restants sont plus petits que 1 *en module. Alors on a*

$$y_k(n) = -m!\,A_{n-m-1}^{m+q}\sum_{s=1}^{r}\alpha_{sm}\frac{D_{sk}(1)}{H(1)} + o(n^{m+q})$$
$$+\sum_{\mu=1}^{p}\left[(-1)^{\lambda_\mu} g_{k\mu}\left(\frac{1}{\alpha_\mu}\right)\alpha_\mu^{\lambda_\mu+n-1}A_{n-1}^{\lambda_\mu-1} + o(n^{\lambda_\mu-1})\right],$$

où l'on a posé

$$D_\mu(z) = \frac{D(z)}{(z-\beta_\mu)^{\lambda_\mu}}, \qquad \beta_\mu = \frac{1}{\alpha_\mu}, \qquad g_{k\mu}(z) = -\sum_{s=1}^{r}[y_s + F_s(z)]\frac{D_{sk}(z)}{D_\mu(z)}.$$

VI. *Dans le cas où* $\Delta(z)$ *a des zéros de module* > 1, *soit* α_1 *le zéro du plus grand module, supposé seul, dont la multiplicité est égale à* λ_1. *Alors le rapport* $y_k(n)/\alpha_1^m n^{\lambda_1-1}$ *tend vers la limite*

$$\frac{(-1)^{\lambda_1-1}}{\lambda_1!}\alpha_1^{\lambda_1-1}\sum_{s=1}^{r}[y_s + F_s(\beta_1)]\frac{D_{sk}(\beta_1)}{D_1(\beta_1)}, \qquad D_1(z) = \frac{D(z)}{(z-\beta_1)^{\lambda_1}}.$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Discussion du problème de Dirichlet* (1). Note (2) de M. Jean Leray, présentée par M. Gaston Julia.

Soit l'équation aux dérivées partielles, du type elliptique

$$(1) \qquad f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0$$
$$(f_s'^2 < 4 f_r' f_t',\ f_r' > 0 \quad \text{pour } f = 0;\ r = z''_{x^2},\ \ldots,\ q = z'_y);$$

la surface d'équation (1) décomposera l'espace (r, s, t) en deux domaines.

Soit une solution $z(x, y)$ de (1) limitée par un contour γ d'un ou plusieurs tenants; soit Γ' le cylindre parallèle à Oz passant par γ; soit Γ l'intérieur de Γ'; Γ et Γ' seront tronqués par deux surfaces Σ_1 et Σ_2 entre lesquelles $z(x, y)$ se trouvera inclus. Pour majorer $p^2 + q^2$ en fonction de γ, Σ_1 et Σ_2, effectuons le changement de coordonnées

$$(2) \qquad x = Z, \qquad y = Y, \qquad z = X$$
$$(p = P^{-1},\ q = -QP^{-1},\ r = -Rp^3,\ s = -Rp^2q - Sp^2,\ t = -Rpq^2 - 2Spq - Tp),$$

---

(1) Cette Note prolonge le paragraphe 12 de ma Thèse (*Journal de Math.*, 9e série, 12, 1933, p. 16) et les Chapitres IV et V de mon travail en collaboration avec M. J. Schauder (*Ann. sc. de l'École Norm. sup.*, 51, 1934, p. 45).

(2) Séance du 12 juillet 1937.

et mettons (1) sous la forme

$$R + F(S, T, P, Q, x, y, z) = 0 \qquad (F_S'^2 \leqq 4 F_T'). \tag{3}$$

1. Cas général. — Commençons par énoncer certaines conditions :

Conditions imposées à l'équation (³). — Soient $\mathcal{E}_-(\pm)$, $\mathcal{E}_0(\pm)$, $\mathcal{E}_+(\pm)$ les ensembles des points (T, Q, x, y, z) en lesquels

$$F(0, T, \pm 0, Q, x, y, z) < 0, = 0, > 0;$$

a. sur $\mathcal{E}_0(+)$ et sur $\mathcal{E}_0(-)$, (Q, x, y, z) prend tous les systèmes de valeurs possibles;

b. $\pm F_z'(0, T, \pm 0, Q, x, y, z) \geqq 0$ sur $\mathcal{E}_0(\pm)$ et en son voisinage;

c. ou bien : c_1. $\mathcal{E}_0(+)$ et $\mathcal{E}_0(-)$ sont bornés; ou bien : c_2. $\mathcal{E}_-(\pm)$ et $\mathcal{E}_+(\pm)$ n'ont pas de point frontière commun;

d. quand (T, Q, x, y, z) est voisin de $\mathcal{E}_0(\pm)$ et que S et P sont voisins de 0, les dérivées secondes (cas c_1) ou troisièmes (cas c_2) de F sont bornées.

