segment, $f(M)$ est forcément constante sur E. Mais ceci peut devenir faux si E a une longueur infinie. *Entre autres exemples, nous avons construit dans le plan un arc simple de Jordan γ sur lequel est définie une fonction numérique continue, croissant avec le paramètre qui repère les points de γ, et dont la dérivée est nulle en tout point de γ.*

Application géométrique. — En nous inspirant de cette étude, nous avons obtenu toutes les courbes de Jordan dans lesquelles on peut inscrire un *polygone régulier donné* dont les sommets peuvent se déplacer continûment sur toute la courbe sans que le polygone cesse d'être inscrit. *On trouve en particulier une infinité de courbes algébriques convexes de degré arbitrairement élevé.*

On peut trouver aussi des continus (non de Jordan) qui jouissent de la même propriété relativement aux polygones réguliers ou à des polygones plus généraux et déformables.

TOPOLOGIE. — *L'homologie d'un espace topologique.*
Note [1] de M. **Jean Leray**, présentée par M. Henri Villat.

L'objet de cette Note est d'étudier l'homologie d'un espace topologique au moyen de la notion de couverture [2]; je ne dispose malheureusement pas des documents qui me permettraient de comparer mon étude à celles que MM. Alexander et Kolmogoroff ont faites de l'homologie supérieure.

1. Envisageons un espace topologique E. Soient Z^p et Z'^p deux cycles de deux couvertures C et C′ de E; Z^p et Z'^p seront dits *homologues dans* E lorsqu'il existera une couverture C″ telle que Z^p et Z'^p soient homologues dans $C.C'.C''$. Cette homologie dans E répartit les cycles des couvertures de E en classes d'homologie, que nous nommerons classes d'homologie supérieure de E. L'intersection de deux telles classes, contenant l'une Z^p, l'autre Z'^q, sera la classe de dimension $p+q$ qui contient $Z^p.Z'^q$; ces classes constituent ainsi un anneau, dit *anneau d'homologie supérieure* de E.

Remarque. — Lorsque E est un espace de Hausdorff normal, on n'altère pas la structure de cet anneau en remplaçant dans la définition des couvertures la condition « tout support est fermé » par la condition « tout support est ouvert ».

L'intersection d'une classe Z^q de l'anneau d'homologie supérieure de E *et d'une classe z_r du groupe d'homologie continue de* E *est une classe de dimension $r-q$ de ce dernier groupe*, en vertu de la proposition qui termine la Note citée; cette classe d'homologie continue sera nommée $Z^q.z_r$. On a

$$Z^p.Z^q=(-1)^{pq}Z^q.Z^p;\qquad Z^p.(Z^q.z_r)=(Z^p.Z^q).z_r;\qquad z^q.z_r=0\quad \text{si}\quad q>r.$$

Produit topologique $E\times E'$ *de deux espaces* E et E′. — En définissant préalablement la couverture produit de deux couvertures, on définit aisément le

(1) Séance du 4 mai 1942.

(2) *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 781.

produit $Z^p \times Z'^q$ de deux classes d'homologie supérieure de E et E' comme étant une classe, de dimension $p+q$, de l'homologie supérieure de $E \times E'$; on a

$$(Z^p \times Z'^q).(Z^r \times Z'^s) = (-1)^{qr}(Z^p.Z^r) \times (Z'^q.Z'^s), \tag{1}$$

$$(Z^p \times Z'^q).(z_r \times z'_s) = (-1)^{qr}(Z^p.z_r) \times (Z'^q.z'_s). \tag{2}$$

Une transformation continue φ *d'un espace topologique* E *dans un espace topologique* E' définit un homomorphisme $\varphi(z_p)$ du groupe d'homologie continue de E dans celui de E'; son inverse $\overset{-1}{\varphi}$ définit un homomorphisme $\overset{-1}{\varphi}(Z'^p)$ de l'anneau d'homologie supérieure de E' dans celui de E;

$$\overset{-1}{\varphi}(Z'^p.Z'^q) = \overset{-1}{\varphi}(Z'^p).\overset{-1}{\varphi}(Z'^q); \tag{3}$$

$$\varphi\left(\overset{-1}{\varphi}(Z'^q).z_r\right) = Z'^q.\varphi(z_r). \tag{4}$$

