

CORRESPONDANCE.

MM. PAUL ANCEL, CAIUS JACOB, GEORGES MALENÇON adressent des remerciements pour les distinctions que l'Académie a accordées à leurs travaux.

M. RENÉ GARNIER prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Géométrie par le décès de M. H. Lebesgue.

M. le SECRÉTAIRE PERPÉTUEL signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

FRANÇOIS DE CHASSELOUP-LAUBAT. *François Fresneau, seigneur de la Gataudière, père du caoutchouc* (présenté par M. Auguste Chevalier).

TOPOLOGIE. — *Les équations dans les espaces topologiques.*

Note (1) de M. JEAN LERAY, présentée par M. Henri Villat.

Les notions que j'ai introduites dans deux Notes précédentes (2) permettent d'édifier une théorie des équations du type

$$(1) \quad x = \xi[\tau(x), y],$$

où l'inconnue x et le paramètre y sont respectivement des points de deux espaces topologiques, X et Y ; où τ est une transformation continue, définie sur un ensemble de points de X et qui prend ses valeurs dans un troisième espace T ; où ξ est une transformation continue de $T \times Y$ dans X ; T est un espace de Hausdorff, bicompat, connexe, possédant un système de voisinages convexes. Ce type englobe le type d'équations non linéaires des espaces linéaires de Banach que M. Schauder et moi-même avons étudié (3), type qui contient lui-même celui des équations linéaires de Fredholm.

1. Soit $\Phi(y)$ l'ensemble des solutions x de (1); $\Phi(y)$ sera nommé *résolvant absolue* de (1). Soit $\varphi(x)$ l'ensemble des points y tels que x soit solution de (1); $\varphi(x)$ est l'inverse de $\Phi(y)$. φ transforme un ensemble fermé de points de X en un ensemble fermé de points de Y ; Φ est donc continue chaque fois qu'elle est univoque. Si X est un espace de Hausdorff, Φ transforme un bicompat de Y en un bicompat de X .

2. Soit D un ensemble ouvert de points de X ; soit \dot{D} sa frontière, \bar{D} sa fermeture; supposons $\tau(x)$ défini sur \bar{D} . Soit y_p un cycle continu de Y ,

(1) Séance du 4 mai 1942.

(2) *Comptes rendus*, 214, 1942, pp. 781 et 839.

(3) *Ann. École Norm.*, 51, 1934, p. 45.

étranger à $\varphi(\dot{D})$ On peut construire une couverture C de \bar{D} (de simplexes $S^{q,\lambda}$) et un complexe continu de T possédant une subdivision c (de simplexes $s_{q,\lambda}$) qui soit duale de C . En choisissant chaque $s_{q,\lambda}$ dans un voisinage convenable de $\tau(|S^{q,\lambda}|)$, pris lui-même suffisamment petit, on peut faire en sorte que

$$\sum_{q,\lambda} S^{q,\lambda} \cdot \xi(s_{q,\lambda}, \gamma_p)$$

soit homologue à une classe d'homologie continue de D , indépendante des choix de C et c ; la correspondance entre γ_p et cette classe est un *homomorphisme du groupe d'homologie continue de $Y - \varphi(\dot{D})$ dans celui de D* , homomorphisme que désignera le symbole $\Phi(D, \gamma_p)$ et qui se nommera *résolvante algébrique* ⁽¹⁾ de l'équation (1).

Si les D_γ sont des ensembles ouverts, deux à deux disjoints de points de E ,

$$\text{si } |\gamma_p| \cdot \varphi(\bar{D} - \sum_{\gamma} D_{\gamma}) = 0, \text{ alors } \Phi(D, \gamma_p) = \sum_{\gamma} \Phi(D_{\gamma}, \gamma_p).$$

En particulier

$$\Phi(D, \gamma_p) = 0 \text{ quand } \bar{D} \cdot \Phi(|\gamma_p|) = 0.$$

Plus particulièrement encore : si $\Phi(D, \gamma_0)$ est défini et non nul, alors D contient au moins une solution de (1) quand γ est en γ_0 . L'application de ce *théorème d'existence* est facilitée par les deux propositions suivantes :

$\Phi(D, \gamma_p)$ reste constant, quand l'équation (1), D et γ_p varient continûment, tant que $|\gamma_p| \cdot \varphi(\dot{D})$ reste vide.