Condition imposée au contour. — Il existe une constante $\varepsilon \gtrless 0$ suivant que Γ est par rapport à Γ' du côté $x = \pm\infty$, telle que l'on ait sur Γ'

$$\varepsilon F\left(0, x_{y^2}'' - \varepsilon(1 + x_y'^2)^{\frac{3}{2}}, \pm 0, x_y', x, y, z\right) \geqq 0. \tag{4}$$

Remarques. — Tous les contours satisfont à (4) si $\mathcal{E}_-(\pm)$ et $\mathcal{E}_+(\pm)$ sont vides; sinon le problème de Dirichlet est impossible pour certains contours; *a.* entraîne que (4) est vérifiée quand le cylindre Γ est convexe et a une courbure suffisamment grande. Si l'inégalité *b.* n'a pas lieu en un point de $\mathcal{E}_0(\pm)$, où F est analytique, la majoration de $p^2 + q^2$ est impossible.

Extension d'un théorème de M. S. Bernstein (⁴). — Quand l'équation (1) et le contour γ vérifient les conditions précédentes on peut majorer $p^2 + q^2$ en fonction de γ, Σ_1 et Σ_2.

Ce théorème se déduit facilement d'une généralisation aisée de la notion de fonction surharmonique et du *lemme* fondamental de M. S. Bernstein : « Une fonction $w(p, q, x, y, z)$ n'admet de minimum intérieur sur aucune solution de (1), quand elle vérifie une certaine inégalité aux dérivées partielles, du second ordre ». M. S. Bernstein avait supposé f linéaire en r, s, t et avait limité ses conclusions au cas où $F(0, 0, \pm 0, Q, x, y, z) = 0$, ce qui faisait jouer un rôle spécial au cas où le cylindre Γ est convexe. Nos conditions sont au contraire invariantes pour toute transformation ponctuelle transformant entre elles les parallèles à l'axe des z.

(³) On suppose que les conditions énoncées restent vérifiées quand on permute les rôles de x et y; on peut supposer $|Q| \leqq 1$.

(⁴) *Ann. sc. de l'École Norm. sup.*, **29**, 1912, p. 455.

Extension d'un théorème d'existence de M. E. Picard (⁵). — (Corollaire du précédent.)

Supposons f linéaire en r, s, t; soient deux surfaces $\Sigma_1(x, y)$ et $\Sigma_2(x, y)$ sur lesquelles on ait respectivement $f \leqq 0$ et $f \geqq 0$; supposons $\Sigma_1 > \Sigma_2$; soit un contour régulier γ tracé entre Σ_1 et Σ_2. Si l'équation (1) et γ vérifient les conditions ci-dessus, γ limite au moins une solution régulière de (1).

2. Compléments :

Les deux théorèmes précédents valent encore quand on connaît ∞^3 intégrales de (1) permettant de tirer convenablement parti du *lemme* suivant : *Soient, dans l'espace* E^5 (p, q, x, y, z), *une variété* v^2 *image d'une intégrale de* (1) *et une variété* v^3 *image de* ∞^1 *intégrales de* (1) *sans enveloppe : tous les points d'intersection de* v^2 *et de* v^3 *ont un indice topologique positif.* Donnons un exemple, où ces intégrales connues sont des cylindres à génératrices parallèles au plan xy.

Les deux théorèmes précédents valent quand les conditions imposées au contour et à l'équation sont les suivantes :

Condition imposée au contour (dite condition des 3 points). — Le cylindre Γ est convexe; aucun plan parallèle à l'axe des z ne peut être limite de plans coupant γ en 3 points au moins.

Conditions imposées à l'équation (²). — $F(0, 0, P, Q, x, y, z)$ est indépendant de x et y quand P est voisin de 0; une intégrale variable de l'équation différentielle

$$P'_z + F(0, 0, P, Q, z) = 0,$$

où Q est un paramètre variable, ne peut tendre vers 0 pour une valeur de z sans converger uniformément vers 0 quel que soit z.

Application au calcul des variations. — Supposons que (1) exprime l'extrémum de

$$\iint g(p, q, z)\,dx\,dy \qquad (g''^2_{pq} < g''_{p^2} \cdot g''_{q^2};\; g''_{p^2} > 0).$$

Soit $h(p^2 + q^2, \text{arc.tg}\, p/q, z) = pg'_p(p, q, z) + qg'_q(p, q, z) - g(p, q, z)$; h croît avec $p^2 + q^2$. Le système des conditions imposées à (1) par ce paragraphe-ci équivaut au suivant :

Quand $p^2 + q^2 \to \infty$, h doit tendre uniformément vers sa limite (finie ou infinie) et cette limite doit être indépendante de z.

(⁵) Voir les *Leçons* de M. E. Picard, rédigées par M. Brelot (*Cahiers scientifiques* de M. Julia, 1930).