielle linéaire (E. D.) $\dot{x} = A(t)\,x$ où $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue sur I. Montrer que si $\forall t \in I, \forall s \in I, [A(t), A(s)] := A(t)\,A(s) - A(s)\,A(t) = 0$, alors la solution de (E. D.) de condition initiale (t_0, x_0) est

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds} \cdot x_0\,.$$

3)*Application:* Soit $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, tel que pour tout t de I, $A(t) = f(t)\,U + g(t)\,V$, où $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I, et U, V sont deux endomorphismes constants de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ qui commutent. Montrer que, *dans ce cas particulier*, la résolvante $R_{t_0}^t$ de l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)\,x$ s'écrit:
$R_{t_0}^t = \exp\left(\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right) U\right) \exp\left(\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right) V\right)$.
Calculer la résolvante de l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)\,x$ dans les deux cas suivants: $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, où a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos^2 t \\ 0 & 1 & \cos^2 t \\ 0 & 0 & \sin^2 t \end{pmatrix}$.

Exercice 3) 1) On considère pour $t \in]0, +\infty[$, le système (E) $x' = A(t)x + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$.
a) Soit (E_0) le système homogène associé à (E). Montrer que $u_1(t) = (t, 1)$ est solution de (E_0).
b) Soit $v = (0, 1)$. Déterminer des fonctions réelles c_1 et c_2 pour que $u_2(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)v$ soit solution de (E_0).
c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).
d) Trouver une solution particulière de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).
2) Résoudre pour $t \in]0, +\infty[$, l'équation différentielle $t^2 y'' - 2ty' + 2y = t$.

Exercice 4) Soit (f, g) une base de solutions de l'équation différentielle homogène :

$$x"(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0\,,$$

où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$.
a) Prouver que les zéros de f sont isolés.

b) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a un unique zéro de g. (On considérera le *wronskien* de f et g défini par $W = fg' - f'g$.)

Chap. 4 : Equations différentielles non linéaires.

Exercice 5) On considère l'équation différentielle de Riccati $x' = x^2 + t^2$ dans $\mathbb{R}$ et (t_0, x_0) appartenant à $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que par (t_0, x_0) il passe une unique solution maximale de cette équation. On note ϕ cette solution et $]a, b[$ son domaine de définition avec $-\infty \leq a < t_0 < b \leq +\infty$.
b) i) Montrer que, si b est infini, la fonction $g(t) = t + \frac{1}{\phi(t)}$ est définie pour t suffisamment grand. En déduire que b est fini.
ii) Établir, de la même manière, que a est fini.
iii) En déduire l'allure de la représentation graphique de ϕ.
c) On suppose que $t_0 = 0$. Quel lien y a-t-il entre la solution maximale de l'équation différentielle qui passe par le point $(0, -x_0)$ et celle qui passe par le point $(0, x_0)$? Que se passe-t-il lorsque $x_0 = 0$?

Exercice 6) Soient

$$U : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) & \mapsto & U(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{array} \quad \text{et} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \end{array}$$

On suppose que $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$. On considère *l'équation de Newton* pour une particule de masse m:

$$m \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = -\nabla U(q(t)) \,,$$

où le gradient ∇ d'une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) .$$

$F(t) = -\nabla U(q(t))$ est la force qui dérive du potentiel U. A l'instant t, $q(t)$ et $\dfrac{dq(t)}{dt}$ sont respectivement la position et la vitesse de la particule. On pose $p(t) = m\dfrac{dq(t)}{dt}$, et on fixe (t_0, p_0, q_0) (condition initiale).
a) Démontrer que le théorème de Cauchy s'applique.
b) Soit $(I, (p(t), q(t)))$ la solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, p_0, q_0). Montrer que l'on a l'intégrale première de l'énergie:

$$\forall t \in I, \ \frac{1}{2m} \|p(t)\|^2 + U(q(t)) = H_0 \,,$$

où H_0 est une constante.
c) On suppose que $U \geq 0$. Montrer que $\|p(t)\| \leq \sqrt{2mH_0}$, et que pour tout $t \in I$, $\|q(t)\| \leq \|q(t_0)\| + |t - t_0| \sqrt{\frac{2}{m} H_0}$.
d) Soit $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ la borne supérieure de I. Montrer que si $\beta < +\infty$, $(p(t), q(t))$ reste uniformément bornée lorsque $t \to \beta$. En déduire la valeur de β.