2. Un espace topologique sera dit *strictement connexe* quand deux quelconques de ses points pourront être joints par un arc continu; *simple* quand, en outre tous ses groupes d'homologie continue de dimensions positives seront nuls. Désormais E *sera un espace de Hausdorff, bicompact et connexe, qui possédera un système de voisinages convexes* (c'est-à-dire tels que l'intersection d'un nombre fini d'entre eux soit toujours vide ou simple). On peut alors construire une couverture C de E dont chaque simplexe $S^{p,\lambda}$ appartienne à l'un de ces voisinages convexes; puis un complexe continu possédant une subdivision c duale de C, chaque simplexe $s_{p,\lambda}$ de c appartenant à un certain voisinage de $|S^{p,\lambda}|$. Les groupes d'homologie supérieure et continue de E sont identiques aux groupes d'homologie de C et c. Désormais les coefficients de ces groupes seront les entiers, les homologies étant avec division; sauf dans le théorème de M. H. Hopf, ces coefficients pourront aussi être les entiers pris mod. un nombre premier. On peut alors introduire dans les groupes d'homologie supérieure et continue de E des *bases duales*, $Z^{p,\mu}$ et $z_{p,\mu}$, telles que

$$\sum_{p,\lambda} S^{p,\lambda} \times s_{p,\lambda} \sim \sum_{p,\mu} Z^{p,\mu} \times z_{p,\mu}; \tag{5}$$

$$Z^{p,\mu}.z_{p,\nu} = (-1)^p \delta^\mu_\nu z_0 \tag{6}$$

(z_0 : classe des points de E; $\delta^\mu_\mu = 1$; $\delta^\mu_\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$).

Si E et E' ont pour bases duales $Z^{p,\mu}$, $z_{p,\mu}$ et $Z'^{q,\nu}$, $z'_{q,\nu}$, alors $Z^{p,\mu} \times Z'^{q,\nu}$ et $z'_{q,\nu} \times z_{p,\mu}$ seront deux bases duales de $E \times E'$.

Soient E' et E'' deux espaces homéomorphes à E, dont les points correspondant au point x de E sont x' et x''; soit $\pi(x) = x' \times x''$; (4) et (6) prouvent qu'on a les mêmes coefficients a dans les deux formules

$$\overset{-1}{\pi}(Z'^{p,\mu} \times Z''^{q,\nu}) = Z^{p,\mu}.Z^{q,\nu} = \sum_{\rho} a^{p,\mu;p,\nu}_{p+q,\rho} Z^{p+q,\rho},$$

$$\pi(z_{r,\rho}) = \sum_{\mu,\nu,p+q=r} a^{p,\mu;q,\nu}_{r,\rho} z'_{p,\mu} \times z''_{q,\nu}.$$

Si le groupe d'homologie supérieure de E contient un élément Z^N multiple de tous les éléments de base de ce groupe, alors les groupes d'homologie supérieure et continue de E sont isomorphes : à Z^p correspond une classe bien déterminée z_{N-p}, qui sera désignée par le symbole Z^p/Z^N;

$$\frac{Z^N}{Z^N} = z_0; \quad Z^p.\left(\frac{Z^q}{Z^N}\right) = \left(\frac{Z^p.Z^q}{Z^N}\right); \quad \varphi\left[\frac{\overset{-1}{\varphi}(Z^p)}{\overset{-1}{\varphi}(Z^N)}\right] = \frac{Z^p}{Z^N}.$$

Citons enfin un beau *théorème de M. H. Hopf* [3]. L'existence d'une transformation continue $\varphi(x' \times x'')$ de $E \times E$ dans E telle que

$$\varphi(z'_p \times z''_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(z'_0 \times z''_p) \neq 0 \quad \text{quand} \quad z'_p \neq 0 \quad \text{et} \quad z''_p \neq 0$$

exige que E ait même homologie qu'un produit de sphères de dimensions impaires.

MÉCANIQUE. — *Système d'entretien à amplitude autostabilisée.*
Note de M. **Jean Abelé**, présentée par M. Camille Gutton.

Considérons une classe d'oscillateurs autoentretenus régis par le système d'équations

$$x\,dx + y\,dy + 2\mathrm{R}y\,dx = 0, \tag{1}$$

$$\omega y = \frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Lorsque R *est fonction de x seulement ou de y seulement*, l'équation (1) peut être intégrée graphiquement au moyen d'une élégante construction indiquée par M. A. Liénard [1]. Je propose de désigner en ce cas l'équation (1) sous le nom d'*équation de Liénard*.

L'équation de Liénard est caractérisée par la périodicité de la fonction R, dans les conditions où les variables x et y sont elles-mêmes périodiques. Or, il est possible de retirer à la fonction R ce caractère de périodicité et de l'assujettir à suivre les variations, non plus des variables oscillatoires x ou y, mais de l'*amplitude* de ces variables, en vue de stabiliser cette amplitude par l'effet de ses propres variations en conservant à l'oscillation sa forme rigoureusement sinusoïdale et sa fréquence propre.

Il devient alors nécessaire de généraliser l'équation de Liénard par la substitution d'une *fonction simultanée de x et de y* aux fonctions séparées de x ou de y.

L'étude de cette généralisation m'a conduit aux résultats suivants.

I. Une condition *nécessaire* pour que le système des équations (1) et (2)

---

(3) *Annals of Math.*, **42**, 1942, p. 22. La démonstration de M. Hopf, faite dans le cas des multiplicités fermées et orientables, s'applique au cas beaucoup plus général des espaces de Hausdorff bicompacts, possédant un système de voisinages convexes.

(1) *Revue Générale de l'Électricité*, **23**, 1928, p. 901.