Supposons T simple; soit t_0 la classe des points de T ;

$$\text{si } \dot{D} \cdot \xi(T, |\gamma_p|) = 0, \text{ alors } \Phi(D, \gamma_p) = D \cdot \xi(t_0, \gamma_p).$$

3. *Le cas particulier $D = X$.* — Supposons $\tau(x)$ défini sur X . Soient $Z^{q,\mu}$ et $z_{q,\mu}$ deux bases duales des groupes d'homologie supérieure et continue de T (ou bien les coefficients de ces homologies sont les entiers, et il s'agit d'homologies avec division; ou bien ces coefficients sont les entiers mod un nombre premier); on a

$$\Phi(X, \gamma_p) = \sum_{q,\mu} \tau(Z^{q,\mu}) \cdot \xi(z_{q,\mu}, \gamma_p).$$

(1) Cette notion de résolvante algébrique d'une équation dépendant d'un paramètre est, à ma connaissance, absolument nouvelle; dans le cas extrêmement particulier où $\varphi(x)$ se trouve être continue et uniforme, X et Y étant deux multiplicités, « l'homomorphisme inverse de φ », tel que l'ont défini M. H. Hopf (*Crelles Journ.*, 163, 1930, p. 71) et M. Freudenthal (*Compositio Math.*, 2, 1935, p. 163; *Annals of Math.*, 38, 1937, p. 847) possède des propriétés analogues à celles de notre résolvante algébrique; mais ces deux notions ont des définitions très différentes.

En particulier, soient x_0 et y_0 les classes des points de X et Y ; posons

$$\tau[\xi(z_{q,u}, y_0)] = \sum_y a \binom{v}{q} z_{q,v}.$$

on a

$$\Phi(X, y_0) = x_0 \sum_{q,v} (-1)^q a \binom{v}{q};$$

ce qui signifie que *la formule des points fixes de M. Lefschetz s'applique aux transformations en lui-même d'un espace de Hausdorff bicompat, possédant un système de voisinages convexes.*

4. Rappelons que nous nommons simple un espace strictement connexe dont tous les groupes d'homologie continue de dimensions positives sont nuls. Si T est simple, on peut trouver une expression de $\Phi(D, y_p)$ qui ne fait intervenir que les valeurs prises par $\tau(x)$ sur \dot{D} . Cette expression garde un sens lorsque le champ de définition de $\tau(x)$ est réduit à \dot{D} . L'homomorphisme qu'elle définit alors sera nommé *résolvante algébrique prolongée* de l'équation (1).

MÉCANIQUE. — *Choc des corps et moindre action.* Note de M. RENÉ DUGAS.

La seule application au domaine de la dynamique que Maupertuis ait donnée du principe de la moindre action qu'il avait énoncé en 1744 se rapporte au choc direct de deux corps soit parfaitement élastiques, soit parfaitement mous.

L'action maupertuisienne mise en jeu dans le choc direct de deux corps a pour expression la somme des forces vives dues aux vitesses perdues.

1. Il est facile d'étendre l'analyse de Maupertuis au choc direct de deux corps partiellement élastiques. Les vitesses v_1 et v_1' de chaque corps après le choc sont déterminées, en fonction des vitesses v_0 et v_0' de chaque corps avant le choc, à l'aide de la relation expérimentale

$$(1) \quad v_1 - v_1' = -e(v_0 - v_0') \quad (0 \leq e \leq 1),$$

où e est le coefficient de restitution, et de la seule condition de moindre action

$$(2) \quad \delta[m(v_0 - v_1)^2 + m'(v_0' - v_1')^2] = 0,$$

c'est-à-dire que *dans le choc direct de deux corps, que ceux-ci soient élastiques, imparfaitement élastiques ou parfaitement mous, la somme des forces vives dues aux vitesses perdues est stationnaire.*

En outre, on sait que la force vive perdue par le système au cours du choc, soit ΔT , est dans un rapport constant avec la somme des forces vives dues aux vitesses perdues, soit Θ

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e} \Theta.$$

On peut donc transposer l'énoncé précédent en disant que *les vitesses après le choc rendent stationnaire la perte de force vive du système.*