Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Mathématiques
Filière classique
LC4

Examen du 17 mai 2004

Durée 3h

Sont autorisées les notes de cours limitées à une feuille recto-verso, les calculettes ne sont pas autorisées. La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

Exercice I

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = x \sin y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Déterminer les points critiques de F.

   (b) Calculer la matrice hessienne de F.

   (c) La fonction F admet-elle des minima ou des maxima locaux ?

   (d) En traçant quelques courbes représentatives, représenter l'allure des ensembles de niveau de $\{F(x,y) = F_0\}$ (pour les valeurs $F_0 = 0, -1$ et 1 par exemple). Ces ensembles sont-ils des courbes régulières ?

2. On considère le champ de vecteurs $V = (V_1, V_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$V_1(x,y) = \sin y, \quad V_2(x,y) = x \cos y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   et l'équation différentielle associée

$$(\dot{x}, \dot{y}) = V(x,y) \text{ avec conditions initiales } x(0) = x_0, y(0) = y_0. \tag{1}$$

   (a) Tracer l'orbite du champ de vecteurs V passant par le point $(x_0, y_0) = (-\pi/2, \pi/2)$. (on ne cherchera pas à résoudre en général l'équation différentielle (1)).

   (b) Soit $t \in]a,b[\to (x(t), y(t))$ une solution de l'équation différentielle

$$(\dot{x}, \dot{y}) = V(x,y).$$

   Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$|x(t)| \leq C + |t|, \quad |y(t)| \leq C(1+t^2), \quad t \in]a,b[.$$

   En déduire que le champ de vecteurs V est complet.

   (c) Montrer $\{m_k = (0, k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des points d'équilibre de V.

   (d) Calculer la différentielle DV de l'application V.

   (e) Étudier le système différentiel $(\dot{u}, \dot{v}) = DV(m_1)(u,v)$, système linéarisé de V au point d'équilibre $m_1 = (0, \pi)$.

   (f) Sur une même figure, tracer les points d'équilibre (notamment m_1), les isoclines horizontale $\{V_2(x,y) = 0\}$ et verticales $\{V_1(x,y) = 0\}$, ainsi que quelques orbites du champ V.

   (g) Quel est le lien entre le champ de vecteurs V et la fonction F ? Discuter les rapports entre les figures des questions 1.(d) et 2.(f).

Exercice II

Question préliminaire : On pose $f(t) = t \ln |t|$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

Soit h la fonction définie sur $(\mathbb{R}^+)^3$ par

$$h(m) = x \ln x + y \ln y + z \ln z, \quad m = (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$$

et K l'ensemble défini par

$$K = \{m = (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3, x + y + z = 1\} .$$

On pose

$$b = \inf_{m \in K} h(m) \quad \text{et} \quad B = \sup_{m \in K} h(m) .$$

1. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^3$ et le dessiner.
2. Montrer que b et B sont atteints sur K et vérifier, sans calcul, que $B = 0$.
3. On pose $g(t) = f(t) + f(1 - t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
   (a) Déterminer $\beta = \inf_{0 \leq t \leq 1} g(t)$.
   (b) Vérifier que $\beta > h(1/3, 1/3, 1/3)$ et en déduire que b est atteint en un point de $K \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$.
   (c) Déterminer b en utilisant le théorème des extrema liés.

Exercice III

Soit Φ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(m) = \mathrm{e}^{-||m||^2}\, m, \quad m \in \mathbb{R}^n,$$

où $||\ \ ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On note $B(r)$ la boule $B(r) = \{m \in \mathbb{R}^n, ||m|| < r\}$.

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle $D\Phi$.
2. Montrer que $D\Phi(m)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ si m est dans la boule $B(1/\sqrt{2})$.
3. (a) Montrer que la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$, induit une bijection de $[0, 1/\sqrt{2}]$ dans un ensemble que l'on déterminera.
   (b) En déduire que Φ est injective sur la boule $B(1/\sqrt{2})$.
4. Conclure que Φ est un C^1 difféomorphisme de la boule $B(1/\sqrt{2})$ dans un ouvert que l'on précisera.