immédiatement les propriétés connues sur la correspondance des rayons de courbure premiers dans les transformations conformes (Transon [1]), Laisant [2], Masotti [3], Tzitzéica [4]], et de les étendre aux correspondances de rayons de courbure seconds.

g. Si deux fonctions analytiques ont en un point mêmes rayons ρ_ψ et ρ_φ, elles ont mêmes rayons ρ_α pour toutes les isoclines et l'on peut dire que les fonctions sont osculatrices. Elles ont alors mêmes termes en z et z^2 dans f.

Deux fonctions ayant mêmes rayons ρ_φ, ρ'_φ, ρ_ψ, ρ'_ψ ont mêmes termes en z et z^2 et même partie imaginaire du coefficient de z^3. Les isoclines ne sont alors pas forcément surosculatrices et la condition imposée laisse la partie réelle du coefficient de z^3 arbitraire. On peut appeler surosculatrices en un point les fonctions ayant en ce point, non seulement l'équipotentielle et la ligne de courant, mais toutes les isoclines surosculatrices. Alors les termes en z, z^2, z^3 sont les mêmes. Ces propriétés s'étendent de deux en deux degrés.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des proues* [5]. Note de M. **Jean Leray**, présentée par M. Henri Villat.

L'étude d'un courant qui heurte un obstacle tranchant pose le problème suivant :

Problème du sillage. — *On demande de transformer conformément un plan entaillé le long d'une demi-droite (le plan du potentiel complexe f qu'entaille le demi-axe réel positif) en un domaine (d) d'un plan $z = x + iy$*

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, 8, 1869, p. 114.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15, 1887, p. 39.

(3) *Rendiconti Acc. Lincei*, 6e série, 15, 1932, p. 519.

(4) *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 476.

(5) M. Villat a fourni le moyen de construire simplement des solutions approchées de ces problèmes (voir ses *Leçons sur l'Hydrodynamique*, Paris, 1929).

M. Quarleri et M. Schmieden ont tenté, sans y réussir, de construire des solutions exactes du problème du sillage.

Le problème voisin du jet symétrique (c'est-à-dire du sillage symétrique dans un canal) a été résolu rigoureusement en 1926 par M. Weinstein, sous des hypothèses assez restrictives; depuis sa méthode a eu son champ d'application étendu par MM. Hamel, H. Weyl, Friedrichs (cf. Leray-Weinstein, *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 430); toutefois cette méthode de M. Weinstein ne serait pas susceptible de fournir la totalité des résultats que nous allons énoncer.

dont la frontière se compose d'un arc de courbe donné (l'obstacle) et de deux lignes libres inconnues; celles-ci joignent le point à l'infini aux extrémités de l'obstacle; en chacun de leurs points la transformation cherchée doit conserver les longueurs; elle doit en outre associer les points à l'infini des plans z et f en y conservant les directions (la direction de l'axe des x est celle du courant) :

Par hypothèse la courbe-obstacle sera de la classe B_h $(1/2 < h \leqq 1)$ et deux de ses points devront toujours avoir des ordonnées différentes, sauf si le segment qui les joint se trouve appartenir à cette courbe.

En poursuivant les recherches de M. Levi-Cività [1], M. Brillouin [2] et M. Villat [3] ont constaté qu'un sillage ne peut représenter une réalité physique que si les lignes libres quittent l'obstacle de l'une des deux façons que voici :

Détachement vers l'aval. — La ligne libre se dirige du côté aval de l'obstacle; elle présente en son extrémité une courbure infinie ou ne se raccorde pas à l'obstacle [4].

Détachement en proue. — La ligne libre se raccorde en son extrémité à l'obstacle et y présente une courbure finie.

Ainsi s'est posé un second problème :

Problème de la proue. — *Étant donné un obstacle* $\widehat{B_0C_0}$, *trouver un sillage correspondant à un obstacle* $\widehat{BC}$, *dont les propriétés soient les suivantes :* $\widehat{BC}$ *fait partie de* $\widehat{B_0C_0}$; *le détachement au point* B (*ou* C) *est en proue, ou bien ce point est en* B_0 (*ou* C_0) *et ce détachement est vers l'aval* [5].

La théorie des équations fonctionnelles que j'ai faite en collaboration avec M. Schauder [6] permet de discuter ces deux problèmes :

---

(1) *Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo*, 23, 1907, p. 1.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 23, 1911, p. 145.

(3) *Thèse*, *Annales de l'École Normale supérieure*, 28, 1911, p. 203; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 10, 1914, p. 231.

(4) Ce second terme de l'alternative se présente quand l'obstacle est un segment parallèle au courant; ce cas exceptionnel intervient nécessairement dans nos considérations, étant forme limite des obstacles envisagés.

(5) Nous imposons en outre la restriction suivante : Le point de détachement inférieur B (supérieur C) sera choisi entre l'extrémité inférieure B_0 (supérieure C_0) de l'obstacle et le point B_1 (C_1) où la courbe-obstacle fait avec Ox l'angle de plus petite (plus grande) valeur algébrique.

(6) Leray-Schauder, *Annales de l'École Normale supérieure*, 51, 1934, p. 45 (cf. théorème fondamental et théorème I, p. 63 et 64).

1° Les équations intégro-différentielles auxquelles M. Villat ([1]) les a ramenés sont du type $x = \mathcal{F}(x)$.

2° La discussion de ces équations est immédiate quand l'obstacle est un segment rectiligne.

3° Envisageons (en supposant qu'il en existe) les sillages correspondant à une famille continue d'obstacles. Quelques majorations faciles permettent de limiter les longueurs de leurs images dans le plan f. On en déduit que leurs lignes libres constituent un ensemble de courbes compact en soi. D'après les formules de M. Villat y est une fonction monotone le long de chacune d'elles; l'obstacle et ses deux lignes libres constituent donc une courbe sans point double (le cas où l'obstacle est parallèle au courant faisant toutefois exception). Or M. Courant ([2]) a prouvé la convergence uniforme de la représentation conforme normalisée d'un cercle sur l'intérieur d'une courbe de Jordan qui tend uniformément vers une courbe de Jordan limite. Par suite les correspondances $z(f)$ possèdent une égale continuité. On en conclut la possibilité de limiter *a priori* toutes les inconnues.

De ces trois points résulte que *chacun des problèmes énoncés possède toujours une solution au moins.* Ceci reste vrai quand on envisage les problèmes symétriques : l'obstacle et le sillage doivent être symétriques par rapport à une parallèle au courant. Une Note ultérieure précisera le nombre de solutions qu'ont ces problèmes pour diverses catégories importantes d'obstacles.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes.* Note ([3]) de M. **Henri Cartan**, présentée par M. Élie Cartan.

1. La question reste toujours posée de savoir quand une fonction de n variables complexes, méromorphe dans un domaine D, peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions holomorphes dans D. Poincaré a le

---

([1]) L'équation intégro-différentielle du problème du sillage est l'équation (113) de sa Thèse [c'est-à-dire le système (91), (97)]. L'ensemble des relations qui traduisent le problème de la proue se ramène par un artifice aisé à une seule équation fonctionnelle.

([2]) Courant, *Göttinger Nachrichten,* 1914, p. 101; 1922, p. 69; Radó, *Acta Litt. Ac. Sc.,* Szeged, **1**, 1923, p. 180.

([3]) Séance du 26 novembre 1934.