HYDRODYNAMIQUE. — *Mouvement lent d'un fluide visqueux à deux dimensions limité par des parois fixes*. Note de M. **J. Leray**.

Nous avons étudié le premier problème aux limites, relatif au système

$$(1)\quad \begin{cases} \nu\Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \nu\Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

1. *Cas où le domaine est l'extérieur du cercle* $x^2+y^2=a^2$. — Nous nous restreignons, ce qui est sans inconvénient, au cas où sont nulles les moyennes, prises le long de ce cercle, des composantes u, v et des composantes, normale et tangentielle, du vecteur donné. Nous définissons deux fonctions l et m par les conditions d'avoir respectivement les mêmes valeurs frontières que u et v et de satisfaire l'équation de la chaleur $\left(\nu\Delta l - \dfrac{\partial l}{\partial t} = 0\right)$.

Soient

$$L = \int_{-\infty}^{t} l\,dt \qquad \text{et} \qquad M = \int_{-\infty}^{t} m\,dt.$$

Il est alors aisé de construire, à l'aide d'une quadrature, une fonction $\mathcal{F}(z, t)$, analytique par rapport à $z = x + iy = \mathrm{R}e^{i\omega}$, telle que la solution du problème soit donnée par la formule

$$(2)\quad \begin{aligned} u(x,y,t) - iv = {} & l(x,y,t) - im \\ & - \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) \oint_{|\lambda|=1-\varepsilon} \mathrm{L}(\mathrm{R}, \omega - i\log\lambda, t)\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\frac{d\lambda}{\lambda} \\ & - \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) \oint_{|\lambda|=1-\varepsilon} \mathrm{M}(\mathrm{R}, \omega - i\log\lambda, t)\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\frac{d\lambda}{\lambda} - \mathcal{F}(z,t). \end{aligned}$$

Les calculs prouvant l'équivalence de cette solution et de celle due à M. Oseen (*Arkiv för matematik, astr. och fysik*, 14, 1919, p. 1) sont assez longs. L'emploi d'intégrales analogues à celles qui figurent dans (2) est également avantageux dans la démonstration du théorème suivant dont M. Oseen utilisa des cas particuliers : « Si les deux fonctions F_1 et F_2 satisfont l'équation de la chaleur hors du cercle $R = a$ et si, sur ce cercle, $F_1 + iF_2$ prend les mêmes valeurs qu'une fonction holomorphe pour $|z| > a$ et pour $z = \infty$, alors $\dfrac{\partial^{p+q}(F_1+iF_2)}{\partial x^p\,\partial y^q}$ et $\dfrac{\partial^{p+q}(F_1+iF_2)}{\partial R^p\,\partial\omega^q}$ prennent, chacune, sur tout cercle

$R = R_0 \geqq a$, les mêmes valeurs qu'une fonction analytique hors de ce cercle, ayant, au plus, à l'infini une singularité polaire. »

Enfin si nous faisons dans (2) :

$$p = 0 \qquad \text{et} \qquad q = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2+y^2}{4\nu t}}}{t} \qquad \text{ou} \qquad q = \frac{x-a}{t^2} e^{-\frac{(x-a)^2+y^2}{4\nu t}},$$

nous obtenons deux solutions particulières, intéressantes, du système (1). La seconde permet sans doute de ramener à la résolution d'une équation intégrale de Volterra le premier problème aux limites relatif à un domaine arbitraire. Donnons l'expression à laquelle elle se réduit lorsque l'extérieur du cercle devient le demi-plan : $X > 0$ et que $\nu = \frac{1}{4}$:

$$(3) \qquad V(X, Y, t) + iU$$
$$= \frac{X}{t^2} e^{-\frac{X^2+Y^2}{t}} + \frac{i}{4\pi} \int_{R(\lambda)=-\varepsilon} \frac{1 - \left(1 + \frac{2\lambda X}{t}\right) e^{-\frac{2\lambda X}{t}}}{\lambda^2} e^{\frac{\lambda^2}{t}} \frac{\lambda\lambda}{(X + iY - \lambda)^2}.$$

2. *Cas où le domaine est l'intérieur d'un contour convexe*, à rayon de courbure jamais nul ni infini. La solution du système (1) est de la forme $\left(\text{pour } \nu = \frac{1}{4}\right)$:

$$(4) \qquad v(x, y, t) + iu = -\int_{-\infty}^{t} \oint \Phi(s, \tau) e^{-i\varphi_s} [V(X, Y, t) + iU] \, ds$$
$$+ i \oint \Psi(s, t) \frac{e^{-i\varphi_s}}{X + iY} \, ds.$$

Le point (x, y) est intérieur au domaine; (X, Y) sont ses coordonnées par rapport au système cartésien mobile qui a pour origine le point du contour d'abscisse curviligne s et pour axe X la normale intérieure; φ_s est l'angle que fait avec Ox la tangente au point d'abscisse curviligne s; Φ et Ψ sont réelles et déterminées par un système d'équations de Volterra : en effet la première intégrale de (4) possède les propriétés usuelles des potentiels de double couche.

u et v admettent, à l'intérieur du domaine, des dérivées de tous les ordres par rapport à x et y.

On constate en outre aisément que si l'on fait tendre ν vers 0 la solution (u, v) du système (1) tend vers le gradient d'une fonction harmonique; seule la condition à la frontière relative à la composante normale de la vitesse reste vérifiée.