HYDRODYNAMIQUE. — *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Note de M. J. **Leray**, présentée par M. Henri Villat.

1. Le mouvement est supposé régi par les équations de Navier :

$$(1)\qquad \Delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x_i} = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{3} u_k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right); \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Le champ des vitesses à l'instant initial, $u_i(x, 0)$, est donné. Soit : $\mathcal{V}(t)$ la plus grande longueur de la vitesse à l'instant t,

$$\mathcal{J}^2(t) = \mathop{\mathrm{S}}_{i,k}\int\int\int\left[\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}\right]^2 dx_1\,dx_2\,dx_3, \qquad \mathcal{W}(t) = \mathop{\mathrm{S}}_{i}\int\int\int[u_i(x,t)]^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Nous étudions (¹) les solutions de (1) en utilisant le tenseur fondamental de M. Oseen (*Acta mathematica*, 34, 1911), la Méthode des approximations successives, la relation équivalente à la relation de dissipation de l'énergie :

$$(2)\qquad \frac{d\mathcal{W}(t)}{dt} = -2\mathcal{J}^2(t),$$

et les notions de forte et faible convergence en moyenne (F. Riesz, *Mathematische Annalen*, 69, 1910).

2. Nous nommons *solutions régulières pour* $t_1 < t < t_2$ les fonctions $u_i(x, t)$ qui satisfont pour ces valeurs de t les équations (1), et pour lesquelles $\mathcal{W}(t)$, $\mathcal{J}(t)$ et $\mathcal{V}(t)$ sont continues; *solutions régulières pour* $t_1 \leqq t < t_2$, les solutions régulières pour $t_1 < t < t_2$ telles que $u_i(x, t)$, $\mathcal{W}(t)$, $\mathcal{J}(t)$ et $\mathcal{V}(t)$ sont continus pour $t = t_1$; *solutions semi-régulières pour* $t_1 \leqq t < t_2$ les solutions régulières pour $t_1 < t < t_2$ telles que $\mathcal{J}(t)$ reste borné et que $u_i(x, t)$ converge fortement en moyenne vers une limite quand t tend vers t_1. Si $\mathcal{W}(0)$, $\mathcal{J}(0)$ [et $\mathcal{V}(0)$] sont finis (²) il existe une solution semi-régulière [régulière] unique, $u_i(x, t)$ qui corresponde aux données; soit $0 < t < T$ son plus grand intervalle de régularité. Je ne sais si T est nécessairement

(¹) Nous avons appliqué précédemment à divers problèmes des procédés analogues (voir *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1180; 194, 1932, p. 1892; *Thèse*, *Journ. de Math.*, 12, 1933, p. 1). Dans le cas d'un liquide visqueux à deux dimensions, emplissant une courbe convexe fixe, nous avions obtenu des résultats en tout point semblables à ceux que nous énonçons ici.

(²) Le cas où $\mathcal{V}(0)$ n'est pas fini s'étudie à partir de celui où $\mathcal{V}(0)$ est fini.

infini. Supposons T infini : ni $\mathcal{V}(t)$, ni $\mathcal{J}(t)$ ne restent bornés quand t tend vers T;

$$\mathcal{J}(t) > A_0 (T - t)^{-\frac{1}{4}} \qquad (A_i,\ \text{constantes numériques}); \tag{3}$$

(2) et (3) donnent

$$16 A_0^4 T < \mathcal{W}^2(0). \tag{4}$$

Faisons dans (3) $t = 0$, comparons à (4), nous constatons que *si*

$$\mathcal{W}(0)\mathcal{J}^2(0) \leqq 4 A_0^4,$$

le mouvement ne peut pas devenir irrégulier ($T = +\infty$).

D'autre part nous avons, quand $T = +\infty$,

$$\mathcal{J}(t) < A_1 \sqrt{\mathcal{W}(0)}\, t^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(t) < A_2 \sqrt{\mathcal{W}(0)}\, t^{-\frac{3}{4}} \tag{5}$$

pour $t > A_3 \mathcal{W}^2(0)$.

3. Définissons comme suit *une solution turbulente* $U_i(x, t)$, $U_{i,k}(x, t)$; on a, pour toutes les fonctions $a(x, t)$ et pour tous les vecteurs $a_i(x, t)$ de divergence nulle,

$$\underset{i}{\mathrm{S}} \iiint [U_i(x, t) a_i(x, t) - u_i(x, 0) a_i(x, 0)]\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$
$$= \int_0^t dt' \iiint \left\{ \underset{i}{\mathrm{S}} U_i \left[\Delta a_i + \frac{\partial a_i}{\partial t'}\right] - \underset{i,k}{\mathrm{S}} a_i U_k [U_{i,k} - U_{k,i}] \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3;$$

$$\mathrm{S} \iiint U_i^2(x, t)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 - \mathcal{W}(0) + 2 \underset{i,k}{\mathrm{S}} \int_0^t dt' \iiint U_{i,k}^2(x, t')\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

est inférieur ou égal à une fonction jamais positive ni croissante; pour presque toutes les valeurs de t l'égalité est réalisée et l'on a

$$\iiint \left[U_i(x, t) \frac{\partial a(x, t)}{\partial x_k} + U_{i,k}(x, t) a(x, t) \right] \delta x = \qquad \text{et} \qquad \underset{i}{\mathrm{S}} U_{i,i}(x, t) = 0.$$

Les sommes étendues à l'espace, des carrés de a, a_i et de leurs dérivées, sont supposées fonctions continues de t; $\mathcal{W}(0)$ est supposé fini. Toute solution régulière est *a fortiori* solution turbulente.

Il existe ([1]) *au moins une solution turbulente définie pour* $t > 0$.

([1]) Pour étudier les solutions turbulentes nous utilisons fréquemment les propriétés des solutions semi-régulières.

Soient $(\theta_\lambda, T_\lambda)$ les intervalles de temps au cours desquels une solution turbulente coïncide avec une solution régulière. Il en existe nécessairement. Leur complémentaire est de mesure nulle. L'un d'eux s'étend jusqu'à $+\infty$ et contient l'instant $1/16\, \mathcal{W}^2(0)\, A_0^{-4}$. Les inégalités (5) sont encore applicables. Les instants T_λ sont ceux où chacune des solutions régulières considérées devient irrégulière. Si $\mathcal{J}(0)$ est borné, l'un de ces intervalles est $(0, T)$. Enfin

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\lambda} (T_\lambda - \theta_\lambda)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4}\, W(0)\, A_0^{-2}.$$

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Superquantification et mécaniques dans des espaces abstraits.* Note de M. **Jean-Louis Destouches**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Nous avons indiqué [1] quelques propriétés des fonctions d'ondes de l'espace (ψ) de Hilbert et de celles de l'espace (n). C'est cette étude que nous poursuivons ici.

1. Tout d'abord, il est préférable de demeurer dans l'espace (ψ), car la mécanique (n) soulève des difficultés : Θ n'est pas un vecteur de l'espace (n), la fonction hamiltonienne F n'est pas invariante dans un changement de coordonnées, le passage des θ_s aux opérateurs $h/2\pi i\, \partial/\partial n_s$ est insuffisamment justifié, ceux-ci ne peuvent pas opérer sur les $\Psi(\mathrm{N}, t)$, enfin il n'y a pas d'approximation analogue à l'optique géométrique.

Au contraire, les principes de la mécanique ondulatoire se transposent aisément dans la mécanique (ψ) :

1° A chaque grandeur concernant l'ensemble des systèmes correspond un opérateur qui est son propre adjoint, en définissant convenablement l'opérateur adjoint. On a : $\mathbf{Y}_s = Y_s$; $\mathbf{P}_s = h/2\pi i\, \partial/\partial Y_s$; $\mathbf{n}_s = Y_s\, \partial/\partial Y_s$.

2° Le principe de quantification revient à n'accepter comme fonction propre et comme fonction d'ondes que des fonctions entières de toutes les variables y_r, dont les coefficients du développement en série de Taylor sont soumis à une certaine condition de convergence.

3° Le principe de décomposition spectrale se transpose sans modification. Il permet d'étendre la théorie au cas où le nombre de systèmes de l'assemblée est laissé indéterminé.

[1] J.-L. Destouches, *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 1374.